

光線追跡法における空間統計学を用いた高精度なレンダリング

Yong-Hao Yue[†] 西田 友是[†]

近年写実的な 3DCG のレンダリングは広く利用されている。写実的レンダリングにおいては大域照明をシミュレーションすることは必要不可欠であり、その方法として、モンテカルロ積分に基づいて相互反射を考慮する光線追跡法によるレンダリングは広く利用されている。ただし、ノイズの気にならない結果画像を得るためには膨大な数のサンプリングが必要となり、計算時間は非常に長い。

そこで本稿では、空間統計学による推定法に基づいて、少ないサンプルから各ピクセルの輝度を推定し、精度と計算時間の双方において効率的にレンダリングできるようにする手法を提案する。

A High Accuracy Stochastic Ray Tracing Algorithm Using Geostatistics

YONG-HAO YUE[†] and TOMOYUKI NISHITA[†]

Recently, photo-realistic 3D computer graphics rendering is widely used. The calculation of global illumination is necessary to produce photo-realistic images. Stochastic ray tracing is one of the solution to the global illumination problem. It is, however, a very time consuming method since a large number of samples are needed to reduce noise to a visually acceptable level.

In this paper, we present a method using geostatistics. We use a new adaptive sampling scheme to estimate radiance for each pixel from fewer samples. Using our method, we can take advantages in both accuracy and rendering time.

1. はじめに

近年、3DCG のレンダリングは、建築物の照明シミュレーションや、バーチャルリアリティシステム、ゲームなどの広い範囲において利用されている。CG の普及とともに、写実的なレンダリングはますます必要とされ、その実現のため大域照明のシミュレーションは必要不可欠である。

大域照明の計算には、直接光の計算だけでなく、拡散面や光沢面による相互反射や、コースティクスなどの計算も含まれている。これらの計算を統一的に扱う手法として、モンテカルロ積分に基づく手法はきわめてシンプルな解法を与える。モンテカルロ積分に基づく手法の一つに、光線追跡法 (path tracing)¹⁾ がある。光線追跡法は Kajiya によりレンダリング方程式とともに導入された。これを拡張した手法として、双方向光線追跡法^{2),5)} が Lafortune らと Veach らにより、別々に導入された。

光線追跡法および双方向光線追跡法 (以下光線追跡

法と総称する) の利点は、あらゆる大域照明をシミュレーションでき、また実装も容易である点にある。しかしながら、レンダリング結果にはしばしばノイズが生じ、その除去のためには膨大な数のサンプリングが必要となる。このため、計算時間は非常に長い。

少ないサンプル数からノイズの少ない画像を生成するには、しばしば階層サンプリングやイメージフィルタリングが用いられる。本稿では、地球統計学⁶⁾ と呼ばれる空間統計学を 3DCG のレンダリングに応用する。

提案法を利用することにより、精度、計算時間ともに効率的なレンダリングを行うことができる。

本稿は、以下のように構成される。2 節で、提案法の概要を述べる。3 節で提案法で用いる、地球統計学に基づく推定法を概観し、4 節で提案法を具体的に述べる。5 節で提案法による結果を示し、精度、計算時間等に関する評価を行い、6 節に結論をまとめる。

2. 提案法の概要

空間統計学は、一つの補間のスキームを与える。図 1 に示すように、(a) を入力画像とし、そこから (b) のように二次元の Sobol 列⁴⁾ により 64 個の点を取ってサンプリングし、空間統計学により補間すると (c)

[†] 東京大学大学院情報理工学系研究科コンピュータ科学専攻
Department of Computer Science, Graduate School of
Information Science and Technology, The University of
Tokyo

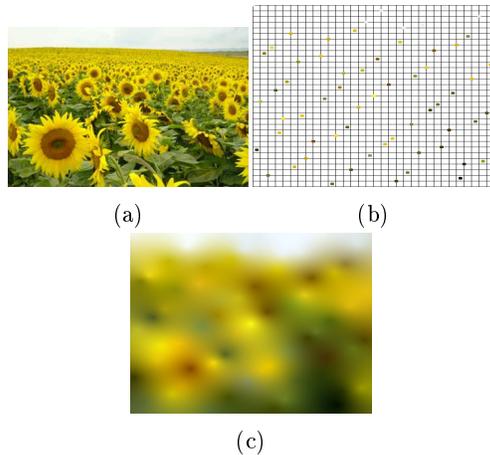


図 1 空間統計学による補間

の結果を得る。64 点というわずかなサンプリング数でありながら、入力画像に対して有効な近似を与えている。

我々の手法は、生成される画像の空間的連続性に着目し、このような補間をピクセル程度の大きさに対して行うことで、光線追跡法によるレンダリングにおいて生じてしまうノイズを除去する。このため、1 ピクセルごとに階層サンプリングをするのではなく、数ピクセル (4×4 ピクセル程度) の大きさの領域から階層サンプリングを開始し、この領域を次々に再分割し、サンプリングを繰り返していく。サンプリングにおいては、前の階層で推定した平均値を元に、残差を推定する。サンプリングの位置の決定には、Sobol 列を用いる。この列が領域を次々に四分分割する階層サンプリングに適していることは、4 節で示す。

最終的に得られるサブピクセルレベルの推定値に対して、空間統計学により補間を行い、結果画像を出力する。

3. 地球統計学に基づく推定法

地球統計学はもともと地質学調査において、地中埋蔵資源量をボーリング調査等をもとに推定するために開発された統計学である。地質学調査においては、地形等による影響で調査不可能地点があり、そのため対象領域を均一な密度で調査できないという問題がしばしば起こる。また、コスト等の問題から、調査におけるサンプリング数は多変量線形回帰法での計算に利用するには不十分である場合が多い。多変量線形回帰法においては、分散・共分散行列が非負定値であるという前提のもと計算が進められるが、欠損値の存在により、分散・共分散行列が非負定値でなくなるという問

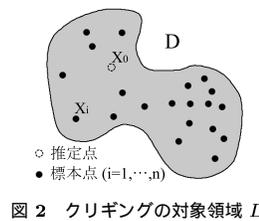


図 2 クリギングの対象領域 D

題が起こる。地球統計学は、これらの問題を克服するため、算術平均、多変量線形回帰法を拡張した手法であるといえる。

地球統計学では、対象領域内におけるサンプリングされた任意の二点間の非類似度と二点間の地理的距離との関係 (バリオグラムと呼ばれる) を分析し、その関係に基づいて、対象領域内の任意の位置における値を推定するクリギングと呼ばれるスキームを与える。クリギングには様々な目的に応じた方法があり、本稿に関連するいくつかの手法を概観する。

3.1 単純型クリギング

単純型クリギングは、多変量回帰を空間的な問題に拡張させたものである。分散・共分散を用いた多変量回帰においては、標本値の欠損によって代数上の問題が生じるが、このことは Multivariate Geostatistics⁶⁾ で議論されており、その詳細は本研究とは直接関係ないため割愛する。

クリギングは、図 2 のように対象領域 D が与えられていて、領域内の各点 x における確率場 $Z(x)$ が存在することを仮定する。そのもとで、 n 個の点 $x_i (i = 1, \dots, n)$ において値が既知であるとき、領域内の任意の点 x_0 における値を推定する手法である。

その中で、単純型クリギングは対象領域内に以下の仮定をおき、推定を行う。

- 期待値が場所によらない。すなわち、 $E[Z(x+h)] = E[Z(x)]$.
- 二点間の共分散は、二点間の距離に応じて定まる。すなわち、 $Cov[(Z(x), Z(x+h))] = C(h)$.

ただし、 h は任意のベクトルであり、 $C(h)$ は、共分散関数であり、球型モデル、指数モデル等、様々なモデルがあり、これらは文献⁶⁾ で述べられている。このように、単純型クリギングは、先験的に与えられた参照値 m からの残差 (residual) を推定するのに用いられる手法である。点 x_0 における推定値を

$$Z^*(x_0) = m + \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} (Z(x_{\alpha}) - m) \quad (1)$$

として求めることを考える。ただし、

$$\sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} = 1 \quad (2)$$

を仮定する。この仮定はバイアスのかからない推定 (x_0 における推定値と真値との差の期待値が 0) のために必要となる。

このとき、単純型クリギングでは w_{α} を定めるために、推定分散 σ_E^2 (式 (3)) を考える。

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 = & \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n w_{\alpha} w_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) \\ & + C(x_0 - x_0) - 2 \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} C(x_{\alpha} - x_0) \quad (3) \end{aligned}$$

推定分散 σ_E^2 を最小化することにより、式 (4) のような線形連立方程式を得ることができ、これより w_{α} が決定できる。

$$\sum_{\beta=1}^n w_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) = C(x_{\alpha} - x_0) \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (4)$$

3.2 平均値のクリギング推定

単純型クリギングは、既知の平均値を仮定したが、空間統計学では、平均値を推定することもできる。一般に一つの空間領域から標本をいくつか抽出する場合、それらのデータ間で相関があるのが普通であり、距離が近いほど強い相関となることが多い。平均値のクリギング推定はこのことに着目し、算術平均を拡張した空間統計学の推定法である。

平均値のクリギング推定では、推定値 M^* を標本値の加重平均 (式 (5)) で表すことを考え、領域全体で平均値 m が存在することを仮定する。

$$M^* = \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} Z(x_{\alpha}) \quad (5)$$

このとき、推定誤差の平均を 0 にする ($E[M^* - m] = 0$) 考えると、単純型クリギングの場合と同様に、式 (2) の制約を得る。また、このときの推定分散は、

$$\text{var}(M^* - m) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n w_{\alpha} w_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) \quad (6)$$

で与えられ、式 (2) の条件の下で、式 (6) を最小化することを考えることで、 w_{α} を求める。ラグランジュ法により、以下のような線形連立方程式を得る。

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n w_{\beta} C(x_{\alpha} - x_{\beta}) - \mu = 0 \\ \sum_{\beta=1}^n w_{\beta} = 1 \end{cases} \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (7)$$

ただし、 μ はラグランジュ乗数であり、平均値のクリ

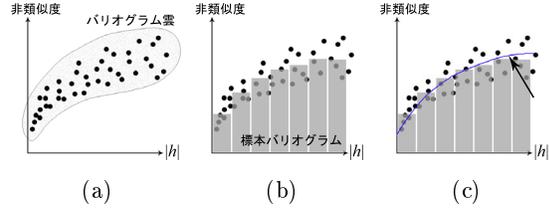


図 3 バリオグラム

ギング推定を行なった場合の推定分散は μ となる。これを解くことにより、平均値を推定することができる。

3.3 通常型クリギング

通常型クリギングは、領域 D 内の任意の点における推定値を与えるスキームである。通常型クリギングでは、共分散関数 $C(h)$ (3.1 節参照) のかわりにバリオグラム $\gamma(h)$ という考え方をを用いる。

バリオグラムとは、空間内における距離と非類似度の関係を示したものである。抽出された標本について、任意の二点 x_{α}, x_{β} について、二点間の距離 $|h| = \|x_{\alpha} - x_{\beta}\|$ および、非類似度 $\gamma(x_{\alpha} - x_{\beta}) = \frac{\|Z(x_{\alpha}) - Z(x_{\beta})\|}{2}$ をプロットしたものをバリオグラム雲 (図 3 (a)) と呼ぶ。距離 $|h|$ を k 個の階級に分け、それぞれの階級 h_k に属するバリオグラム雲のデータを平均してプロットしたものを標本バリオグラム (図 3 (b)) と呼ぶ。標本バリオグラムを何らかの関数モデルでフィッティングしたものを理論バリオグラム (図 3 (c)) と呼ぶ。理論バリオグラムのフィッティングにおいては、標本バリオグラムとの厳密な適合はさほど重要ではなく、原点附近における挙動 (特に不連続性) や、距離が大きい範囲での非類似度の変化の挙動をいかに再現できるかが重要である。

通常型クリギングでは、領域 D 内における標本からバリオグラムを構築した後、点 x_0 における値を、すでに求めた標本における値の加重平均で表す (式 (8)) ことを考える。

$$Z^*(x_0) = \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} Z(x_{\alpha}) \quad (8)$$

推定誤差の平均を 0 にすることを考えると、式 (2) の制約を得る。このときの推定分散は、

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 = & -\gamma(x_0 - x_0) - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n w_{\alpha} w_{\beta} \gamma(x_{\alpha} - x_{\beta}) \\ & + 2 \sum_{\alpha=1}^n w_{\alpha} \gamma(x_{\alpha} - x_0) \quad (9) \end{aligned}$$

で与えられ、式 (2) の条件の下で、式 (9) を最小化することを考え、ラグランジュ法によりこれを解くと、以下に示す線形連立方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & \cdots & \gamma(x_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(x_n - x_1) & \cdots & \gamma(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ \gamma(x_n - x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

ただし、 μ はラグランジュ乗数である。この方程式を解くことにより、領域 D 内の任意の点における値を推定できる。その際の推定分散は μ となる。

$\gamma(0) = 0$ として行われる通常型クリギングは、厳密な補間法となっている。これは、あらかじめサンプルされた標本点 x_α における推定値 $Z^*(x_\alpha)$ は、 $Z^*(x_\alpha) = Z(x_\alpha)$ というように、標本値と一致することを意味する。

通常型クリギングを光路追跡法へ応用することを考える。このとき、標本点は、光路追跡法における光線とイメージプレーンの交点にあたり、推定を行う点は、イメージプレーン上の各ピクセルに相当する。ただし、次に示す問題があるため、通常型クリギングをそのまま適用することはできない。

光路追跡法によるレンダリングでは、間接光の推定をそれぞれ一本の光線による計算によって近似する。これは、分岐による光線の爆発的な増加を抑えるためであるが、その反面、各光路によって推定された値には誤差が含まれる。

通常型クリギングにおいては、推定誤差を既知のものとして与えることで、誤差を考慮する推定を行うことができる。誤差を含む通常型クリギングの推定システムは、式 (10) の方程式を拡張して、式 (11) のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \gamma(x_1 - x_1) + \sigma_1^2 & \cdots & \gamma(x_1 - x_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(x_n - x_1) & \cdots & \gamma(x_n - x_n) + \sigma_n^2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ \gamma(x_n - x_0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

そこで、式 (11) により決定される w_α を用いて各ピクセルの値を推定する。

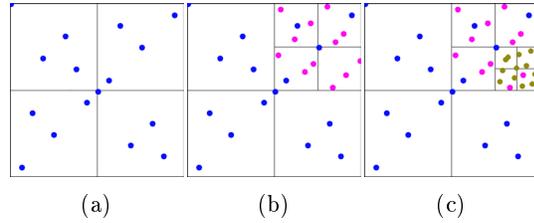


図 4 Sobol 列の分布

4. 提案法

この節では、実際に空間統計学をいかに光線追跡法に応用するかを述べる。我々のサンプリングスキームでは、はじめに階層サンプリングを行い、次に空間統計学による補間を行う。

- 階層サンプリング: 階層サンプリングでは、モンテカルロ積分計算の収束に必要な推定値を得るとともに、各領域での補間を行うための統計的データ (光線追跡法の推定誤差の推定、空間の理論バリオグラムの推定) の収集を行うのが目的である。
- 空間統計学による補間: 空間統計学による補間では、階層サンプリングで得られた既知のデータをもとに、空間統計学に基づいて各領域において推定を行い、ノイズを除去する。

なお、サンプリング位置の決定には、Sobol 列⁴⁾を用いる。この列は領域を次々に四分分割する階層サンプリングに極めて適している。

4.1 Sobol 列の階層サンプリングへの応用

Sobol 列は、Low Discrepancy Sequences³⁾ の一種であり、モンテカルロ積分による数値積分において、優れた収束性を示す点群である。 n 次元の Sobol 列は、区間 $[0, 1]^n$ において、一様に分布し、必要に応じて点群の個数をアダプティブに増やすことができる。2次元の Sobol 列は、四分分割において優れた特性を示す。図 4 に示すように、区間 $[0, 1]^2$ に $4n$ 個の点を取ると、これらの点は四つの小領域に n 個ずつ分布する。さらに、これらの小領域について点をアダプティブに取り、 $4n$ 個になるようにすると、小領域内の四つの小領域に点が n 個ずつ分布する。この性質は、任意の深さの小領域について成立し、階層サンプリングへの応用を容易にする優れたものである。

4.2 階層サンプリング

イメージプレーン全体を 4×4 ピクセル程度の大きさの領域 D_i に分割する。局所的空間連続性を考慮に入れるため、階層サンプリングをピクセル単位に行うのではなく、これらの領域からはじめる。まず、この区間内に $4n$ 個のサンプリング点 ($n = 4$ とした) を

取り、それらの点でサンプリングを行い、領域内の四つの小領域について平均値を求める。次に、各小領域について再帰的に新たに $3n$ 個のサンプリング点を取り、同様にサンプリングを行い、各小領域の四つの小領域で残差の平均値を求める。これを、小領域の大きさが 4×4 ピクセル程度の大きさとなるまで繰り返す。

以下により詳細に述べる。近似推定を行なうある小領域を C とする。 C の四つの小領域を C_0, \dots, C_3 とする。領域 C 内には、一つ上の階層までにサンプリングされた n 個の点がある。また、一つ上の階層における近似推定において、領域 C の、平均値 $m(C)$ が推定されている。このとき、小領域 C に対する近似推定は次のようになる。まず、領域 C 内に点を $3n$ 個アダプティブに取り、それらの点で光線追跡法により輝度を推定する。次に、領域 C 内の残差の推定分散および、小領域 C_0, \dots, C_3 における平均を求める。領域 C 内の残差の推定分散は、領域 C 内の $4n$ 個の点における輝度と $m(C)$ との差の分散 ($\sigma_E^2 = E(x_\alpha^2) - \{E(x_\alpha)\}^2$) によって求められる。 $4n$ 個の点を小領域 C_0, \dots, C_3 に割り当てると、ちょうど各小領域に n 個ずつ点が存在して、それら n 個の点の算術平均を求めることにより、小領域 C_0, \dots, C_3 での平均値が推定される。

次にバリオグラムおよび、推定分散を求めることを考える。各領域 D_i に対し、含まれるサンプリング点からバリオグラム雲をプロットして標本バリオグラムを求め、安定型モデルによって理論バリオグラムを構成する。また、残差の推定分散をこれらの領域に対して求め、これらの領域全体における推定分散の平均を、光線追跡法における誤差の推定分散とみなす。

ただし、安定型モデルによる理論バリオグラムは、

$$\gamma(h) = 1 - b \exp\left(-\frac{|h|^\alpha}{a}\right) (0 \leq \alpha \leq 2) \quad (12)$$

で与えられ、 a, b, α を標本バリオグラムを基に推定する。

4.3 空間統計学による補間

空間統計学による補間では、階層サンプリングにおいて求められたバリオグラムや推定分散をもとに、各局所的な領域においてサンプリングされたデータをもとに、各ピクセルにおける輝度を通常型クリギングにより補間する。

ただし、その際の計算時間は問題となる。通常型クリギングを行なう際の式 (11) の行列は各領域内では不変であるから、これの逆行列は予め求めておくことができる。ただし、それでも領域内の補間を行う各点での重み係数 w_α を求めるのに $O(n^2)$ (n は補間の推定に用いる点の数) の計算量がかかる。この計算は、



図 5 光線追跡法による結果画像



図 6 提案法による結果画像

全ピクセルにおいて行われるので、大きな n を選ぶと計算時間は実用的でなくなる。

そこで我々は、1 ピクセルを 16 分割したサブピクセルにおいて、算術平均による平均の推定値を求めておき、それらの推定値から 4×4 ピクセルの領域の各ピクセルにおける平均値を空間統計学により推定した。

また、より効率的にノイズを除去するため、我々は 3.3 節で示した $|h|$ をイメージプレーンにおける空間的距離と推定値の色空間における距離からなる複合的距離として扱う。 4×4 ピクセル領域全体における平均値を算術平均により推定し、この平均値と各推定値との差を h に含める。色空間における距離もあわせて考慮することにより、領域内に極わずかに存在する特異値 (一つだけ飛びぬけて異なる値) によるノイズを除去できる。

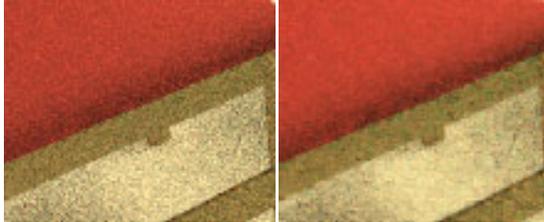
5. 結 果

約 70,000 ポリゴンからなる室内シーンを大域照明を考慮して光路追跡法によってレンダリングして結果を図 5 に示す。レンダリングには、256 サンプル/画素のスーパーサンプリングを行い、レンダリング時間は 20 分であった。提案法により、同じ時間でレンダリングした画像を図 6 に示す。この二つの図を比較すると、提案法を用いた場合には同じ時間でも、より精度の高い結果を得られていることがわかる。

光線追跡法の結果にガウシアンフィルタを適用した

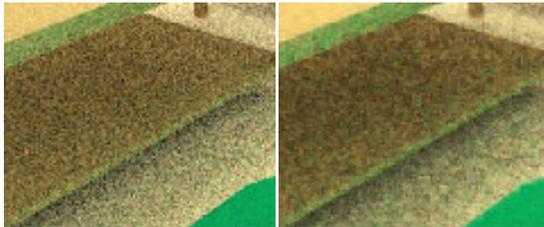


図 7 光線追跡法 + ガウシアンフィルタ (1 ピクセルカーネル)



(光線追跡法)

(提案法)



(光線追跡法)

(提案法)

図 8 詳細の比較

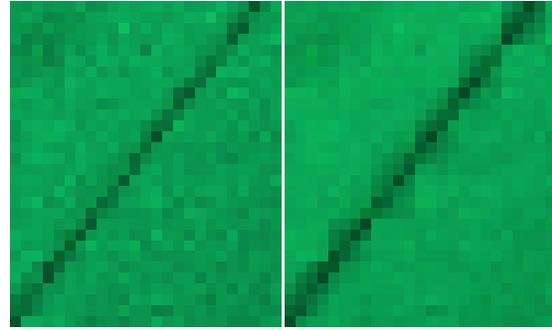
画像を図 7 に示す。これを図 6 と比較すると、ガウシアンフィルタによる画像は、エッジも含めて画像全体がぼけているのに対し、提案法による結果はエッジを保存しつつ、ノイズ成分をうまく除去しているといえる。

図 8 に詳細を拡大したレンダリング結果を比較する。これからも、提案法はエッジを保存しつつ、ノイズ成分をうまく除去していることがわかる。

ただし、 4×4 ピクセルの領域ごとに補間を行っているため、図 9 に示すように、とところどころ領域の境界でエリアシングが発生している。

6. ま と め

我々は本稿において、空間統計学を利用した光線追跡法における階層サンプリング法を提案した。提案法を用いることにより、ノイズを効率よく除去でき、高精度なレンダリングが可能となる。また、提案法による補間は、エッジをうまく保存することができ、この点は 5 節で示したように、単にガウシアンフィルタ



(光線追跡法)

(提案法)

図 9 境界におけるエリアシングの比較

を適用するよりも優れている。ただし、領域の境界におけるエリアシングや、空間統計学による推定の計算時間による領域の大きさに関する制約は問題となっている。

本研究はまだ基礎的な段階にあり、今後他の既存手法との比較やさらなる効率化が課題となる。

参 考 文 献

- 1) James T. Kajiya. The rendering equation. In *Proc. SIGGRAPH '86*, pages 143–150. ACM Press, 1986.
- 2) Eric P. Lafortune and Yves D. Willems. Bidirectional Path Tracing. In H.P. Santo, editor, *Proc. Third International Conference on Computational Graphics and Visualization Techniques (Compugraphics '93)*, pages 145–153, Alvor, Portugal, 1993.
- 3) Harald Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1992.
- 4) I.M. SOBOL. On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. In *USSR. Computational Mathematics and Mathematical Physics 7(4)*, pages 86–112, 1967.
- 5) Eric Veach and Leonidas J. Guibas. Bidirectional estimators for light transport. In *Proc. Eurographics Rendering Workshop 1994*, pages 147–162, Dramstadt, Germany, 1994.
- 6) H. Wackernagel. *Multivariate Geostatistics*. Springer-Verlag, 2003.