

# スーパーフラクタルを用いたテクスチャシンセシス

望月茂徳 † Michael Barnsely ‡ 蔡東生 †

既存の画像及び動画データから新しいコンテンツを作り出すようなテクスチャシンセシスには、タイリングをはじめとした既存データの拡張を目的とする工学的側面と新しい芸術表現ツールの開発を目的とする側面が見られる。本研究では後者に重点を置き、反復関数系の拡張系であるスーパーフラクタルによるフラクタルレンダリングを用いた新しい表現方法としてのテクスチャシンセシスの可能性について議論する。

## Texture Synthesis using Super Fractal

Shigenori Mochizuki † Michael Barnsley ‡ DongSheng Cai †

The Texture-Synthesis which recreate the new contents using the existing pictures or video data has mainly two goals. One is the solution for the engineering technique, for example, like the seamless tiling of picture, and the other goal is to give the new visual expression method. From the view of the latter goals, we introduce the Super Fractal for the texture synthesis and discuss about the its possibility.

### 1 はじめに

既存の画像及び動画データから新しいコンテンツを作り出すようなテクスチャシンセシスには、タイリングをはじめとした既存データの拡張を目的とする工学的側面と新しい芸術表現ツールの開発を目的とする側面が見られる。

前者としてはシームレスな境界をもつタイリング方法 [1], [2] を初め多くの研究者によって取り組まれ、近年では、既存の動画に対するビデオテクスチャシンセシスの研究 [3], [4] が行なわれている。後者としてはモザイク画の自動生成 [4], [5] などの既存画像を用いた新しい芸術的表現ツールの開発が研究されている。

本研究では後者に重点をおいたスーパーフラクタルによるテクスチャシンセシスについて研究を行う。スーパーフラクタルとは既存の反復関数系フラクタルの拡張系であり、本研究ではフラクタルトップと呼ばれる拡張反復関数系と超反復関数系を指す [6]。

従来の反復関数系フラクタルは、複雑で微細な非解像度依存の画像生成を可能としていたが、3 節で説明するように、表現ツールとしては汎用性を欠いていた。本研究ではその欠点を克服するため反復関数系をフラクタルトップと呼ばれる拡張反復関数系を導入し、カラスティーリングアルゴリズムを用いることで既存の画像から新しいコンテンツを作り出すようなフラクタルレンダリングを行なう。さらに、より表現の幅を広げるために超反復関数系を導入し、その新しい表現

ツールとしての可能性を考察する。

### 2 反復関数系について

反復関数系 (Iterated Function System) は、完備な距離空間  $(X, d)$  と、 $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  においてそれぞれ縮小係数  $s_n$  を持つ縮小写像  $f_n : X \rightarrow X$  の有限集合とからなる。この反復関数系を  $\{X; f_1, \dots, f_N\}$  と表記し、その縮小係数は  $s = \max\{s_n : n = 1, 2, \dots, N\}$  である。

$\{X; f_1, \dots, f_N\}$  を、縮小係数  $s$  をもつ反復関数系とすると、全ての  $B \in \mathcal{H}(X)$  においての変換  $W : \mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$  は、

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^N f_n(B) \quad (1)$$

で定義される。これは完備な距離空間  $(\mathcal{H}(X), h(d))$  上の縮小係数  $s$  の縮小写像である。これは一意の不動点  $A \in \mathcal{H}(X)$  を持ち、以下の式を満たす。

$$A = W(A) = \bigcup_{n=1}^N f_n(A) \quad (2)$$

ここで  $A \in \mathcal{H}(X)$  を反復関数系のアトラクタと呼ぶ。一般にこのアトラクタは幾何アトラクタとみなす。

ある任意の物体  $L \in \mathcal{H}(X)$  が与えられたとすると、ある  $\varepsilon > 0, 0 \leq s < 1$  において、ハウスドルフ距離  $h(L, A)$

$$h(L, A) \leq \varepsilon / (1 - s) \quad (3)$$

を満たすようなアトラクタ  $A$  を構成する縮小写像の組  $\{f_n\}$  を近似的に求めることができることが、このコラージュの定理 [7] によって保証されている。このことは、CG においてどんな任意形状の物体も反復関数系として構成できることを保証している。

† 筑波大学システム情報工学研究科  
Graduate School of Systems and Information Engineering,  
University of Tsukuba  
‡ オーストラリア国立大学 数理科学研究科  
Mathematical Science Institute, Australian National  
University

### 3 フラクタルトップ

反復関数系において縮小写像同士の領域が重なり合いを持つとき、このような反復関数系をオーバーラッピングと分類する。一般的な反復関数系のフラクタルレンダリングにおいて、この重なり合いを持つ領域は確率的反復関数系に割り当てられた確率のみに従って描画されるため、その反復関数系本来が持つ微細さは失われていた (図 1 左図)。この解決策として測度 (measure) レンダリングが存在する。測度レンダリングの構造は、反復関数系の持つ幾何アトラクタとその確率による不変測度 (invariant measure) との二つの組み合わせである (図 1 中央)。



図 1 フラクタルレンダリング 左図：通常のレンダリング 中央：測度レンダリング 右図：フラクタルトップとカラースティーリングアルゴリズムによるレンダリング

本研究では、拡張された新しい反復関数系としてフラクタルトップを紹介する。これにより、幾何アトラクタと不変測度の二つのアトラクタで表現されていた反復関数系の微細表現を一つのアトラクタであらわすことが可能になり、新しい微細表現を持つフラクタルレンダリングを行なうことができる。

フラクタルトップは反復関数系の縮小写像を重なり合いを排除した写像として再定義しなおすことで得ることができる (図 2)。

この写像は、距離空間  $X$ 、反復関数系に関する記号空間  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}^\infty$  に対して

$$T: \mathcal{H}(\Omega \times X) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega \times X) \quad (4)$$

と作用する写像である。  $T$  はすべての  $\Theta \in \{\mathcal{H}(\Omega \times X)\}$  に対して

$$T(\Theta) = Top(T_1(\Theta), \dots, T_N(\Theta)) \quad (5)$$

と定義され、  $T_n$  は

$$T_n(\Theta) = \{T_n(\omega, x) = (n\omega, f_n(x)) | (\omega, x) \in \Omega \times X\} \quad (6)$$

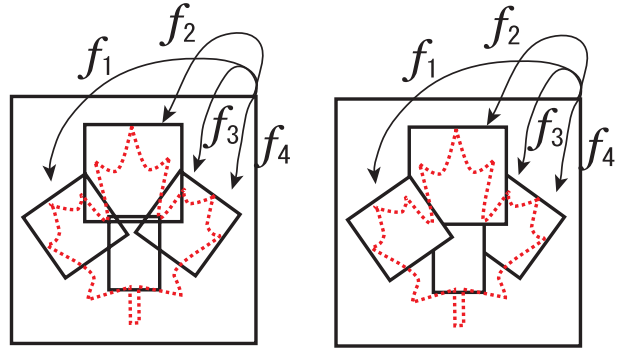


図 2 左図：従来の重なり合いを許す反復関数系 右図：重なり合いを持たないフラクタルトップ

である。ここで  $n\omega$  は反復関数系のアドレス  $\omega$  に対して記号  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  を接続することを意味し、  $f_n$  は縮小写像を表す。このとき、  $\mathcal{H}(\Omega \times X)$  ハウスドルフ空間である。例えばここで、重なり合いをもつ二つの写像  $A, B$  を仮定すると、  $Top$  関数は

$$Top(A, B) = \{(\omega, x) \in A \cup B \mid \omega \geq \varpi \text{ whenever } (\varpi, x) \in A \cup B\} \quad (7)$$

と定義され、必然的に関数  $T$  は重なり合いを持たない関数になる。

$T$  は不動点  $\Gamma \in \mathcal{H}(\Omega \times X)$  からなるアトラクタを持つ。この  $\Gamma$  を反復関数系に関するフラクタルトップと呼ぶ。この  $\Gamma$  はカラーージュの性質をもち、2次元における有限解像度の概算では反復関数系

$$\{\Omega \times X; T_1(\omega, x), \dots, T_N(\omega, x); p_1, \dots, p_N\} \quad (8)$$

のランダム反復計算アルゴリズムによって計算することができる。つまり、  $\Gamma$  は  $T$  の反復によって決定論的に計算され、どんな  $\Theta_o \in \Omega \times X$  に対して以下が成り立ち、

$$T^{on}(\Theta_o) \xrightarrow{\text{weakly}} \Gamma \quad (9)$$

(9) 式のように拡張された反復関数系の点列  $\Theta_n$  はアトラクタ (フラクタルトップ) に弱収束し、アトラクタ上のみが存在する。

### 4 フラクタルトップとカラースティーリングアルゴリズム

3 節で述べたように、一般的な反復関数系におけるフラクタルレンダリングでは、フラクタルが本来的にもつ複雑さや微細さを再現することが困難であり、それに対して測度レンダリングが行われた。しかし、測

度レンダリングの場合は微細な幾何学性質を単一系の点列として捕らえることができないため、汎用性に欠けていた。

フラクタルトップの考え方では、測度レンダリング以上の複雑さや微細さを持つ構造を一つの点列として保持することができるので、様々な応用を考えることができる。本研究ではその一例としてフラクタルトップを用いたカラースティーリングアルゴリズムを紹介する。

このアルゴリズムでは、画像の描画用反復関数系として、 $\{ ; f_1, \dots, f_N; p_1, \dots, p_N \}$  を用意する。これを記号空間  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}^\infty$  とそのシンボル  $\omega \in \{1, 2, \dots, N\}$  とともにフラクタルトップの定義に従って  $\{\Omega \times ; f_1(\omega, x), \dots, f_N(\omega, x); p_1, \dots, p_N\}$  に拡張すると、確率  $p_n$  によるランダム反復によってフラクタルトップ・アトラクタ上の点列  $\{a_n\}$  を得る。

これに対し、ある既存の画像上に反復関数系  $\{ ; g_1, \dots, g_N; p_1, p_1, \dots, p_N \}$  を定義し、同様にして得た点列  $\{b_n\}$  のインデックスとフラクタルトップ上の点列  $\{a_n\}$  のインデックスを一致させる。これに従って、既存画像上において  $b_n$  の座標にあたるピクセルのカラー値をスクリーン上の  $a_n$  の座標に描画する。この概略を図 3 に示し、例を図 1 右図に示す。

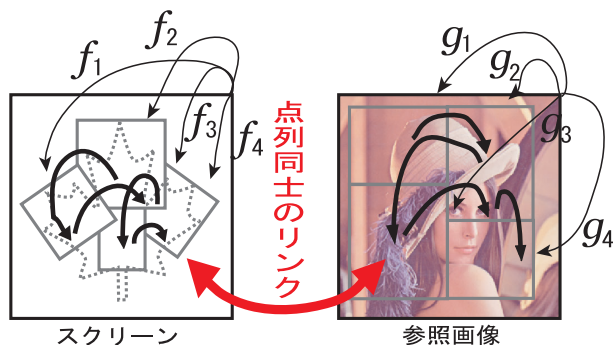


図 3 フラクタルトップとカラースティーリングアルゴリズム

既存の画像をカラーパレットとして利用することによって、テクスチャシンセシスをはじめとするような既存画像の二次利用といった効果や新しい表現手法の確立などが期待される。またカラーパレットとして持ちいる既存画像データを動画などのシーケンスから得ることによって動画の特殊効果などを与えることができる。

この研究で特筆すべきことは、反復関数系のコラージュの定理によって任意のあらゆる形状に近似的なフラクタルトップを得られることが保障されていることであり、それによって任意の形状を描くことができる

ことにある。

## 5 超反復関数系

ここでは、超反復関数系 (Super Itareted Function System) について説明する。一般的な反復関数系を 2 節のように定義した場合、各反復関数系にインデックスをつけることによって以下のように拡張する。

$$F^n = \{X; f_1^n, f_2^n, \dots, f_M^n; p_1^n, p_2^n, \dots, p_M^n\} \quad (10)$$

このとき、すべての  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  に対し  $f_m^n : X \rightarrow X$  であり、 $\sum_{m=1}^M p_m^n = 1, p_m^n \geq 0 \forall m, n$  が成り立つ。この個々の反復関数系を一つの写像をみなすことによって以下のように拡張される。

$$\mathcal{F} = \{X; F^1, F^2, \dots, F^N; P^1, P^2, \dots, P^N\} \quad (11)$$

同様に、 $\sum_{n=1}^N P_n = 1, P_n \geq 0 \forall m, n$  が成り立つ。以下のような演算が可能となる。

$$A_{n+1} = F^{\sigma_n}(F^{\sigma_{n-1}}(\dots(F^{\sigma_2}(F^{\sigma_1}(A_o))))\dots) \quad (12)$$

さらにこれを拡張し、V-variable バッファを定義し、写像を V 次元のハウスドルフ空間上の写像

$$f^q : \mathcal{H}^V \rightarrow \mathcal{H}^V \quad (13)$$

と定義すると、用意された V 個の参照バッファ  $K = (K_1, K_2, \dots, K_V) \in \mathcal{H}^V$  に対して

$$f^a(K) = \left( \bigcup_{m=1}^M f_m^{n_1}(K_{v_1}, m), \dots, \bigcup_{m=1}^M f_m^{n_V}(K_{v_V}, m) \right) \quad (14)$$

が成り立つ。V = 3 のバッファ空間と縮小係数  $\frac{1}{2}$  のシェルピンスキー三角形をなす反復関数系  $F^1$  と縮小係数  $\frac{1}{3}$  のシェルピンスキー三角形をなす反復関数系  $F^2$  からなる  $m = 3, N = 2$  の超反復関数系の演算は図 4 のようになる。

この例で言えば反復関数系の種類は 2 種類だけだが、限りなく多くのバリエーションをもった形状を生成することができる。また、個々の変換  $\bigcup_{m=1}^M f_m^{n_1}(K_{v_1}, m)$  はフラクタルトップを考慮することが可能であるため、超反復関数系においてカラースティーリングアルゴリズムを実行することも可能である。図 5 は超反復関数系を用いた生成画像の例である。この例においても N = 2 で反復関数系は 2 種類だけであるが、生成される形状は多岐にわたる。浅井 [8] は V = 1 のケースについて言及している。

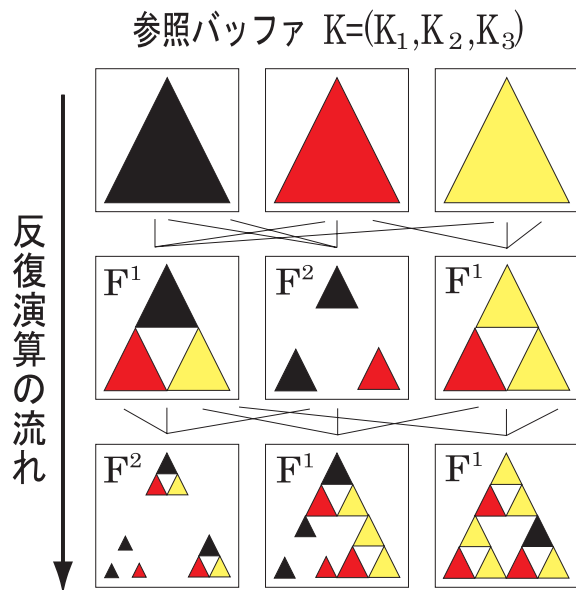


図 4 超反復関数系の演算例

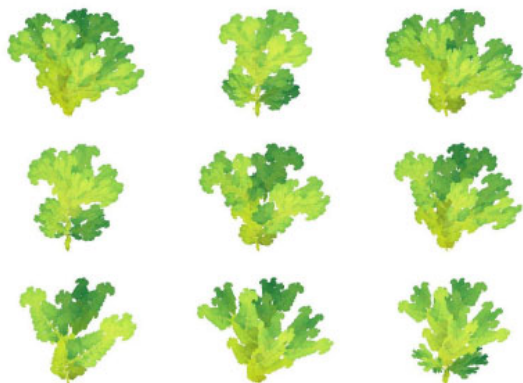


図 5 超反復関数系の例

## 6 応用例：フラクタルフィルタ

本研究では、このスーパーフラクタルを用いたテクスチャシンセシスの応用例として、動画に対して特殊効果を施すフラクタルフィルタを紹介する。

まず初めに、反復関数系の縮小写像を用いて形状をモデリングし、フラクタルトップの考え方にしたがってレンダリングされる形状構造を得る。3節で述べたようにカラスティーリングアルゴリズムを用いることによって動画のフレームから画像データを取り出し、フラクタルレンダリングを施す。この様子を図6に示す。動画としてはムービーファイルやビデオカメラなどから用いることができる。図6中の右上、右下はそれぞれは参照とするムービーファイル、USB カメ

ラによるライブ動画であり、左はフラクタルフィルタを実行した例である。

このスーパーフラクタルを用いたフラクタルフィルタリングの利点は、コラージュの定理に従った様々な形状のモデリングが可能で、反復関数系の計算速度は高速なため、動画やライブカメラからのリアルタイム処理が可能である。

このようなフラクタルフィルタには反復関数系のもつ複雑で微細な表現をもち、フラクタル万華鏡と呼ばれるような美しい効果が見られる。

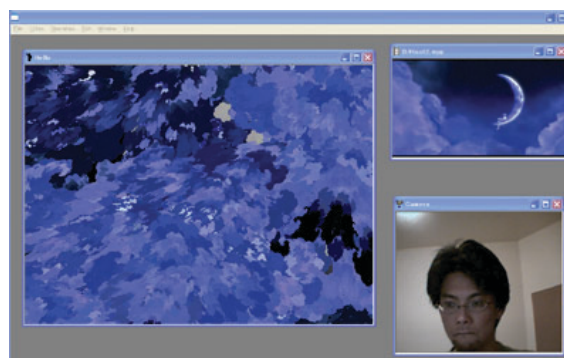


図 6 スーパーフラクタルフィルタ

## 7 まとめと今後の展望

本研究では、拡張された反復関数系であるフラクタルトップや超反復関数系を用いた新しい微細表現を伴うテクスチャシンセシスについて研究を行った。フラクタルレンダリングにおいては、従来の反復関数系によるランダム反復法や測度レンダリング方法では汎用性が低かったが、微細な構造を単一の点列によって保持することができるフラクタルトップの導入によって新しい表現の可能性が広まったと考察される。この応用例として、カラスティーリングアルゴリズムに従って既存の画像をカラーパレットとして用いるテクスチャシンセシスや、動画に対する特殊効果を与えるフラクタルフィルタを提案した。

反復関数系はそれ自身にモデリング部分とレンダリング部分を両方内包している。縮小写像の組み合わせによるモデリングは多少の困難さがあることが否めないが、コラージュの定理により任意形状に近似的な写像の組み合わせを求めることが保障されている上、フラクタル画像圧縮的手法によって縮小写像を求めることもできる。

レンダリングに関しては、基本的に縮小写像の展開はアフィン変換の単純なかけあわせであるので、非常に高速に行なうことができる。測度レンダリングはピ

クセルに代表されるボレル部分集合中の測度をランダム反復法で算出するため多くの計算コストがかかっていたが、フラクタルトップではその必要がなく高速にレンダリングを行なえるため、6 節での応用例のような動画のリアルタイムフィルタとして用いることが有用ではないかと考えられる。

## 参考文献

- [1] Michael F. Cohen, Jonathan Shade, Stefan Hiller, and Oliver Deussen. Wang tiles for image and texture generation. *ACM Trans. Graph.*, Vol. 22, No. 3, pp. 287–294, 2003.
- [2] Alexei A. Efros and William T. Freeman. Image quilting for texture synthesis and transfer. In *Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 341–346. ACM Press, 2001.
- [3] Vivek Kwatra, Arno Schodl, Irfan Essa, Greg Turk, and Aaron Bobick. Graphcut textures: image and video synthesis using graph cuts. *ACM Trans. Graph.*, Vol. 22, No. 3, pp. 277–286, 2003.
- [4] Allison W. Klein, Tyler Grant, Adam Finkelstein, and Michael F. Cohen. Video mosaics. In *Proceedings of the second international symposium on Non-photorealistic animation and rendering*, pp. 21–ff. ACM Press, 2002.
- [5] Junhwan Kim and Fabio Pellacini. Jigsaw image mosaics. In *Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 657–664. ACM Press, 2002.
- [6] Michael Barnsley. Ergodic theory, fractal tops and colour stealing. *preprint*, 2004.
- [7] M. F. Barnsley. *Fractals Everywhere*. London: Academic Press Inc, 1993.
- [8] 浅井貴浩. 反復関数集合によるフラクタル画像生成. *Richo Technical Report*, Vol. 24, , 1998.