

粒子法を用いた物性に基づく 安定な多流体モデル

阪本 重隆 ヘンリー・ジョハン 高橋 成雄 西田 友是

東京大学 大学院新領域創成科学研究科 複雑理工学専攻

近年、コンピュータグラフィックスの分野において、異なる流体の相互作用のシミュレーションが重要な課題になっている。しかし、従来の粒子法による多流体の解法は不安定であり、水中の気泡の振る舞いなどの複雑な現象のシミュレーションの場合、タイムステップを非常に小さくする必要があった。これに対し、大きなタイムステップでも力を逐次的に加える手続きを用いることで各粒子位置の更新を可能にした手法が提案されているが、この手法では1流体しか扱うことができない。そこで本報告では、この手法を拡張することにより多流体の振る舞いを安定に処理するモデルを提案する。このモデルは、各流体に相互作用を表す仮想的な力を導入することにより、各々の流体に本来あるべき表面張力を働かせ、その界面を形成することで実現される。また、可視化の際に必要な、複数流体間の境界面の抽出についても言及する。

Physically-Based Stable Multiple Fluids Model using Particles

SHIGETAKA SAKAMOTO HENRY JOHAN SHIGEO TAKAHASHI TOMOYUKI NISHITA

Department of Complexity Science and Engineering, Graduate School of Frontier Sciences,
The University of Tokyo

Simulating interactions between multiple types of fluids has recently received more attention in the field of computer graphics. However, this remains difficult because conventional particle-based methods still suffer from unstable computation, and thus requires rather small time steps for visualizing complicated phenomena such as air bubbles in water. On the other hand, an excellent method has been proposed that successively updates the position of each particle by adding forces with relatively large step sizes while it is limited to the simulation of single type of fluid. In this report, we extend this method to develop a new model that can simulate the interactions between multiple types of fluids. The model is achieved by introducing an artificial force as intrinsic surface tension to simulate the interactions between multiple types of fluids. The extraction of isosurfaces that separate different types of fluids is also considered to visualize the simulated results.

1. はじめに

コンピュータグラフィックスの分野において、流体シミュレーションでの安定な解法と可視化に関する研究が盛んに行われている。従来、流体シミュレーションの多くは、空間中のグリッド状の離散サンプルの振る舞いを記述するオイラー法によりなされてきた。しかし、一方では空間中の計算点が自由に移動するラグランジュ法(または粒子法)を用いた流体の振る舞いを記述するものも多く提案されてきている。また近年では、複数の異なる流体の相互作用のシミュレーションが重要な課題となっており、オイラー法、ラグランジュ法ともに多流体を扱うことのできるモデルが

提案されてきている。しかし、従来の粒子法による多流体の解法は不安定であり、シミュレーションにおけるタイムステップを非常に小さくする必要があり、そこで本報告では、多流体の振る舞いを大きなタイムステップでも安定に処理することの出来るモデルを提案する。このモデルの特筆すべき貢献は、各流体に相互作用を表す仮想的な力を導入することにより、各々流体に本来あるべき表面張力を働かせ、その界面を形成できることにある。また、シミュレーション結果から得られる個々の流体のボリュームデータから、複数の異なる流体間の境界面を一貫性を保った状態で抽出する手法についても述べる。

2. 関連研究

本節では、シミュレーションと面の抽出に関する関連研究について述べる。

2.1 シミュレーション

流体のシミュレーションは、先に述べたとおり一般的にオイラー法とラグランジュ法の 2 つに分類される。

2.1.1 オイラー法

Foster らは、流体のシミュレーションにおいて初めてオイラー法を用い、3次元の Navier-Stokes 方程式を解くことで、流体の挙動を再現した [11][12]。Stam は、Navier-Stokes 方程式中の移流項の計算に Semi-Lagrangian advection scheme を用い、タイムステップを大きくとった場合でも安定な解が得られることを提唱した [6]。また、Foster らは、それらの手法を拡張した Level-Set 法を用いて、流体(液体)表面の挙動をなめらかに追跡した [10]。Enright らは、Foster らの手法を改良した Particle Level-Set 法により、流体の表面付近に粒子を追加し、より正確な液面形状を再現した [13]。水野らは、火山噴煙のダイナミクスを空気とマグマによる 2 流体モデルを用いて再現した [19]。さらに Hong らは、流体間の境界近傍における各流体の振る舞いを Ghost Value (仮想的な値)を用いて計算するモデルを提案している [4]。しかしこれらのオイラー法では、Navier-Stokes 方程式中の移流項に起因する数値拡散が生じてしまうことや、流体の分裂や合体が生じるような大きなトポロジーの変化を伴うような界面の変形には特別なアルゴリズムが必要となり、多流体の正確なシミュレーションを行う手法としては拡張性に欠ける。

2.1.2 ラグランジュ法

Desbrun らは CG の分野において大変形を伴うような物体に対し粒子法である SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) 法を適用した [7]。SPH 法はもともと圧縮性流体の数値解析法として、惑星や星の分裂や衝突といった宇宙物理学の問題に適用されるために Lusy [8] や Gingold ら [9] によって発展させられてきた手法である。また、Muller らは SPH 法 [1] を、Premoze ら [5] は Koshizuka らが提案した MPS (Moving Particle Semi-implicit) 法 [14] を用いて、流体の振る舞いを記述している。しかし、これらの手法では 1 流体しか扱うことができないため、複数流体を扱うには何かしらの拡張を施す必要があった。そこで Muller らは、color value を流体を区別する指標として用いることで、2 流体間の相互作用を表面張力を用いて記述するモデルを提案した [3]。ただし、このモデルではシミュレーションにおけるタイムステップを

非常に細かく取らなければならないことに加え、流体の振る舞いが拡散係数などの各パラメータに非常に敏感なために、これらのパラメータを適切に設定できないなどの問題があった。また、Clavet らは Prediction-relaxation scheme と称した陰的な手続きにより、タイムステップに関わらず、安定かつ頑健なモデルを提案している [2]。ただしこのモデルでは 2 流体、またはそれ以上の複数流体を扱うモデルは提案されておらず、複数流体を扱うには新たなモデルを導入する必要がある。

2.2 面の抽出

多流体から形成されるボリュームデータはマルチスカラフィールドと考えることができ、可視化のためにはここから等値面を抽出する手法がいくつか提案されている。Bischoff ら [18] は、マルチスカラフィールドから生まれる特異点を削除し、Botsch ら [17] のメッシュ単純化手法を用いて境界面を構築している。この手法自体は簡潔であるが、境界面メッシュとしてボリュームセルに沿った角ばった形状として一度構築し、その後単純化を施す 2 段階のステップを踏む必要がある。Hege らは Marching cubes 法における個々のボリュームセルの等値面生成パターンをマルチスカラフィールドに対応させるべく拡張した [15]。しかし、流体の種類が増えるに従い等値面生成パターンが爆発的に増えてしまうため、流体の種類がある程度限定されてしまう。Muller ら [16] は与えられた $d(i=0,1,\dots,N)$ 次元空間を d 次元単体に分割し、その後各頂点に割り振られた指標によって各単体の分割の仕方を決定している。Muller らはこの手法を障害物を避けるロボットのパス作成に用いているが、後で述べるとおり、我々は各単体の頂点に流体の指標を割り振ることで、流体間の正確な境界面の抽出に応用している。

3. 従来法の概要

本節では Clavet ら [2] で提案した手法である Prediction-relaxation scheme と、そのスキームにおいて圧力計算で用いられる Double density relaxation の概要について述べる。本提案法ではこれらの手法を拡張することで、多流体の振る舞いを計算するモデルを構築していく。

3.1 Prediction-Relaxation Scheme

この手法は、重力などの外力によって予め計算しておいた各粒子速度から、次のタイムステップでの粒子位置を予測し、様々な力を順次計算し、粒子位置が逐次的に更新されることで最終的な粒子位置を計算する。この手法の特徴としてはあらゆる力を逐次的に粒子の位置に反映させており、様々な力を同時に反映させる直接的な従来の SPH 法などに比べ、非常に安定であり、流体の大

変形にも順応に適応することができる。この手法は逐次的に計算していく、オイラー法における Semi-Lagrangian advection scheme[6]に類似している。図 1 は概略図である。まず、1 ステップ目において、重力、粘性により生じる力を用いてステップ 2 での粒子の位置を予測する。最後に Double Density Relaxation を用いて粒子の位置を調節している。ステップ 3 はステップ 1 と同様である。

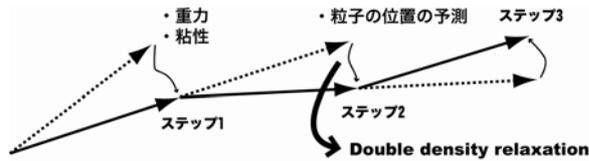


図 1: Prediction-relaxation scheme の概念図

3.2 Double Density Relaxation

圧力項の計算は、流体の振る舞いに大きな影響を及ぼすため、様々な工夫がなされてきた。[2]で提案された Double density relaxation と称されるモデルにおいては、シミュレーション空間に配置された各粒子の近傍密度が 2 種類のカーネル $(1-r_{ij}/h)^2$, $(1-r_{ij}/h)^3$ を用いてそれぞれ ρ_i , ρ_i^{near} の 2 段階として見積もられ、各粒子にかかる圧力も同様に 2 段階に計算される。ここで、 r_{ij} は各粒子間の距離、 h は与えられたカーネル半径であり、カーネル中心に位置する粒子のインデックスを i 、粒子 i 以外のカーネル内の粒子のインデックスを j とする。 ρ_i からは収束密度 ρ_0 (rest-density) に落ち着くような力(以下、pseudo-pressure)を働かせ、 ρ_i^{near} からは、カーネル中心に粒子が集中することを避けるための力(以下、near-pressure)を作用させている。このように 2 段階のステップを踏むことで、本来複雑な計算が必要となる表面張力を考慮に入れた力を再現している。そしてこれらの力を直接、次のタイムステップでの予測された粒子の位置に作用させる。粒子 j にはこの力の半分を作用させ、粒子 i には、粒子 j に作用させた力の和を作用させる。

4. 提案法

本節では前節で述べた手法を基に、複数流体を扱うための拡張について述べる。これらは以下の様なステップを踏んで行われる。

1. 各流体の Double density relaxation 処理
 2. 界面張力を働かせるための力の導入
- また、流体固有の粘性係数も考慮し、粘性差が激しい流体間においても自然なシミュレーションを行う手法についても述べる。

4.1 多流体における Double Density Relaxation

多流体においては、流体ごとに物性を持っていることを考慮すべきである。これには、収束密度、表面張力などを流体ごとに反映させることが必要である。ここで、収束密度とは流体固有の値であり、その流体が平衡状態になったときの密度に対応する。いま、近傍密度を各々指標(label)付けされた流体ごとに ρ_i^{label} とし、その和を ρ_i とする(図 2 参照)。

$$\rho_i^{label} = \sum_{j \in N(i)} (1-r_{ij}/h)^2 \quad (1)$$

$$\rho_i = \sum_{label \in L(i)} \rho_i^{label} \quad (2)$$

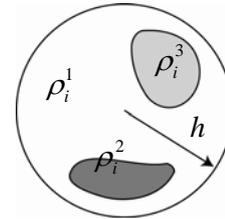


図 2: 各々流体での密度の見積もり

ここで、 $L(i)$ は粒子 i のカーネル内の label の集合、 $N(i)$ は粒子 i のカーネル内の粒子の集合である。これによって見積もられた粒子密度を用いて各粒子に加わる圧力を求める。これには Desbrun らによって提案された理想気体の状態方程式を拡張した式を用いる[7]。この式は収束密度と各粒子密度の差に基づいており、多流体においては各カーネル内にある粒子の割合に基づいて収束密度を決定する必要がある(式(3)参照)。これは流体固有の収束密度 ρ_0^{label} を用いて計算される。また、この圧力項は表面張力を表す力も包含しているため、各流体の物性に基づき異なる係数 $k_{tension}$ を付加する。また、もう一つのカーネルに対応する near-pressure にも同様に係数 $k_{tension}$ を付加する(式(4)参照)。

$$P_i = k_{tension} k \left(\rho_i - \sum_{label \in N(i)} \frac{\rho_i^{label} \rho_0^{label}}{\rho_i} \right) \quad (3)$$

$$P_i^{near} = k_{tension} k^{near} \rho_i^{near} \quad (4)$$

ここで、 k , k^{near} はそれぞれ、pseudo-pressure, near-pressure の大きさを調節する係数であり、これらは経験的に決定される。この措置により、各流体固有の物性に基づいた表面張力が再現できる。また、重力も各流体における収束密度に正比例する形で定義できる。

4.2 界面張力を働かせるための力の導入

無極性溶媒と極性溶媒など、各流体同士が反発するような条件があった場合、その界面では互い

が分離されるような力が働いているように見える。しかし、実際には互いに接触する表面をできる限り小さくしようとする力、つまり界面張力が働いている。ただし、Clavet らが提案する手法では表面張力を表す力が圧力項の計算に包含されている。ここではその表面張力を異なる流体ごとに働かせるために、流体に割り振られた指標に基づき、以下のように異なる流体を分離するような力を導入する。

$$\mathbf{I}_i = k_{interface} \text{sign}(label)(1 - r_{ij}/h)\mathbf{n}_{i \rightarrow j} dt \quad (5)$$

$$\text{sign}(label) = \begin{cases} + & \text{if } 2 \text{ つの粒子のラベルが同一の場合} \\ - & \text{if } 2 \text{ つの粒子のラベルが異なる場合} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{n}_{i \rightarrow j}$ は粒子 i から粒子 j への単位ベクトル、 dt はタイムステップ幅、 $k_{Interface}$ は流体間の相互作用の大きさを調節する係数であり、ユーザーにより、任意に決定される。また、我々は Muller ら[3]は流体間の相互作用力を表す際に用いたカーネルに基づき、線形カーネルを用いることで界面張力を自然に再現することができた。ここで求められた速度ベクトル \mathbf{I}_i は、粒子 i と粒子 j に二分され、それぞれさまざま力の計算の際に逐次的に加えられ、陰的な計算処理が行われる。図 3 にその概略図を示す。この手続きは Prediction-relaxation scheme において、Double density relaxation より前のステップで計算され、計算の安定性をさらに保持できるようにしている。

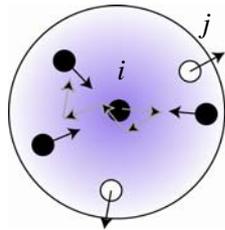


図 3: 速度ベクトルの割り振り

(カーネル中心の粒子(黒色)から見て同じ指標 (label) であれば引力、それ以外は斥力を働かせる)

4.3 粘性の多流体への拡張

多流体においては、各々流体の粘性も異なるため、それを考慮することで、より正確な流体の振る舞いが再現できる。特に、液体と気体の様に大きく粘性の異なる場合には、流体ごとの粘性の違いの効果がシミュレーション結果にも顕著に現れる。式(7)は、Clavet ら[2]が提案する式に各流体固有の粘性係数を加えたものである。各流体間の境界面における粘性係数はこれらの速度ベクトルも相互作用力と同様に粒子 i と粒子 j に加

えられる。

$$\mathbf{I}_i = \left(\frac{\alpha_i + \alpha_j}{2} \mathbf{u} + \frac{\beta_i + \beta_j}{2} \mathbf{u}^2 \right) (1 - r_{ij}/h)\mathbf{n}_{i \rightarrow j} dt \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{n}_{i \rightarrow j} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ はそれぞれ各粒子の速度であり、 $\alpha_i, \alpha_j, \beta_i, \beta_j$ は各々流体固有の粘性係数である。 α は高粘性流体の振る舞いを再現するために用いられ、 β は低粘性流体における相互貫入を避けるために用いられる。また、Clavet ら[2]の手法に従い、粒子が加速するのを避けるため $u > 0$ のときにのみ式(7)は計算される。

5. 面の抽出

多流体から形成されるボリュームデータは各指標付けされた流体の密度の和で形成されたマルチスカラーボリュームデータである。ここから全ての面を的確に抽出するには、それぞれの流体の密度値を別個に扱い Marching cubes 法を施してしまうと、本来全体として一致すべき境界面が適切に再現できない(図 4 参照)。これは流体ごとに異なる密度値を持っているために、閾値によっては各々の流体間の境界面が重なってしまったり(図 4 中の閾値 2 における流体 1 と流体 2)、もしくは離れてしまったりする現象が起きてしまう(図 4 中の閾値 1 における流体 1 と流体 3 など)。そこで本報告では、モーションプランニングで用いられてきた Muller らの手法[16]を、多流体同士の境界面生成に適応させるべく拡張を行う。

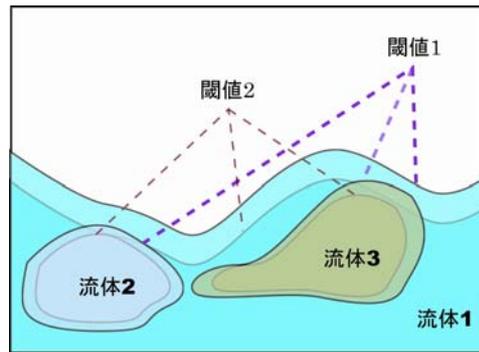


図 4: 閾値によって境界面の交差が起きてしまう例

5.1 単体への分割

今、与えられた $d (i = 0, 1, \dots, N)$ 次元のマルチスカラーボリュームデータをグリッド状にサンプリングする。そしてサンプル点が構成する d 次元の超立方体を、それぞれ $d-1$ 頂点を持つ単体 $d!$ 個に分割することを考える。図 5 に 3 次元での分割の仕方を示す。

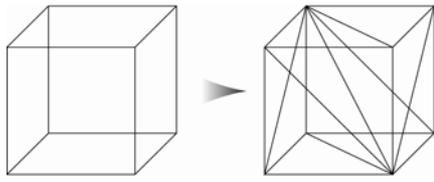


図 5: 3次元での超立方体の分割

5.2 マルチスカラボリュームデータからの指標の抽出

各々の粒子の密度から超立方体への濃度関数 f は Clavet ら[2]が提案している式(9)を用いる.

$$f(\mathbf{x}) = \left(\sum_j (1-r/h)^2 \right)^{1/2} \quad (9)$$

ここで, $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|$ であり, \mathbf{x} , \mathbf{x}_j はそれぞれ空間をグリッド上にサンプリングされることで得られる単体の頂点位置, そして j 番目の粒子の位置を示す. 今, 与えられたマルチスカラボリュームデータは各々指標づけされた流体 i の密度 D_i の和によってなっており, このままでは Muller らの手法[16]を用いてパッチを形成することができない. そこで式(10)のように各単体の頂点に割り振られる指標を1つのみに制限する.

$$label(\mathbf{x}) := \arg \max_i \{D_i | i \in L(\mathbf{x})\} \quad (10)$$

$$label(\mathbf{x}) := 0 \quad \text{if} \quad \sum_{i=1}^N D_i < threshold \quad (11)$$

ここで, $L(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} における流体の指標の集合であり, $label(\mathbf{x})$ は各単体の頂点に割り振られる指標である. つまり, 式(10)では各々の流体の密度を比較し, 一番密度の高い流体に対応する指標を振り, その後異なる指標をもつ格子サンプル間に境界面を定義していく. また, 式(11)はノイズの影響を除去し, 流体表面を滑らかにするための措置でもある. ここで式(11)中の *threshold* はユーザーから与えられる任意の閾値であり, この閾値が流体表面となる.

5.3 各指標からの面の生成

Muller ら[16]は単体の各々頂点に割り振られた指標から図 6 のような面の形成パターンを導出している. また, 生成される同位相類は僅か 5 パターンに帰着される. 全てのケースはこれらの回転, 鏡像変換によって復元できるため, これらのパターンをルックアップテーブルとして格納しておくことで効率的に境界面を形成することができる.

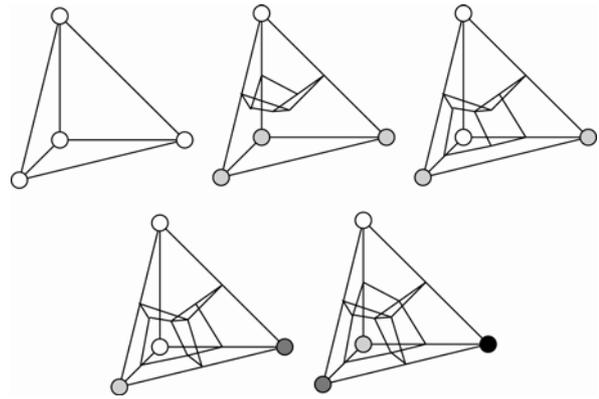


図 6: 3次元での単体における面の生成パターン (頂点色が同一であることは各指標が同一であることを示している)

6. 結果

図 7 は従来の SPH 法による 2 流体シミュレーション[3]と, 本提案法により, 従来法の 4 倍のタイムステップを用いて密度差のある 2 流体をシミュレートした結果である. 図 7 から, 大きなタイムステップを用いたにも関わらず, 流体ごとの自然な表面張力を再現できていることが分かる. 計算には, CPU:Pentium 4 3.0GHz CPU, 1GB RAM を用いた. また, 多流体のレンダリングは 3 次元空間を単体に分割することで行った. 各流体の指標を, 各単体の頂点に割り振り, 各流体の境界面を正確に抽出した. 表示には, GPU: GeForce 7800GTX を用いた. 図 8 に本提案法を用いて 3 流体をシミュレートした結果を示す.

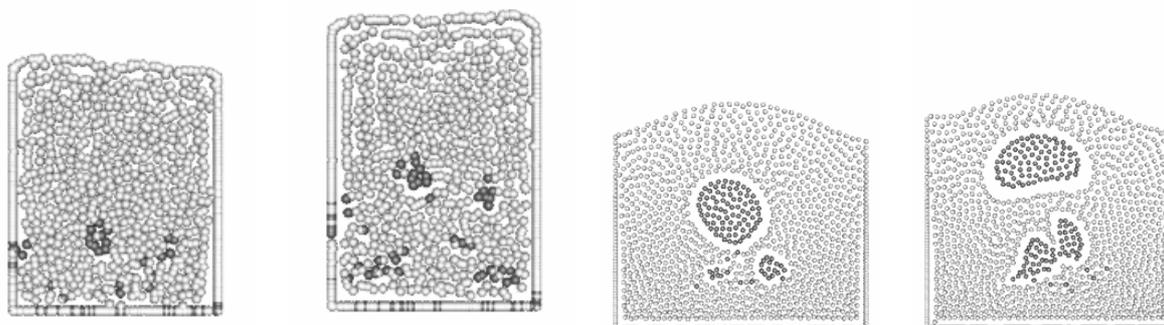
7. まとめと今後の課題

本報告では多流体における頑健なモデルとその可視化手法を提案した. このモデルでは各々流体に本来あるべき表面張力を仮想的に働かせることで, 界面を形成するような多流体を扱うことが可能である. また, シミュレーションの計算過程において逐次的なステップを踏む Prediction-relaxation scheme [2]を用いることで, ユーザー任意のパラメータを用いても安定なシミュレーションを行うことが可能である. 今後の課題としては, 各流体中における小さな境界面の変化や, 飛沫などの抽出が挙げられる.

参考文献

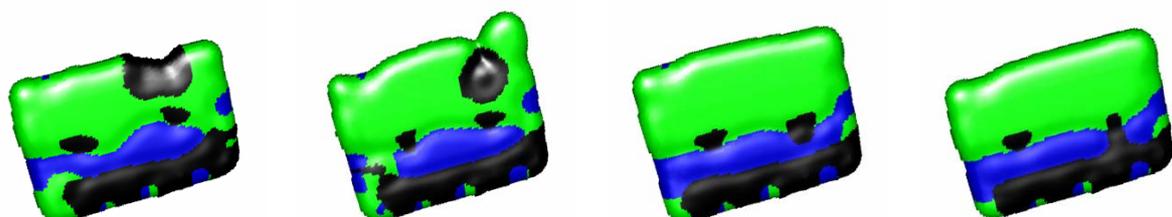
- [1] Muller M., Charypar D., Gross M.: "Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications," In ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation 2003, pp. 154-159, 2003.
- [2] Clavet S., Beaudoin P., Poulin P.: "Particle-based Viscoelastic Fluid Simulation." In ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation 2005, pp. 219-228, 2005.
- [3] Muller M., Solenthaler B., Keiser R., Gross M.: "Par-

- icle-Based Fluid-Fluid Interaction,” In ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation 2005, pp. 237-244, 2005.
- [4] Hong J-M., Kim C.-H.: “Discontinuous Fluids,” In ACM SIGGRAPH 2005, pp. 915-920, 2005.
- [5] Premoze S., Tasdizen T., Bigler J., Leforn A., Whitaker R.: “Particle-Based Simulation of Fluids,” Computer Graphics Forum, Vol.22, No.3, pp. 401-410, 2003.
- [6] Stam J.: “Stable Fluids.” In ACM SIGGRAPH 99, pp. 121-128, 1999.
- [7] Desbrun M., Gascuel M-P.: “Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies.” In Computer Animation and Simulation '96, pp. 61-76, 1996.
- [8] Lucy L.: “A numerical approach to the testing of the fission hypothesis,” Astronomical Journal Vol.82, pp. 1013-1024, 1977.
- [9] Gingold R., Monaghan J.: “Smoothed particle hydrodynamics - theory and application to nonspherical stars.” Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Vol.181, pp. 375-389, 1977.
- [10] Foster N., Fedkiw R.: “Practical animations of liquids,” In ACM SIGGRAPH 2001, pp. 23-30, 2001.
- [11] Foster N., Metxas D.: “Realistic animation of liquids,” Graphical Models and Image Processing, Vol. 58, pp. 471-483, 1996.
- [12] Foster N., Metxas D.: “Modeling the motion of a hot turbulent gas,” In ACM SIGGRAPH 97, pp. 181-188, 1997.
- [13] Enright D., Marschner S., Fedkiw R.: “Animation and rendering of complex water surfaces,” In ACM SIGGRAPH 2002, pp. 736-744, 2002.
- [14] Koshizuka S., Oka Y.: “Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid,” Nuclear Science Engineering, Vol.123, pp. 421-434, 1996.
- [15] Hege H-C., Seebass M., Stalling D., Zoeckler M.: “A generalized marching cubes algorithm based on non-binary classifications,” Konrad-Zuse-Zentrum fur Informationstechnik Berlin, Technical Report SC 97-05, 1997.
- [16] Muller H.: “Boundary extraction for rasterized motion planning,” In Modelling and Planning for Sensor Based Intelligent Robot Systems,” pp. 41-50, 1994.
- [17] Botsch M., Kobbelt L.: “A remeshing approach to multiresolution modeling,” In Symposium on Geometry Processing 2004, pp. 189-196, 2004.
- [18] Bischoff S., Kobbelt L.: “Extracting consistent and manifold interfaces from multi-valued volume data sets,” Bildverarbeitung für die Medizin, 2006, to appear.
- [19] Mizuno R., Dobashi Y., Chen B-Y., Nishita T.: “Physics Motivated Modeling of Volcanic Clouds as a Two Fluids Model,” In 11th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, pp. 434-439, 2003.



(a) Muller らの手法[3] 左:50 タイムステップ 右:100 タイムステップ
 (b) 提案法 左:50 タイムステップ 右:100 タイムステップ

図 7: 水中から発生する気泡をシミュレートした比較例 (気泡:黒色 水:灰色)
 (a), (b)共に粒子数は 1000 パーティクル, タイムステップ幅は(a)が 0.05, (b)が 0.2 を用いた



100 タイムステップ 200 タイムステップ 300 タイムステップ 400 タイムステップ

図 8: 密度差のある 3 流体が表面張力を保ちながら平衡状態に収束する様子 (密度: 黒色 > 灰色 > 白色)
 粒子数: 1000 パーティクル, 解像度: 100×150×20