

幾何制約を考慮したラプラシアン・デフォーメーション

増田宏†, 吉岡康博†, 古川 慈之††

メッシュモデルを意図する形状に変形するために、各頂点での離散ラプラシアンの値を保存しながらインタラクティブにデフォーメーションを行う手法が提案されてきた。しかし、このような方法を工業設計分野に応用しようとする、製品を成立させるための幾何形状制約を満たすことが求められるため、そのままでは適用が難しい。そこで、本発表では、こうした分野での応用を想定して、制約を保持した変形手法について検討する。まず、制約については、強い制約と弱い制約を指定し、これらが一次式で記述できる場合においては、インタラクティブなデフォーメーションを行えることを示した。また、制約が一次式で記述できない場合においては、非線形の最適化を行う必要があり、インタラクティブ性は損なわれるが、制約を満たす変形が行える手法について示した。

Constraint-based Laplacian Surface Deformation

Hiroshi Masuda†, Yasuhiro Yoshioka†, and Yoshiyuki Furukawa††

Recently, Laplacian surface deformation techniques have been intensively studied. Such methods modify mesh models so that discrete Laplacian values are maintained at each vertex. However, when Laplacian surface deformations are applied to industrial design, it is difficult to satisfy design constraints, which are typically specified by relationships between geometric entities. This paper proposes a new deformation method that can handle soft and hard constraints while deforming shapes.

1. はじめに

3Dモデルの利用が広く普及し、3Dデータが大量に蓄積されるようになってきた。それに伴い、既存のモデルを再利用する試みが注目されている。特に製造業では、製品を構成するすべての部品が立体モデルとして作成されることが多く、それらがデータベースに格納され利用可能になっている。その一方で、新規製品の3Dモデルは開発工程の比較的後半で生成されることから、設計初期段階ではモデルベースの検討が容易ではないという問題がある。そのため、新製品のコンセプトや基本設計の検証のために、多少ラフなモデルであっても、類似した既存モデルを編集して活用し

たいという要求がある。

既存の3Dモデルを編集して新規製品のモデルに改変するための形状操作として、デフォーメーションまたはモーフィングと呼ばれる方法が有望である。

製品設計においては、3次元モデルとして、パラメトリック曲面を用いたCADモデルが用いられる。しかし、パラメトリック曲面は制御が難しく、編集するのに煩雑な作業が必要となり、自由曲面をそのままデフォーメーションするのは容易ではない。現状では比較的単純な曲面の変形に限定されている^[1]。

そこで、本研究ではメッシュモデルの変形を考える。メッシュモデルは、物体の面上の点を離散的にサンプリングし、近傍の頂点をエッジで接続して生成された近似モデルである。CADモデルは、面上の点をサンプリングすることによってメッシュモデルに変換可能なので、CADモデルの変形に

† 東京大学大学院工学系研究科
School of Engineering, The University of Tokyo

†† 産業技術総合研究所 ものづくり先端技術研究センター
Digital Manufacturing Research Center, National Institute of
Advanced Industrial Science and Technology

においては、CAD モデルをメッシュモデルに変形し、メッシュモデルを変形した後に曲面当てはめを行い、再度 CAD モデルに変換する方式を用いることができる。

メッシュモデルのデフォーメーションとしては、パラメトリックボリュームを用いた手法^[2]が古典的である。この方法では、点群を囲む立体格子によって空間をパラメータ化し、空間を歪めることによって形状変形を行う。しかしながら、この方法を製品設計に応用しようとする、形状が不自然に歪む問題や、特定部分の寸法や曲面式を保持するような制御格子を算出することが難しいという問題がある。実際、メッシュモデルの変形は、解析モデルの編集などで既に利用されはじめているが、設計意図を保持するような変形結果を得ることが難しいことが問題となっている。

もう一つの変形方法は、曲面を膜や弾性体とみなして変形する方法である。解法としては、メッシュに対してエネルギー関数を導入し、その最小化問題として曲面生成を行う方法、もしくは、偏微分方程式を導入して曲面を変形する方法が用いられる。エネルギー関数の最小化問題は、変分法によって偏微分方程式に変形できるため、これらの方法は等価である。

エネルギー関数としては、膜エネルギー(式(1))や薄板エネルギー(式(2)):

$$E_1(S) = \iint (S_u^2 + S_v^2) dudv \quad \dots(1)$$

$$E_2(S) = \iint (S_{uu}^2 + 2S_{uv}^2 + S_{vv}^2) dudv \quad \dots(2)$$

がよく用いられる。これらのエネルギー最小化問題は、ラプラシアン:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial^2 u} + \frac{\partial^2}{\partial^2 v} \quad \dots(3)$$

を用いて、それぞれ、

$$L(S) = 0 \quad \dots(4)$$

$$L(L(S)) = 0 \quad \dots(5)$$

と変形できる^[3-5]。メッシュモデルにおいては、偏微分は近傍点との差分方程式で近似できるため、この最適化問題は連立一次方程式を解く問題に帰着される。なお、これらの式で得られる曲面は、滑らかな形状だけであるが、式 L(S) は平均曲率に相当する量であるため^[6]、式(4)(5) の右辺を0以外に置くことによって、凹凸を保存した変形も可能

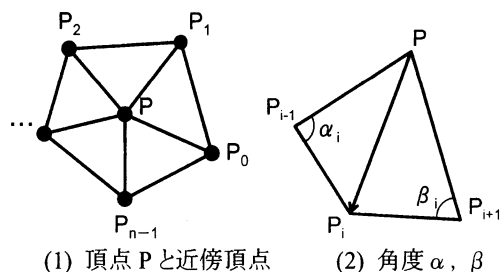


図1. 離散ラプラシアン

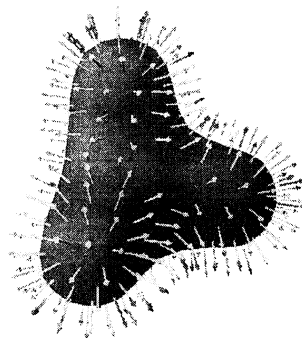


図2. $H(p)$ で算出されるベクトル

である^[7,8]。

製品モデルでは、多くの幾何制約が、点、エッジ、面間の関係で記述できるため、点間の拘束によって曲面変形を行うこうした方法は、製品設計と十分親和性があると考えられる。そこで、本手法では、曲面の最適化問題をベースにして、幾何制約を満たすデフォーメーション手法について考える。

2. ラプラシアン・デフォーメーション

本章では、ラプラシアン・デフォーメーションに関する基本事項についてまとめて示す。

2.1. 離散ラプラシアン

メッシュモデルの頂点 P における離散ラプラシアンは、すべての頂点を均等の重みとした場合には、図1(1) のように近傍頂点 {P_i} を用いて、

$$L(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (p_i - p) \quad \dots(6)$$

と書ける。

一方, Meyer ら^[6]は, 式(7) のような重み付けを行うと, $H(\mathbf{p})$ が近似的に点 \mathbf{p} での平均曲率ベクトルとなることを示した。

$$H(\mathbf{p}) = \frac{3}{2A} \sum_{i=0}^{n-1} (\cot \alpha_i + \cot \beta_i)(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \quad \dots(7)$$

ここで, A は近傍三角形の面積の和, α_i, β_i は図 1 (2)に示す角度である。ラプラシアン の値として, 式(6)の代わりに, 式(7)もしばしば用いられている。本研究でも, 式(7) を用いることにする。なお, 式(7) で求められるベクトルは, 法線ベクトルに相当する。図2は, メッシュの各頂点で計算されたベクトル $H(\mathbf{p})$ を正規化して表示したものである。

2.2. ラプラシアン・デフォーメーション

式(7) を用いた変形例を図3に示す。この変形は, メッシュの下側を固定し, 頭の部分の1頂点をハンドルとして上方に移動させたものである。図 3 (1) は元のメッシュ, 図 3 (2) は固定点とハンドル以外の各頂点で $H(\mathbf{p}_i)=0$ となるように変形した例, 図 3 (3) は同様の条件で, $H(H(\mathbf{p}_i))=0$ として計算した例, 図 3 (4) と (5) は変形の前と後で, それぞれ $H(\mathbf{p}_i), H(H(\mathbf{p}_i))$ の値が保存するように変形した例である。

この例題で, 図 3 (4) (5) のハンドル頂点が尖っているのは, この頂点では平均曲率が保存しないためである。ハンドル頂点は既に位置制約を与えられているため, さらに制約を与えると過剰拘束になる。

Sorkine らは, この問題に対処するために, n 個の変数に対して, $H(\mathbf{p}_i) = \delta_i$ ($i=0,1,\dots,n-1$), $\mathbf{p}_j = \mathbf{u}_j$ ($j=0,1,\dots,m-1$) の $(n+m)$ 個の制約式と n 個の未知数を持つ問題を, 以下の式の最小化問題として解いた。

$$F(\mathbf{P}) = \sum (H(\mathbf{p}_i) - \delta_i)^2 + \sum \beta_j (\mathbf{p}_j - \mathbf{u}_j)^2 \quad \dots(8)$$

ここで, δ_i は変形前の $H(\mathbf{p}_i)$ の値, \mathbf{u}_j はハンドル頂点の座標, β_j は重みである。

この式を解いた結果を図 3(6) に示す。ハンドル位置頂点は指定された位置からずれるが, ハ

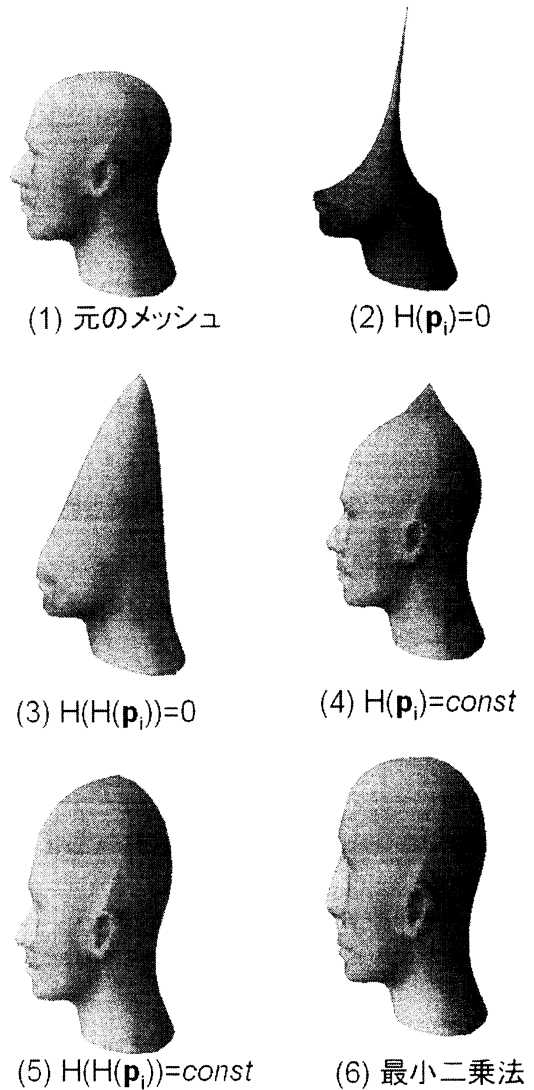


図 3. ラプラシアン・デフォーメーション

ンドル頂点付近は滑らかになる。

2.3. インタラクティブな変形

$H(\mathbf{p}_i), H(H(\mathbf{p}_i))$ を厳密に保存する問題, 式(8) の最小二乗法によって最適化する問題のいずれも連立一次方程式を解く問題に帰着する。式(8) においては, 制約式は $\mathbf{Ax} = (\delta, \mathbf{u})'$ と書けるので, 解は

$$\mathbf{x} = \{(\mathbf{A}'\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}'\}(\delta, \mathbf{u})' \quad \dots(9)$$

として, 移動後の \mathbf{u} の座標に基づいて頂点座標を計算できる。行列 \mathbf{A} はメッシュの位相にのみ

依存するので、 $(A^t A)^{-1} A^t$ を一度計算しておけばインタラクティブな変形が可能である。

なお、 δ は法線の情報を含んでいるので、法線ベクトルも保存される。法線を変更したいときには、 δ を回転する必要がある。この方法については文献[7][8]に示されている。

3. 幾何制約を考慮したメッシュ変形

式(8)では、指定された固定点を厳密には通らない。製品設計においては、寸法等の制約は強い制約なので必ず満たす必要がある。一方、曲率については、円筒や球のような解析曲面を除けば厳密に値が指定されることは稀である。

そこで、本研究では、最小二乗の意味で制約を満たす弱い制約と、厳密に満たすことを要求する強い制約の二つを区別する。また、位置や曲率以外の制約を導入することも考える。

3.1. 線形幾何制約

まず、すべての幾何制約が頂点座標を未知数とする一次式として記述できる場合を考える。ここで、弱い制約を $Ax=b$ 、強い制約を $Cx=d$ と書き、また、

$$A = (a_0, \dots, a_{p-1})^t, \quad C = (c_0, \dots, c_{q-1})^t$$

と置く。このとき、最適化する式は以下のように書ける。

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{p-1} w_i (a_i \cdot \mathbf{x} - b_i)^2 + \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j (c_j \cdot \mathbf{x} - d_j) \quad \dots(9)$$

この式を最小化する \mathbf{x} は以下の式で算出される。ここで、 W は w_i を (i,i) 成分に持つ対角行列である。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^t W A & \frac{1}{2} C^t \\ C & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A^t W \mathbf{b} \\ \mathbf{d} \end{pmatrix} \quad \dots(10)$$

この計算においては、行列 A, C が固定されていれば、逆行列を一度計算しておけばよいので、インタラクティブなデフォーメーションが可能である。

3.2. 非線形幾何制約

まず、法線に関する拘束について考える。式

(10)で算出される曲面では、平均曲率を表す制約式が移動後も変化しないという前提に基づいている。しかしながら、式(7)の角度 α, β は、座標が変化するにつれて変わっていく。すなわち、式(10)によって幾何制約が満たされるのは、変形量が微小な場合である。

変形量が大きいときには、平均曲率に関する制約を満たすためには、小さいステップに分割して処理を行う必要がある。その場合の計算法としては、(1)ステップごとに变化する角度 α, β に応じて逆行列を計算し直す、または(2)ステップごとにメッシュを構成する三角形の法線を計算し、式(7)で算出されるベクトルを法線方向と一致するように回転させる、のいずれかの方法を取ることができる。ただし、後者については計算速度が早いという利点はあるが、メッシュの歪みが発生しやすいという問題がある。

また、法線以外の制約に関して、幾何制約が一次式で書けない場合には、式(10)の代わりに、弱い制約を $f_i(\mathbf{x})$ 、強い制約を $g_i(\mathbf{x})$ として、以下のような関数の最適化を行う必要がある。

$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{p-1} w_i f_i(\mathbf{x})^2 + \sum_{j=0}^{q-1} \lambda_j g_j(\mathbf{x}) \quad \dots(11)$$

この式は、非線形の最適化となる。ニュートン法を用いれば、 $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - H(E)^{-1} \nabla E$ を繰り返し計算して求めることができる。ここで、

$$H(E) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E(\mathbf{x}_k)}{\partial x_i \partial x_j} \end{bmatrix}$$



図4. 強い制約を含むデフォーメーション

$$\nabla E = \left(\frac{\partial E(\mathbf{x}_k)}{\partial x_0} \quad \frac{\partial E(\mathbf{x}_k)}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial E(\mathbf{x}_k)}{\partial x_{n-1}} \right)^t$$

である。この計算では繰り返しの度に $H(E)$ の逆行列を求める必要があるため、この場合もインタラクティブ性は犠牲になる。

4. 例題

一次式で表現できる幾何制約を用いて、インタ

ラクティブな変形操作を適用した例を示す。

図4は、式(10)を用いて、ハンドル頂点を厳密に通るように変形した例である。ワイヤで示したものがハンドル頂点の位置を強い制約としたもの、面表示したものが弱い制約としたものである。この例では、差を誇張するために、式(8)の β_i に相当する値を 0.1 にしている。なお、この例では、頂点数 494 個、弱い制約が 523 個、強い制約が 1 個

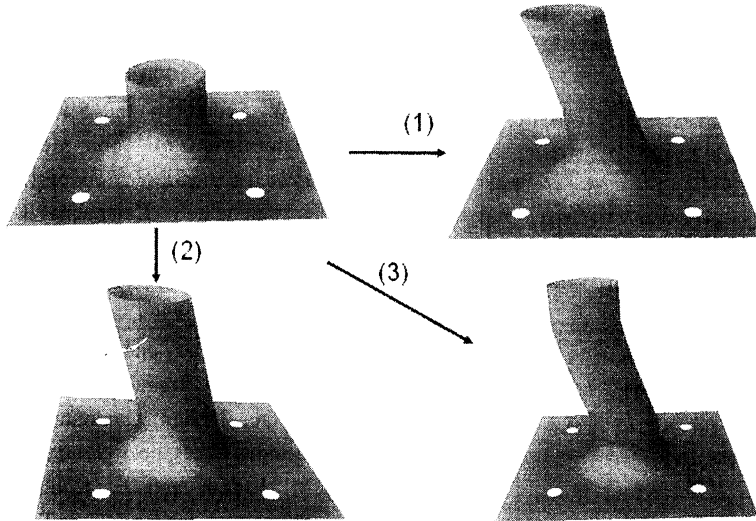


図 5. 異なる制約を用いたデフォーメーション

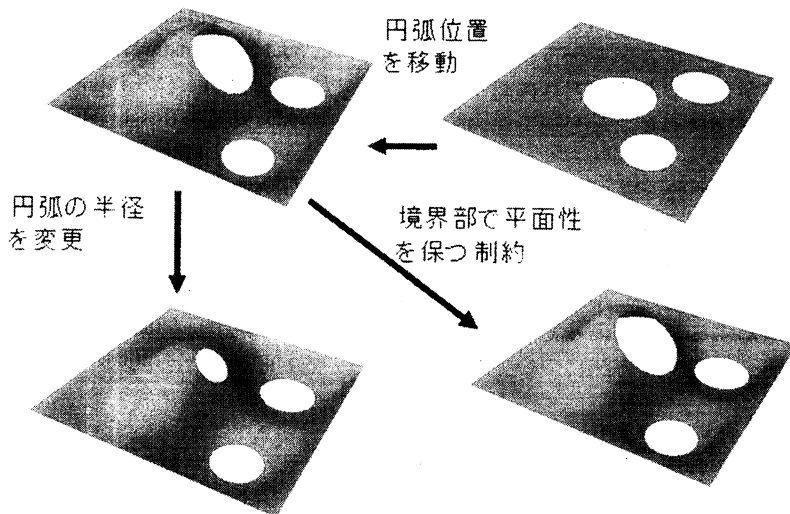


図 6. 法線の変更を伴うデフォーメーション

である。メッシュモデル下部では、各頂点に位置制約と平均曲率の制約の両方を弱い制約として与えている。

また、異なる幾何制約を付加して変形した例を図5に示す。いずれも、円筒上端をハンドルとして斜め上方に移動させた。その際、図5(1)では、円筒部に制約 $H(H(p_i))=0$ を指定し、図5(2)では平均曲率を保存させた。図5(3)では平均曲率の保存に加えて、円筒の上部と下部がZ軸に沿うような指定を強い制約として加えている。この例で示すように、幾何制約に応じて、異なる振る舞いをするインタラクティブ・リアルタイムデフォーメーションが実現できる。なお、この例では、水平面での切断面の円弧性は保たれるものの、法線は保存していない。これは、3.2で述べた理由による。

図6は平均曲率ベクトルで算出される法線ベクトルの再計算を含むデフォーメーションである。この例では、円弧をハンドルとして登録し、円弧については独立に変形を行った後、その境界上の法線を指定した。それ以外の領域については、 $H(H(p_i))=0$ として変形を行った。なお、この変形については、平均曲率の再計算を行っているのインタラクティブな変形はできていない。

4. まとめ

本研究では、曲面変形において、局所的に強い制約、弱い制約を付加的に与えることによって、デフォーメーションされる形状を制御できることを示した。また、制約が一次式で表現できる場合には、ハンドル頂点を連続的に移動させて形状変形を行うインタラクティブな操作が可能であることも確認した。一方で、インタラクティブな変形手法の限界についても確認した。

本研究においては、残された課題も多い。多様な幾何制約を指定したい場合には、インタラクティブ性が損なわれるという問題がある。実用性を考えると、平均曲率ベクトル等を適切に制御することによって、擬似的にでも設計制約を保持する方法について考えることが必要である。

本研究は、自動車のボデー設計に応用することを想定している。現実的な例題に基づい

て、設計拘束の保持とインタラクティブ性のバランスをどう確保するかについて検討することも必要であると考えている。

参考文献

- [1] M.I.G. Bloor and M.J. Wilson: Using Partial Differential Equations to Generate Free-Form Surfaces, *Computer-Aided Design*, 22(4), pp.202-212, 1990.
- [2] T.W. Sederberg and S.R. Parry: Free-Form Deformation of Solid Geometric Models", *Proc. of SIGGRAPH 86*, pp.151-160, 1986.
- [3] L. Kobbelt, S. Campagna, J. Vorsatz, H.-P. Seidel: Interactive Multi-Resolution Modeling on Arbitrary Meshes, *SIGGRAPH*, pp.105-114, 1998.
- [4] R. Schneider and L. Kobbelt: Geometric Fairing of Irregular Meshes for Free-Form Surface Design, *Computer Aided Geometric Design*, 18 (4), pp.359-379, 2001.
- [5] M. Botsch and L. Kobbelt: An Intuitive Framework for Real-Time Freeform Modeling, *ACM Transactions on Graphics*, 23(3), pp.630-634, 2004.
- [6] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder and AH Barr. Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds. In *Visualization and Mathematics III*, pp. 35-57, 2003.
- [7] O. Sorkine, Y. Lipman, D. Cohen-Or, M. Alexa, C. Rössl, H.-P. Seidel. Laplacian surface editing. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*, pp. 179-188, 2004.
- [8] Y. Yu, K. Zhou, D. Xu, X. Shi, H. Bao, B. Guo and H.-Y. Shum: Mesh Editing with Poisson-Based Gradient Field Manipulation, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 23, No. 3, pp.641-648, 2004.