

光沢面を考慮した動的シーンの高速相互反射計算法

岩崎 慶[†] 土橋 宜典^{††}
吉本 富士市[†] 西田 友是^{†††}

写実的な画像生成に関する研究は CG の分野において重要な研究課題の一つである。本稿は、写実的な画像を生成する上で考慮すべき相互反射光を、物体や光源が移動する動的なシーンにおいて高速に計算する方法を提案する。本稿では、光沢面 BRDF を入射方向成分と出射方向成分に分解することによって、光沢面を考慮した相互反射を計算する。物体を 2 次的な光源とみなし、別の物体での反射光を計算することによって相互反射光の計算を行う。提案法では、物体表面の輝度分布を基底関数の線形和で表現し、各基底関数で表現される輝度をもつ光源の放射輝度を前計算しておく。本稿では、さまざまな基底関数について実験し、最適な基底関数を提案する。

Fast Calculation of Interreflection for Dynamic Scenes Taking into account Glossy Surfaces

KEI IWASAKI,[†] YOSHINORI DOBASHI,^{††} FUJIICHI YOSHIMOTO[†]
and TOMOYUKI NISHITA^{†††}

Realistic image synthesis is one of the most important research subjects in Computer Graphics. This paper presents a fast rendering method for dynamic scenes, where objects and light sources move, taking into account interreflection. Our method calculates glossy interreflections of light by decomposing glossy BRDFs into incident direction dependent functions and outgoing direction dependent functions. Our method calculates the interreflected light illuminated by an object, by considering the object as a secondary light source. We represent the illumination distribution of the object surface as a linear combination of basis functions. We experiment several basis functions and propose optimal basis functions to approximate the illumination distribution.

1. はじめに

コンピュータグラフィックスの分野において、写実的な画像の生成は重要かつ挑戦的な課題としてこれまで数多くの研究がなされてきた。ソフトシャドウや、物体間の光の反射である相互反射は、写実的な画像を生成する上で考慮すべき重要な効果の一つである。物体や光源が移動するような動的なシーンでは、物体や光源の位置関係による遮蔽情報や入射光が逐次変化するため、相互反射やソフトシャドウを高速に計算することは非常に難しいといえる。しかしながら、ライティングデザインやゲームといったアプリケーションではインタラクティブに物体や光源を動かすことが多く、

動的なシーンにおけるソフトシャドウや相互反射を考慮したインタラクティブレンダリング法が求められている。

相互反射やソフトシャドウを考慮して画像を生成する方法として、ラジオシティ法^{1),15)} やモンテカルロレイトレーシング法⁷⁾、フォトンマッピング法⁶⁾などが挙げられる。これらの方法は高品質な画像を生成することができるが、計算コストが高くリアルタイムにレンダリングすることは難しい。

近年、ソフトシャドウや相互反射といった効果をリアルタイムにレンダリングする前計算放射輝度伝達法 (Precomputed Radiance Transfer, 以降 PRT と略す) が提案されている^{8),10),12),13),18)~20),23),24)}。しかしながら、これらの方法では物体は固定されており、物体や光源を移動させる動的なシーンへ対応することはできない。これらの方法を拡張し、動的なシーンにおいてソフトシャドウを高速にレンダリングする手法が提案されている^{11),22),25)}。しかしながらこの方法で相互反射を考慮していない。

[†] 和歌山大学
Wakayama University

^{††} 北海道大学
Hokkaido University

^{†††} 東京大学
The University of Tokyo

そこで本稿では、動的なシーンにおける、相互反射光を高速に計算する手法を提案する。提案法では、物体の反射特性として拡散面および光沢面を考慮し、照明の輝度分布の変化が緩やかである低周波照明を考慮する。

2. 関連研究

照明条件を変化させても高速に画像を生成する研究は今までに多くなされてきている。土橋らは^{2),3)}、球面調和関数やフーリエ級数を用いることで、光源の輝度分布を変えても物体表面の輝度を高速に計算する手法を提案した。Ramamoorthiらは¹⁶⁾、球面調和関数を用いて環境照明下での物体をリアルタイムにレンダリングする手法を提案した。Sloanらは¹⁹⁾、基底関数として球面調和関数を用いて環境照明下の物体を高速にレンダリングするPRT法を提案した。この方法を改良し、任意のBRDFを扱えるように拡張した方法^{8),9)}や、クラスター主成分分析による前計算データを圧縮する方法¹⁸⁾および双方向テクスチャ関数を扱える方法²⁰⁾が提案されている。近年、Sloanらは²¹⁾、局所的に変形する物体のためのPRT法を提案した。これらの方法は、シーン中の物体は固定されており動的なシーンに適用することは難しい。

Ngらは¹²⁾、ウェーブレット基底関数による非線形近似法を用いて、拡散反射面をインタラクティブな速度でレンダリングする方法を提案した。この方法を拡張し、光沢面を考慮する手法も提案された^{10),13),23)}。これらの方法は、照明の輝度分布が激しく変化している全周波数環境照明を考慮することができるが、シーン中の物体は固定されている。

シーン中の物体を移動できるようにPRT法を改良した方法も提案されている。Meiらは¹¹⁾、物体の遮蔽情報や反射光を物体の包含球上でサンプルしたSpherical Radiance Transport Mapを提案し、物体を移動してもソフトシャドウを高速にレンダリングする方法を提案した。田村らは²²⁾、物体自身によって遮蔽されてできる影と、別の物体によってできる影を分けて考え、別の物体によってできる影をocclusion mapを用いて高速に計算する手法を提案した。2005年にZhouらは²⁵⁾、物体を移動させても物体によるソフトシャドウをインタラクティブな速度でレンダリングする手法を提案した。Renらは¹⁷⁾は、遮蔽物体を球の集合で近似し、遮蔽情報の球面調和係数ベクトルの積をlog空間での和の計算として行うことで、リアルタイムにソフトシャドウをレンダリングする手法を提案した。しかしながらこれらの方法では、相互反射について考

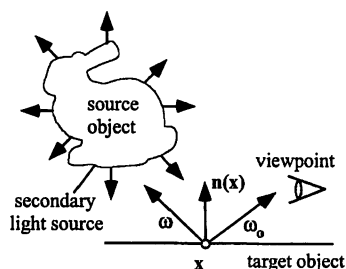


図1 source object と target object

慮していない。本稿では、これらの論文で解決できなかった動的なシーンにおける相互反射を考慮した高速レンダリング法を提案する。

3. 提案法の概要

提案法の基本的な考え方は以下の通りである。まず、シーン中の各物体の直接光成分の輝度をZhouらの手法²⁵⁾を用いて計算する。各物体を直接光成分の輝度をもつ光源とみなし、別の物体での反射光を計算する。本稿では光源とみなす物体をsource objectと呼び、source objectに照射される物体をtarget objectと呼ぶ(図1)。

source objectからtarget object上の点 x への放射輝度を逐次計算するのは計算コストが高い。Zhou²⁵⁾らは、輝度が変化しない光源において、光源の周囲に設定したサンプル点に到達する放射輝度を前計算したSource Radiance Field(以下SRFと略す)を提案している。SRFを利用することにより、光源から任意の点への放射輝度を高速に計算することができる。しかしながら、提案法ではsource objectの輝度は光源や別の物体の遮蔽により逐次変化する。そのため、source objectのSRFを前計算しておくことができない。

そこで、source objectの輝度分布を基底関数の線形和を用いて表現することを考える。source objectの輝度分布が変化した場合、各基底関数に対応する重みを変化させることによってsource objectの輝度分布を表現する。基底関数で表された輝度分布をもつ光源からの放射輝度は前計算することができるため、輝度分布が変化するsource objectからの放射輝度を高速に計算することができる。従来法⁵⁾では、source objectとして拡散反射物体のみを考慮していた。提案法では、これを拡張し光沢面物体を考慮する。

4. 光沢面を考慮した相互反射光計算

本節では、光沢面物体を含む動的なシーンの相互反射光の計算方法について述べる。まず、光沢面物体を

source object とみなした場合の、光沢面物体の輝度 (すなわち source object の輝度) の計算方法について述べる。

4.1 光沢面物体の輝度計算

source object とみなす光沢面物体上の点 \mathbf{x} における出射方向 ω_o の輝度 $B(\mathbf{x}, \omega_o)$ は以下の式で計算される。

$$B(\mathbf{x}, \omega_o) = \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \omega) V(\mathbf{x}, \omega) f_r(\omega, \omega_o) (\omega \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) d\omega \quad (1)$$

ここで、 $L(\mathbf{x}, \omega)$ は入射光、 $V(\mathbf{x}, \omega)$ は可視関数、 $f_r(\omega, \omega_o)$ は BRDF、 $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} における法線とする。ここで、BRDF $f_r(\omega, \omega_o)$ を入射方向 ω と出射方向 ω_o に分解近似する²³⁾。

$$f_r(\omega, \omega_o) \approx \sum_{k=1}^K g_k(\omega_o) h_k(\omega) \quad (2)$$

ここで $h_k(\omega)$ 、 $g_k(\omega_o)$ はそれぞれ入射方向、出射方向の k 番目の関数とし、 K は近似する関数の数とする。この式 (2) を式 (1) に代入する。

$$\begin{aligned} B(\mathbf{x}, \omega_o) &= \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \omega) V(\mathbf{x}, \omega) f_r(\omega, \omega_o) (\omega \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) d\omega \\ &= \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \omega) V(\mathbf{x}, \omega) \sum_{k=1}^K g_k(\omega_o) h_k(\omega) (\omega \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) d\omega \\ &= \sum_{k=1}^K g_k(\omega_o) \int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \omega) V(\mathbf{x}, \omega) h_k(\omega) (\omega \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) d\omega \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、式 (3) の積分項 $\int_{\Omega} L(\mathbf{x}, \omega) V(\mathbf{x}, \omega) h_k(\omega) (\omega \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})) d\omega$ を $L_k(\mathbf{x})$ とおく。物体や光源が移動する動的なシーンにおいては、入射光 $L(\mathbf{x}, \omega)$ や可視関数 $V(\mathbf{x}, \omega)$ が変化する。これらについては Zhou らの手法²⁵⁾ を用いて $L_k(\mathbf{x})$ を計算する。 $L_k(\mathbf{x})$ を用いて光沢面物体の輝度は以下の式で計算される。

$$B(\mathbf{x}, \omega_o) = \sum_{k=1}^K g_k(\omega_o) L_k(\mathbf{x}) \quad (4)$$

4.2 Source Radiance Field の前計算

光沢面物体である source object からの放射輝度を高速に計算するために、SRF を前計算する。source object を中心とした同心球上にサンプル点 \mathbf{x}_s を設定し、各基底関数を輝度分布とする source object からサンプル点に向かう放射輝度を前計算する。サンプル点への放射輝度を球面調和関数で表現し、対応する係数からなる係数ベクトルを保存する²⁵⁾。

動的なシーンでは $L_k(\mathbf{x})$ が変化するため、 $L_k(\mathbf{x})$ を

基底関数 $\Psi(\mathbf{x})$ の線形和 $L_k(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^N w_{(k,i)} \Psi_i(\mathbf{x})$ で表現することを考える。ここで $\Psi_i(\mathbf{x})$ は i 番目の基底関数とし、 N は基底関数の数とする。これにより source object の放射輝度は基底関数 $\Psi_i(\mathbf{x})$ と重み $w_{(k,i)}$ により以下の式で表される。

$$B(\mathbf{x}, \omega_o) \approx \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N w_{(k,i)} g_k(\omega_o) \Psi_i(\mathbf{x}) \quad (5)$$

ここで、各基底関数 Ψ_i についてサンプル点への放射輝度 $g_k(\omega_o) \Psi_i(\mathbf{x})$ を前計算し、球面調和関数展開した係数ベクトルを保存しておく。

5. 物体表面の輝度分布を表す基底関数

提案法では物体表面の輝度分布を基底関数の線形和で表現する。物体表面の輝度分布を近似する基底関数の数は、レンダリング速度およびメモリ量の点からみても少ないほうが望ましい。そこで、本節では様々な基底関数について輝度分布を近似する実験を行う。CG の分野において、PRT に代表されるように入射光や BRDF を基底関数近似する研究^{3),12),19)} が行われてきている。これらの研究では、球面調和関数・ウェーブレット関数・フーリエ級数 (フーリエ余弦級数) が用いられている。そこでこの3つの関数をそれぞれ基底関数として物体表面の輝度を表現することを考える。また image-based rendering の分野において、様々な照明下での物体の外観を画像として取得しておき、主成分分析により少数の基底画像に圧縮し、任意の照明下での画像を合成する研究が行われている¹⁴⁾。そこで主成分分析により基底関数を求める方法についても実験を行う。

5.1 正規直交基底関数

球面調和関数・ウェーブレット関数・フーリエ余弦級数といった正規直交基底関数を用いて物体表面の輝度分布を表現する。物体表面上の点 \mathbf{x} を (u, v) パラメータ表現 $(\mathbf{x}(u, v), (0 \leq u, v \leq 1))$ すると、物体表面上の輝度 $L_k(\mathbf{x})$ も同様に (u, v) パラメータによって $L_k(u, v)$ と表現される。 $L_k(u, v)$ を球面調和関数 $y(u, v)$ 、ウェーブレット関数 $\phi(u, v)$ 、フーリエ余弦級数 $\mathcal{F}(u, v)$ で展開する。これらの基底関数は正規直交基底であるため、各重み $w_{(k,i)}$ は $w_{(k,i)} = \int_0^1 \int_0^1 L_k(u, v) \Psi_i(u, v) du dv$ で計算することができる。本稿では、パラメータ化の方法として geometry image⁴⁾ を用いた。

5.2 主成分分析を用いた基底関数

様々な照明下での物体表面上の各頂点 \mathbf{x}_j の輝度を計算し、その輝度データを主成分分析により圧縮した

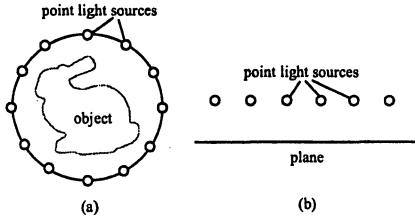


図2 包含球上の点光源から物体を照射し、各頂点の輝度を計算

主成分輝度を基底関数とする。本稿では、主成分分析によって得られた基底関数を主成分基底関数と呼ぶ。様々な位置の点光源から物体を照らした際の各頂点 \mathbf{x}_j の輝度 $B(\mathbf{x}_j)$ を要素とする列ベクトル \mathbf{B} を計算する。提案法では、物体の包含球上に等間隔に点光源を設置し、各点光源から物体を照射する(図 2(a))。平面の場合、平面上に等間隔に点光源を配置する(図 2(b))。 M 個の点光源について各頂点での輝度を計算し、列ベクトル \mathbf{B} からなる行列 $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_M)$ を計算する。行列 \mathbf{B} に対して主成分分析を行い、 N 個の主成分ベクトルを得る。各主成分ベクトルの要素を、各頂点の主成分基底関数の値 $\Psi_i(\mathbf{x}_j)$ とする。図 3 に主成分基底関数の値を輝度として物体をレンダリングした例を示す。

5.2.1 主成分基底関数の重み計算

基底関数 Ψ_i で精度よく物体表面上の輝度 L_k を近似するために、各頂点の輝度 $L_k(\mathbf{x}_j)$ と線形和 $\sum_{i=1}^N w_{(k,i)} \Psi_i(\mathbf{x}_j)$ の差の全頂点での 2 乗和 $F(w_{(k,1)}, w_{(k,2)}, \dots, w_{(k,N)})$ が最小となる重みベクトル $\mathbf{w}_k^T = \{w_{(k,1)}, \dots, w_{(k,N)}\}$ を計算する。

$$F(\mathbf{w}_k) = \sum_{j=1}^{N_v} (L_k(\mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^N w_{(k,i)} \Psi_i(\mathbf{x}_j))^2 \quad (6)$$

ここで N_v は頂点数とする。 $F(\mathbf{w}_k)$ を最小にする重みベクトルの各要素 $w_{(k,l)}$ は、 $\frac{\partial F}{\partial w_{(k,l)}} = 0$ を満たす。すなわち、重み $w_{(k,l)}$ は以下の式から求められる。

$$\sum_{j=1}^{N_v} \Psi_l(\mathbf{x}_j) (L_k(\mathbf{x}_j) - \sum_{i=1}^N w_{(k,i)} \Psi_i(\mathbf{x}_j)) = 0 \quad (7)$$

重みベクトル $\mathbf{w}_k^T = \{w_{(k,1)}, \dots, w_{(k,N)}\}$ は、連立 1 次方程式 $\mathbf{A}\mathbf{w}_k = \mathbf{b}_k$ により計算される。ここで係数行列 \mathbf{A} の m 行 n 列目の要素 $a_{(m,n)}$ は $\sum_{j=1}^{N_v} \Psi_m(\mathbf{x}_j) \Psi_n(\mathbf{x}_j)$ であり、ベクトル \mathbf{b}_k の m 番目の要素 b_m は $\sum_{j=1}^{N_v} \Psi_m(\mathbf{x}_j) L_k(\mathbf{x}_j)$ で表される。係数行列 \mathbf{A} は各頂点 \mathbf{x}_j の基底関数の値 $\Psi_i(\mathbf{x}_j)$ が変化しないため、前計算の段階で逆行列 \mathbf{A}^{-1} を計算して

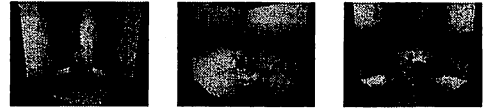


図3 主成分基底関数の例 (赤は正の値を表し、青は負の値を表す)

おくことができる。 L_k が変化した場合の重みベクトル \mathbf{w}_k は、既に計算されている逆行列 \mathbf{A}^{-1} とベクトルの積 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}_k$ から計算することができる。

5.3 様々な基底関数による輝度分布の近似実験

図 4 から図 7 に、物体表面の輝度分布を各基底関数で近似した画像を示す。直接光の輝度分布をそれぞれ 4 項、8 項、16 項の基底関数で近似した画像を示す。図 7 に示されるように、主成分基底関数は他の基底関数に比べて輝度分布をよく近似していることがわかる。図 8 に床と bunny の輝度と基底関数で近似した輝度の RMS 誤差を示す。床についてはフーリエ余弦級数と主成分基底関数の RMS 誤差が少なく、bunny については主成分基底関数の RMS 誤差が少ない。そこで提案法では基底関数として主成分基底関数が最適であると判断する。

6. 結 果

図 9 に提案法による適用例を示す。図 9(a) は光沢面 (Phong の BRDF (specular exponent $n = 10$)) の teapot モデル (頂点数 3241) と拡散反射面の床モデル (頂点数 4096) である。光源として面光源を用いている。基底関数として 16 個 ($N = 16$) の主成分基底関数を用い、Phong の BRDF を 4 個 ($K = 4$) の関数の積和に分解した。3 回の相互反射を考慮した図 9(a) の計算時間は 0.2 秒であり、光源や物体をインタラクティブに動かすことができる。SRF の前計算データのデータ量は 122MB である。図 9(b)(c) は室内のシーン (物体数 6 で総頂点数は約 2 万 5 千頂点) である。図 9(b) では、周囲の壁により光沢面の bunny モデルが照らされており、図 9(c) と比べ相互反射光を考慮することが重要であることがわかる。3 回の相互反射を考慮した計算時間は 3.0 秒であり、SRF の前計算データは 220MB である。計算環境は CPU が PentiumD 2.8GHz で GPU が GeForce7800GTX である。

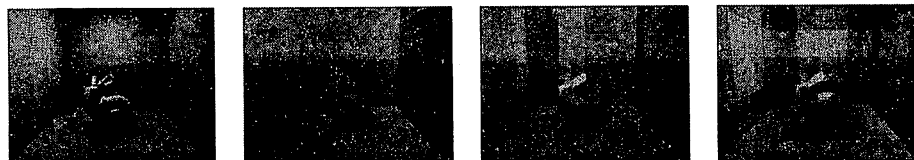
図 10 に、鏡面反射の鋭さを表す specular exponent n を変えた Phong の BRDF を分解近似した例を示す。specular exponent n が 16 程度では、4 項の近似でも画質の差が見られないが、 n が 64 以上では鏡面反射成分に差が見られる。これは、分解近似する関数の数 (K) を増やすことによって解決される。



(a) 参照画像

(b) $N = 4$ (c) $N = 8$ (d) $N = 16$

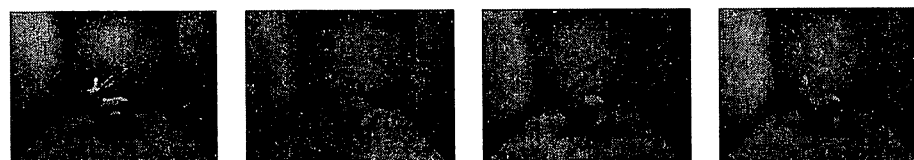
図4 球面調和関数を用いて輝度分布を近似した例



(a) 参照画像

(b) $N = 4$ (c) $N = 8$ (d) $N = 16$

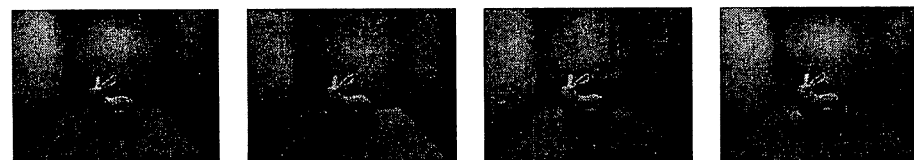
図5 ウェーブレット関数を用いて輝度分布を近似した例



(a) 参照画像

(b) $N = 4$ (c) $N = 8$ (d) $N = 16$

図6 フーリエ余弦変換を用いて輝度分布を近似した例



(a) 参照画像

(b) $N = 4$ (c) $N = 8$ (d) $N = 16$

図7 主成分基底関数を用いて輝度分布を近似した例

7. まとめと今後の課題

本稿では、光沢面物体を含む動的なシーンのための高速な相互反射計算法を提案した。光沢面 BRDF を入射方向と出射方向に依存する関数の積和で表現することにより、光沢面物体の輝度を計算した。また、物体を2次の光源とみなすことにより相互反射光の計算を行った。輝度分布を基底関数で表現することにより、輝度分布が変化する光源からの放射輝度を高速に計算した。輝度分布を表現する基底関数として様々な基底関数の実験を行い、主成分分析によって計算した基底関数が最適であると判断した。

今後の課題としては、前計算データの圧縮、GPU を利用したリアルタイム化が挙げられる。

参考文献

- 1) M.F. Cohen and D.P. Greenberg. A radiosity solution for complex environment. *Computer Graphics*, Vol. 19, No. 3, pp. 31-40, 1985.
- 2) Y. Dobashi, K. Kaneda, H. Yamashita, and T. Nishita. A quick rendering method using basis functions for interactive lighting design. *Computer Graphics Forum*, Vol. 14, No. 3, pp. 229-240, 1995.
- 3) Y. Dobashi, K. Kaneda, H. Yamashita, and T. Nishita. Method for calculation of sky light luminance aiming at an interactive architectural design. *Computer Graphics Forum*, Vol. 15, No. 3, pp. 112-118, 1996.
- 4) X. Gu, S.J. Gortler, and H. Hoppe. Geometry images. In *Proc. SIGGRAPH 2002*, pp. 355-361, 2002.
- 5) K. Iwasaki, Y. Dobashi, N. Tamura, H. Johan, F. Yoshimoto, and T. Nishita. Precomputed radiance transfer for dynamic scenes with diffuse interreflection. In *SIGGRAPH 2006, Technical Sketches*.
- 6) H.W. Jensen and P.H. Christensen. Efficient simulation of light transport in scenes with participating media using photon maps. In *Proc. SIGGRAPH 1998*, pp. 311-320, 1998.
- 7) J.T. Kajiya. The rendering equation. *Computer Graphics*,

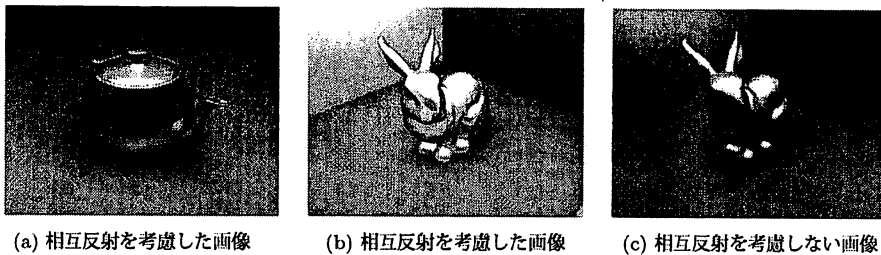


図9 適用例

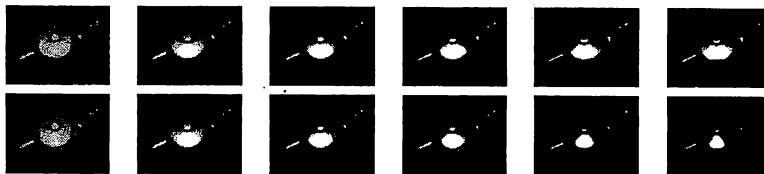
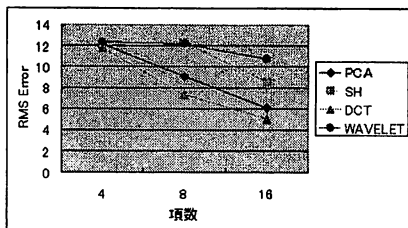
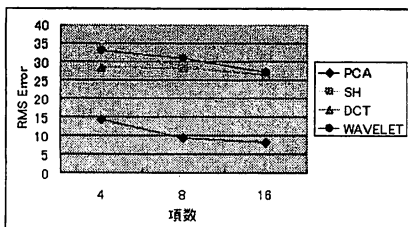


図10 PhongのBRDFを4項の関数で近似した画像(上段)と参照画像(下段)。左から specular exponent n を変えた ($n = 4, n = 8, n = 16, n = 32, n = 64, n = 128$) 例。



(a) 床の輝度と基底関数で近似した輝度の RMS 誤差



(b) bunnyの輝度と基底関数で近似した輝度の RMS 誤差

図8 輝度分布と基底関数で近似した輝度の RMS 誤差

Vol. 20, No. 4, pp. 143-150, 1986.

- 8) J. Kautz, P.P. Sloan, and J. Snyder. Fast, arbitrary BRDF shading for low-frequency lighting using spherical harmonics. In *Proc. Eurographics Workshop on Rendering 2002*, pp. 301-308, 2002.
- 9) J. Lehtinen and J. Kautz. Matrix radiance transfer. In *Proc. Symposium on Interactive 3D Graphics 2003*, pp. 59-64, 2003.
- 10) X. Liu, P.P. Sloan, H.Y. Shum, and J. Snyder. All-frequency precomputed radiance transfer for glossy objects. In *Proc. Eurographics Symposium on Rendering 2004*, pp. 337-344, 2004.
- 11) C. Mei, J. Shi, and F. Wu. Rendering with spherical radiance transport maps. *Computer Graphics Forum*, Vol. 23, No. 3, pp. 281-290, 2004.
- 12) R. Ng, R. Ramamoorthi, and P. Hanrahan. All-frequency

shadows using non-linear wavelet lighting approximation. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 22, No. 3, pp. 376-381, 2003.

- 13) R. Ng, R. Ramamoorthi, and P. Hanrahan. Triple product wavelet integrals for all-frequency relighting. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 23, No. 3, pp. 477-487, 2004.
- 14) K. Nishino, Y. Sato, and K. Ikeuchi. Eigen-texture method: Appearance compression and synthesis based on a 3d model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 23, No. 11, pp. 1257-1265, 2001.
- 15) T. Nishita and E. Nakamae. Continuous tone representation of three-dimensional objects taking account of shadows and interreflection. *Computer Graphics*, Vol. 19, No. 3, pp. 23-30, 1985.
- 16) R. Ramamoorthi and P. Hanrahan. Frequency space environment map rendering. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 21, No. 3, pp. 517-526, 2002.
- 17) Z. Ren, R. Wang, J. Snyder, K. Zhou, X. Liu, B. Sun, P.-P. Sloan, H. Bao, Q. Peng, and B. Guo. Real-time soft shadows in dynamic scenes using spherical harmonics exponentiation. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 25, No. 3, pp. 977-986, 2006.
- 18) P.P. Sloan, J. Hall, J. Hart, and J. Snyder. Clustered principal components for precomputed radiance transfer. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 22, No. 3, pp. 382-391, 2003.
- 19) P.P. Sloan, J. Kautz, and J. Snyder. Precomputed radiance transfer for real-time rendering in dynamic, low-frequency lighting environments. In *Proc. SIGGRAPH 2002*, pp. 527-536, 2002.
- 20) P.P. Sloan, X. Liu, H.Y. Shum, and J. Snyder. Bi-scale radiance transfer. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 22, No. 3, pp. 370-375, 2003.
- 21) P.P. Sloan, B. Luna, and J. Snyder. Local, deformable precomputed radiance transfer. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 24, No. 3, pp. 1216-1224, 2005.
- 22) N. Tamura, H. Johan, and T. Nishita. Deferred shadowing for real-time rendering of dynamic scenes under environment illumination. *Computer Animation and Virtual World*, Vol. 16, No. 3-4, pp. 475-486, 2005.
- 23) R. Wang, J. Tran, and D. Luebke. All-frequency relighting of non-diffuse objects using separable BRDF approximation. In *Proc. Eurographics Symposium on Rendering 2004*, pp. 345-354, 2004.
- 24) R. Wang, J. Tran, and D. Luebke. All-frequency interactive relighting of translucent objects with single and multiple scattering. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 24, No. 3, pp. 1202-1207, 2005.
- 25) K. Zhou, Y. Hu, S. Liu, B. Guo, and H.Y. Shum. Precomputed shadow fields for dynamic scenes. *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 24, No. 3, pp. 1196-1201, 2005.