社団法人 情報処理学会　研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2003－CG－112　(5)
2003／8／18

反復関数系を用いたノイズモデリング

望月茂徳†　　蔡東生‡

自然現象などの 3D テクスチュアリングにおいては、物体形状にどのようなノイズ分布関数をどのように適応させるかという問題に対し、物体形状とノイズ分布関数を別々に求める手法が取られていたためノイズ適応方法や表現の幅に関する困難さが存在していた。確率付き反復関数系におけるアトラクタを物体形状とみなし、アトラクタを台集合とするような測度を物体形状におけるノイズ分布関数と見なし統一的に扱う手法を議論する。

Noise Distribution Function Using Iterated Function System

Shigenori Mochizuki†　　DongSheng Cai‡

For 3D texture modeling of natural phenomena, Some method using noise distribution function have been applied. However, these methods have the limitations of the applying noise function, because the geometrical structure of object and the noise distribution function are considerd separately. In this paper, we consider the attractor of Iterated Function System as the geometrical structure of the object and consider the invariant mesure supported by the attractor of Iterated function system with the probability as the noise distribution function at the same time. We discuss about this synthetic method for the modeling in CG.

1 はじめに

ＣＧにおける伝統的なモデリング手法の一つとして直方体や球などのプリミティブ形状を組み合わせることによって形状を構成する手法が多く用いられるが、このようにして構成される形状の多くが直線的・曲面的であるのに対し、私たちに身近でモデリングの目的となるような自然現象・自然物はもっとごつごつとしたような形状を様している。

そこで Mandelbrot[1] らによって提唱されてきた統計的フラクタル、特に fBM(fractional Brawnian motion) の考え方から 1/f ノイズが利用されたり、Perlin ノイズとして多く知られる Perlin[2],[3] のテクスチュアリングにおけるノイズ関数生成・適応方法などが利用されてきた。テクスチュアリングにおけるノイズ関数は、ＣＧにおいて質感を表現するのに欠かすことはできない。

このような手法においては、ノイズ分布関数をどのように生成するかという問題とそのノイズ分布関数をどのように適応させるかという問題に帰着するが、このように物体形状とノイズ分布関数を別々に求める手法ではそのノイズ適応方法において困難さを生じざるを得ない。特に複雑な形状になればなるほど、その困難さも増大する。

望月ら [4] の反復関数系 (Iterated Function System:IFS) とそのカオスダイナミクスを用いた紅葉の経時変化は、紅葉色をもった葉の分布と色彩時間変化に関するノイズ分布関数問題に帰着する。本研究では望月ら [4] の紅葉の経時変化の研究を元にした発展的研究として反復関数系に関するノイズ分布関数に焦点を絞って議論を行う。

2 ＣＧにおけるノイズ分布関数

統計的フラクタルの手法 [1] によって、式

$$< |V_H(t_2) - V_H(t_1)| >\propto |t_2 - t_1|^{2H} \qquad (1)$$

で fBm が定義され、$H \to 0$ の時 $1/f$ ノイズになることが知られている。この $1/f$ ノイズを生成するアルゴリズムが数多く紹介されているが、なぜこの $1/f$ が有効であるかということはあまり解明されていない。これらの $1/f$ ノイズは山岳形状などを表す場合に多く使われている。

また、Perlin[2],[3] は、turbulence 関数

$$\sum_i abs(\frac{1}{2^i} noise(2^i x)) \qquad (2)$$

を定義することによって、$1/f$ ノイズに近似的なノイズを用いている。このようなノイズ分布関数は質感を表すために欠かすことはできない。

しかしながら、これらのノイズ関数は統計的性質から定義されているが、適応させる物体の幾何学的形状に関係せず、別々に定義されているため、生成したノイズ分布関数を物体形状に対して適切に適応させるためには困難さを伴う。Perlin[3] は、ノイズを適応させる物体を $0 < D(x) < 1$ というような密度分布関数化し、その密度関数を変化させる $gain, bais$ といっ

† 筑波大学システム情報工学研究科
Graduate School of Systems and Information Engineering, University of Tsukuba
‡ 筑波大学 電子情報工学系
Institute of Information Sciences and Electronics, University of Tsukuba

た Density Modulation Function(DMF) という関数を定義することによって、物体にノイズを適応させる手法を提案した。

この様な DMF 関数は、関数の組み合わせによって様々なノイズの適応方法にバリエーションを与えるが、それぞれの関数はプリミティブ的であるため、フラクタルに代表されるような複雑な形状に対してうまくノイズ関数を適応させることが困難であり、ベースとなる形状と質感を表すノイズ関数に不整合が起こる (図 1)。

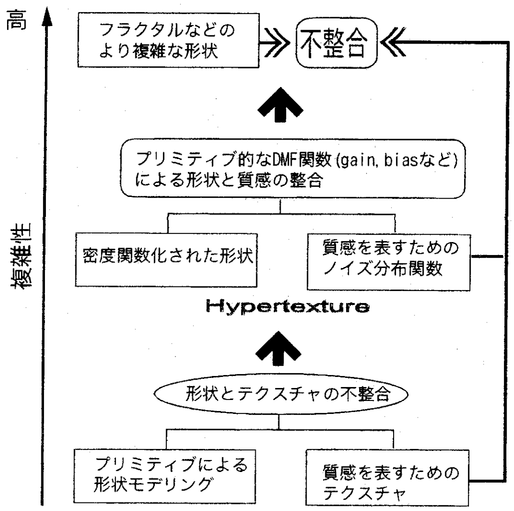

図 1: ＣＧにおけるノイズ分布関数と形状

これに対して、反復関数系を用いることによって物体形状とその物体形状に働くノイズ関数を同時に扱うことができるので、このような不整合を避けることができる。

反復関数系では、その物体形状が縮小写像のアトラクタとして幾何学的に定義され [5]、この幾何学的アトラクタを台集合 (support) とした測度が反復関数系のダイナミカルプロセスから求めることができる。このような測度は、確率付き反復関数系においては、(確率的) 不変測度 (invariant probablistic measure) と呼ばれることもある。このような測度を物体形状に対するノイズ分布関数としてＣＧに利用することができる (図 2)。

図 3 の 2 次元のシェルピンスキー三角形の例で説明すれば、反復関数系によるアトラクタが幾何学的形状を表し、この形状に対する物体の色をアトラクタに対する測度から決定することができる。このシェルピンスキー三角形の幾何学形状をＣＧにおける複雑な 3 次元物体に相当させることができる。

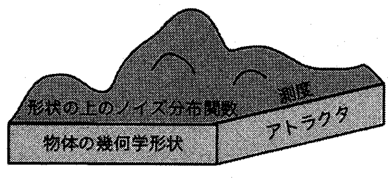

図 2: 反復関数系のアトラクタ・測度とＣＧ

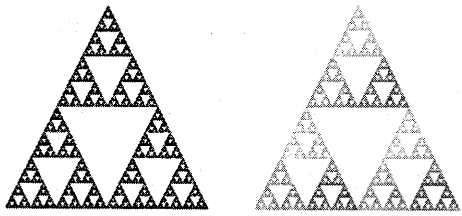

図 3: 左：反復関数のアトラクタとして得られる幾何学形状、　右：アトラクタ上で得られる測度を物体形状に関する色属性に対するノイズ関数とみなす

図 4 の紅葉のＣＧの例で言えば、樹木形状および葉々の分布は幾何学的分布として反復関数系のアトラクタとして得ることができる。このアトラクタ上において定義される測度を葉の色彩変化に対するノイズ分布関数として用いることができる。このような樹木の幾何学的性質はフラクタル性をもち複雑な形状をしているため、従来的なノイズ分布関数の適応法では上手くノイズを当てることは困難である。この樹木に関する反復関数系は、樹木モデリングでよく知られる L-system 構文を反復関数系に変換したものを使用している。

また、コラージュの定理より、任意形状をアトラクタとして構成する反復関数系を近似的に求めることが保証されているので、いかなる任意形状に対する色、形、透過度などの様々な属性に対する変化をもたらすようなノイズ関数を測度から求めることができる。同様に、測度に対するコラージュの定理も存在するので、任意のノイズ分布関数を測度により求めることができる。

反復関数系および反復関数系における測度については次節で詳しく説明する。

3　反復関数系について

反復関数系は, 完備な距離空間 (X, d) と, $n = 1, 2, \ldots, N$ においてそれぞれ縮小係数 s_n を持つ縮小写

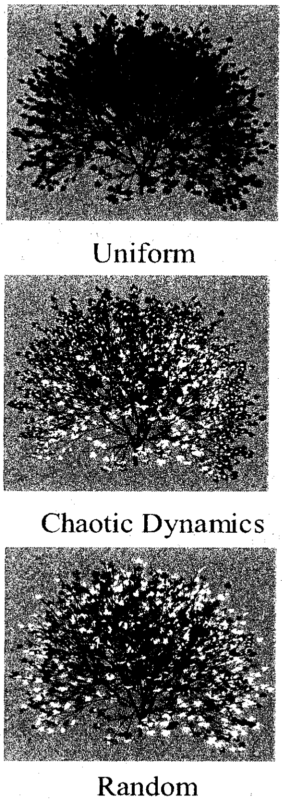

図 4: 反復関数系を用いた紅葉　上：一様な色彩変化による紅葉、中：カオスダイナミクスを用いた紅葉、下：ランダムな色彩変化をもつ紅葉

像 $\omega_n : X \to X$ の有限集合とからなる. この反復関数系を $\{X : \omega_n, n = 1, 2, ..., N\}$ と表記し, その縮小係数は $s = \max\{s_n : n = 1, 2, ..., N\}$ である.

$\{X_n, n = 1, 2, .., N\}$ を, 縮小係数 s をもつ反復関数系とすると, 全ての $B \in$ ハウスドルフ空間 $\mathcal{H}(X)$ においての変換 $W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ は,

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(B) \tag{3}$$

で定義される. これは完備な距離空間 $(\mathcal{H}(X), h(d))$ 上の縮小係数 s の縮小写像である. この縮小写像の一意の不動点 $A \in \mathcal{H}(X)$ を持ち、以下の式を満たす.

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} \omega_n(A) \tag{4}$$

ここで $A \in \mathcal{H}(X)$ を反復関数系のアトラクタと呼ぶ.

一般にこのアトラクタは幾何学的なものと見なすことができる。具体的には、ＣＧにおいてモデリングされる物体となる。ある任意の物体 $L \in \mathcal{H}(X)$ が与えられたとすると、ある $\varepsilon > 0, 0 \leq s < 1$ において

$$h(L, A) \leq \varepsilon/(1-s) \tag{5}$$

を満たすようなアトラクタ A を構成する縮小写像の組 $\{\omega_n\}$ を近似的に求めることができることが、このコラージュの定理によって保証されている。このことは、ＣＧにおいてどんな任意の物体も反復関数系によって構成できることを保証している。

3.1　反復関数系における測度

フィールド F において、$A_i \in F, i = 1, 2, \ldots$ かつ $A_i \cup A_j =, i \neq j$、$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$ である A_i に対して

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i) \tag{6}$$

となる正で非負の関数 $\mu : F \to [0, \infty) \subset R$ を測度という。

$\mathcal{P}(X)$ を X 上における正規化ボレル測度空間とすると、確率的反復関数系 $\{X; \omega_1, \ldots, \omega_N; p_1, \ldots, p_N\}$ におけるマルコフオペレータ $M : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ は

$$M(\nu) = p_1 \nu \circ \omega_1^{-1} + p_2 \nu \circ \omega_2^{-1} + \ldots + p_N \nu \circ \omega_N^{-1} \tag{7}$$

で定義され、$M\mu = \mu$ が成り立つ。このような測度 μ を不変測度という。この測度 μ の台集合は、反復関数系 $\{X; \omega_1, \ldots, \omega_N\}$ のアトラクタ A である。

例えば、$[0, 1]$ 区間をアトラクタとして持つような確率付き反復関数系 $[0, 1]; \omega_1, \omega_2; p_1, p_2$ を考え、$\mu_0(A) = 1$ という初期測度を考えると、マルコフオペレータの繰り返しによって $\mu_n = M^{\circ}(\mu_0)$ という測度列を得る。このとき、n が十分大きければ μ_n は不変測度 μ に収束する。

このことから、正規化ボレル測度空間 $\mathcal{P}(X)$ 上のハッチンソン距離 d_h に対して、任意の測度 ν と縮小係数 $s \in (0, 1)$ において測度におけるコラージュの定理

$$d_h(\nu, \mu) \leq d_h(\nu, M(\nu))/(1-s) \tag{8}$$

が成り立つ。

本研究では、反復関数系のアトラクタをＣＧにおけるモデリング対象となる物体とし、その測度を物体上の色などの属性に対するノイズ分布関数とみなすため、反復関数系のコラージュの定理および測度におけるコラージュの定理によって、任意の形状および任意のノイズ分布関数をもつ確率付き反復関数系 $\{X; \omega_1, \ldots, \omega_N; p_1, \ldots, p_N\}$ を近似的に求めることが可能であることが保証される。

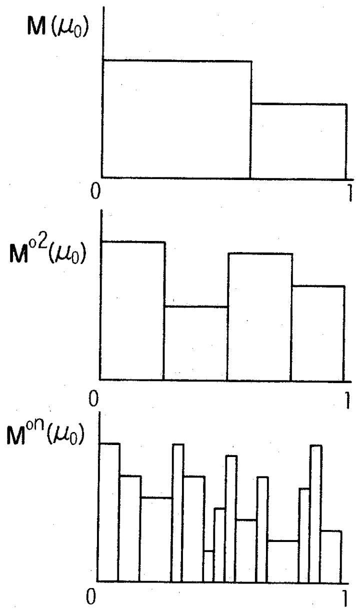

図 5: マルコフオペレータと測度

また、実際の計算においては、確率付き反復関数系にアトラクタ上のボレル部分集合 $\{B_i \in A\}$ の区間に対し、カオスゲームアルゴリズムによって区間に入った点の数を数えることによって

$$\mu(B_i) = \lim_{n\to\infty} \frac{number\ of\ points(B_i)}{n+1} \tag{9}$$

測度が算出される。

4 まとめと今後の展望

本研究では、ＣＧにおいて反復関数系のアトラクタを物体形状とし、そのアトラクタを台集合とするような確率付き反復関数系の測度を物体に対するノイズ分布関数と見なすことによって物体形状とノイズ分布関数を統一的に扱う手法を、従来の物体形状とノイズ関数が別々に求めらていることに起因する３Ｄテクチュアリングなどの困難さに対する解決方法として議論した。

このような確率付き反復関数系を用いることによる利点として、反復関数系におけるコラージュの定理および測度におけるコラージュの定理により、任意の形状および任意のノイズ分布関数を反復関数系において扱うことができることが保証されていることがあげられる。

冒頭であげたように、紅葉の経時変化のＣＧは、反復関数系におけるアトラクタを葉々の幾何学的分布として扱い、その幾何学的分布上において確率付き反復関数系の測度を色彩変化に関するノイズ分布関数として扱うことによって実現した一例である。このような手法を表 1 にまとめる。

反復関数系	性質	紅葉	一般
測度	ノイズ分布	葉の色変化	属性変化
アトラクタ	幾何学分布	葉の分布	物体の形状

表 1: 本研究により提案される反復関数系を用いたノイズモデリング手法のまとめ

しかしながら、コラージュの定理は任意のアトラクタや任意の測度をもつ確率付き反復関数系の縮小写像の組を求められることを保証していながらも実際に縮小写像の組を見つけることはしばしば困難である。紅葉の例においては、L-system から反復関数系の縮小写像への変換 [6] を用いることによって実現されている。この変換はコラージュの定理により保証される一例でもある。より一般的な物体に対しては、フラクタル画像圧縮 [7] において用いられている手法が有効だと推測されるがこれは今後の課題とする。

さらにはノイズ分布関数として用いる測度においても、'意味のある' ノイズ分布関数がきちんと求められるかどうかの分析が欠かせないと思われる。この点に関しては、確率付き反復関数系のマルコフ過程の次数を含めた一般的な議論が必要と思われる。

参考文献

[1] Benoit B. Mandelbrot. *The Fractal geometry of nature*. New York : W.H. Freeman, 1983.

[2] Ken Perlin. An image synthesizer. In *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 85)*, Vol. 19, pp. 287–296, San Francisco, California, July 1985.

[3] Ken Perlin and Eric M. Hoffert. Hypertexture. In *Computer Graphics (Proceedings of SIGGRAPH 89)*, Vol. 23, pp. 253–262, Boston, Massachusetts, July 1989.

[4] 望月茂徳, 蔡東生. 自然な紅葉の経年変化. 情報処理学会全国大会 6A-2, pp. 4-43–4-44, 2003.

[5] M. Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press, 1988.

[6] Przemyslaw Prusinkiewicz and Aristid Lindenmayer. *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer-Verlag, 1990.

[7] M. F. Barnsley and L. P. Hurd. *Fractals Image Compression*. AK Peters, Wellesley, 1992.