

美的空間曲線の全体像の解明

吉田 典正* 齋藤 隆文**

* 日本大学 ** 東京農工大学

E-mail: norimasa@acm.org txsaito@cc.tuat.ac.jp

本報告では、曲率変化および捩率変化が単調な曲線である美的空間曲線の全体像を解明する。美的空間曲線は、美的曲線における曲率半径と弧長の関係式を、捩率半径と弧長の関係式にも利用することによって定義する。美的空間曲線の分類は、曲率および捩率が0または ∞ の点までの弧長の長さ、またそれらの点において、接線ベクトル方向および従法線ベクトル方向が定まるか無限に回転するかなどに応じて行う。また、すべての美的曲線が円と関連しているのと同様に、すべての美的空間曲線が常螺旋と関連していることを示す。

The Family of Aesthetic Space Curves

Norimasa Yoshida* and Takafumi Saito**

* Nihon University ** Tokyo University of Agriculture and Technology

We identify the overall shapes of a class of space curves with monotone curvature and torsion, which we call aesthetic space curves. We define aesthetic space curves by using the same relationship between the radius of torsion and the arc length as the relationship between the radius of curvature and the arc length of aesthetic curves. We classify the overall shapes of aesthetic curves depending on the arc length to the point at 0 or infinite curvature/torsion, and the behavior of the tangent and normal vectors. We show that every aesthetic space curve is related to the helix, as every aesthetic curve is related to the circle.

1 はじめに

自動車のボディに代表される高度に美的な曲面 (class A 曲面) 設計のためには、キーラインとして曲率および捩率変化の単調な曲線 (class A 曲線) を用いることが望ましい。一般に、自動車のボディのキーラインは平面曲線をもとに作成されることが多く、我々は、曲率対数分布図が直線で表される平面曲線である美的曲線の全体像を解明するとともに曲線セグメントを描く手法を提案し [7, 8, 9]、美的曲線セグメントを有理 3 次 Bézier 曲線で表現した擬似美的曲線 [10] を提案している。しかしながら、キーラインを空間曲線として生成することができたならば、車に違った印象を持たせることができ、一部の車では (非常に大変な労力を使って) 空間曲線を生成しているものも見受けられる。本報告では、美的曲線における「曲率と弧長の関係」を「捩率と弧長の関係」

にも適用した曲線を美的空間曲線と定義し、美的空間曲線の全体像を解明する。原田らにより、多くの美しい空間曲線において、その曲率対数分布図と捩率対数分布図が直線で表されることが確認されつつある [5]。上記のように定義された美的空間曲線は曲率/捩率対数分布図が直線になるため、原田らの解析に一致する。

関連研究としては、Adams が曲率/捩率プロットが山型の直線で表される空間曲線の生成法 [1] を、Farin は曲率および捩率が単調な空間曲線である Class A Bézier 曲線 [3] を提案している。しかし、これらのどちらも、曲率および捩率変化の度合いを制御することは困難である。三浦らは美的曲線を応用し空間曲線の生成を試みているが [6]、空間曲線の全体像は解明されていない。

本報告では、美的空間曲線の全体像を、曲率/捩率が0または無限の点までの弧長が有限であるかどうか、それらの点においての接線ベクトルおよび主法

線ベクトルの振る舞いがどうであるかに応じて解明し、分類を行う。また、すべての美的曲線は曲率一定の円と関連しているのと同様に、すべての美的空間曲線は曲率および振率が一定の常螺旋 [4] と関連していることを示す。本研究により、美的空間曲線の性質が明らかになり、美しい空間曲線を利用したデザインシステムの基礎となることが期待される。

2 美的空間曲線

曲率半径を ρ 、弧長を s で表す。三浦によって解積された曲率対数分布図は、横軸が $\log \rho$ 、縦軸が $\log \rho \frac{ds}{d\rho}$ で表され、曲率対数分布図の直線性は、直線の傾きを α 、 c_1 を定数としたときに、

$$\log \rho \frac{ds}{d\rho} = \alpha \log \rho + c_1 \quad (1)$$

によって表される。式 (1) を変形し、 $\Lambda = e^{-c_1}$ と置くと、

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{\rho^{\alpha-1}}{\Lambda} \quad (2)$$

となる。美的曲線は、曲率半径と弧長の関係が式 (2) の微分方程式で表される曲線である。

空間曲線の場合にも、振率に関して振率対数分布図が考えられ、その直線性が重要であることが指摘されている [5]。振率対数分布図の直線性は、振率半径を μ 、直線の傾きを β 、 c_2 を定数としたとき、

$$\log \mu \frac{ds}{d\mu} = \beta \log \mu + c_2 \quad (3)$$

で表すことができる。式 (1) の時と同様に、式 (2) を変形し、 $\Omega = e^{-c_2}$ と置くと、

$$\frac{ds}{d\mu} = \frac{\mu^{\beta-1}}{\Omega} \quad (4)$$

を得る。ここで、美的空間曲線を、曲率と振率が微分方程式 (2) と式 (4) によって定められる曲線と定義する。

平面曲線の場合と同様に [8, 9]、美的空間曲線においても基準点を設ける。基準点は、曲線上の ρ および μ が 0 または ∞ 以外の任意の点とする。基準点において (1) スケーリング：曲率半径 $\rho = 1$ および振率半径 $\mu = \nu$ とする、(2) 平行移動：基準点を原点に配置する、(3) 回転：基準点の接線を x 軸の正の方向、主法線を y 軸の正の方向を向かせる、という拘束を与える。

	LB	UB
$\alpha < 0$	$-\infty$	$-1/(\Lambda\alpha)$
$\alpha = 0$	$-\infty$	∞
$\alpha > 0$	$-1/(\Lambda\alpha)$	∞

(a) The Lower Bound(LB) and Upper bound(UB) of s in Eq.(5)

	LB	UB		LB	UB
$\beta < 0$	$-\infty$	$-v^\beta / (\Omega\beta)$	$\beta < 0$	$v^\beta / (\Omega\beta)$	∞
$\beta = 0$	$-\infty$	∞	$\beta = 0$	$-\infty$	∞
$\beta > 0$	$-v^\beta / (\Omega\beta)$	∞	$\beta > 0$	$-\infty$	$v^\beta / (\Omega\beta)$

(b) The LB and UB of s in Eq.(6)

(c) The LB and UB of s in Eq.(7)

図1 式 (5), (6), (7) における s の限界値

式 (2) を、 $\rho = 1$ で $s = 0$ になるように ρ で積分し、それを ρ について解くと、

$$\rho = \begin{cases} e^{\Lambda s} & \text{if } \alpha = 0 \\ (\Lambda\alpha s + 1)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

同様に、式 (4) を、 $\mu = \nu$ で $s = 0$ になるように μ で積分し、それを μ について解くと、

$$\mu = \begin{cases} e^{(\Omega s + \log \nu)} & \text{if } \beta = 0 \\ (\Omega\beta s + \nu^\beta)^{\frac{1}{\beta}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

を得る。式 (6) は、 s に対して振率半径が単調増加であるが、単調減少の場合も考えると、

$$\mu = \begin{cases} e^{(-\Omega s + \log \nu)} & \text{if } \beta = 0 \\ (-\Omega\beta s + \nu^\beta)^{\frac{1}{\beta}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

を得る。式 (5) を単調増加な曲率半径の式、式 (6) を単調増加な振率半径の式、式 (7) を単調減少な振率半径の式と呼ぶ。

曲率半径および振率半径が単調な空間曲線には、曲率半径と振率半径がともに単調増加なものと、曲率半径が単調増加で振率半径が単調減少なもの2種類が存在する。従って、式 (5) と式 (6) の組み合わせ、および式 (5) と式 (7) の組み合わせによって空間曲線が生成される。

曲率半径 ρ および振率半径 μ は 0 から ∞ までの値をとることから、式 (5) は α に応じて、式 (6),(7) は β に応じて、 s に上限または下限が存在する場合がある。図1に、これらの限界値を示す。

微分幾何学の定理より、曲率および振率が指定されれば、合同変換のもとに空間曲線を一意に決定することができることが知られている [4]。曲線を $\mathbf{x}(s)$ 、接線ベクトルを \mathbf{t} 、主法線ベクトルを \mathbf{n} 、従法線ベクトルを \mathbf{b} で表し、 s による微分を $'$ で表す。また、曲

率を $\kappa(= \frac{1}{\rho})$, 振率を $\tau(= \frac{1}{\mu})$ で表す。曲率半径および振率半径が弧長 s の関数として表現されるので、曲線 $\mathbf{x}(s)$ は、次の連立常微分方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{t}(s), & \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}, & \mathbf{b}' &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \quad (8)$$

を、 s の定義域の範囲内にある s_0 において次の初期条件

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s_0) &= \mathbf{x}_0, & \mathbf{t}(s_0) &= \mathbf{t}_0 \\ \mathbf{n}(s_0) &= \mathbf{n}_0, & \mathbf{b}(s_0) &= \mathbf{t}_0 \times \mathbf{n}_0 \end{aligned} \quad (9)$$

で解けばよい。ここで、 \mathbf{x}_0 は曲線の初期位置、 $\mathbf{t}_0, \mathbf{n}_0$ はそれぞれ初期接線ベクトルと初期主法線ベクトルである。 \mathbf{x}_0 の位置は任意でよく、 \mathbf{t}_0 と \mathbf{n}_0 に関しては、 $|\mathbf{t}_0| = |\mathbf{n}_0| = 1$ および $\mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$ を満たさなければならない。

3 美的空間曲線の全体像

美的空間曲線の全体像を解明するために、次の2つの積分を考える。

$$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u) du \quad \phi(s) = \int_0^s \tau(v) dv \quad (10)$$

$\theta(s)$ は、平面曲線の場合には方向角の変化（すなわち、弧長 0 における接線ベクトルと s における接線ベクトルのなす角）になるが、空間曲線の場合にはそのような意味を持たない。しかしながら、 $\theta(s)$ または $\phi(s)$ の値が、ある s において有限の値をとるか無限の値をとるかどうかに応じて、空間曲線の性質を知ることができる。空間曲線において、 κ は接線ベクトルの角速度、 $-\tau$ は従法線ベクトルの角速度という意味を持つ。このことから、 $\theta(s)$ がある s で有限であるならばその点における接線ベクトルが定まり、無限であるならばその点へ向かって接線ベクトルが渦を巻く。同様に、ある s において $\phi(s)$ が有限であるならばその点における従法線ベクトルが定まり、無限であるならばその点へ向かって従法線ベクトルが渦を巻く。

美的空間曲線の全体像を理解するために、弧長 s の下限または上限において、接線ベクトル \mathbf{t} と従法線ベクトル \mathbf{b} の方向が定まる場合、定まらない（無限に回転するか）場合の状況を知ることが重要である。これらの分類を、図2に示す。図2(a)は、黒丸の点において \mathbf{t} および \mathbf{b} が定まる様子を示す。(b)

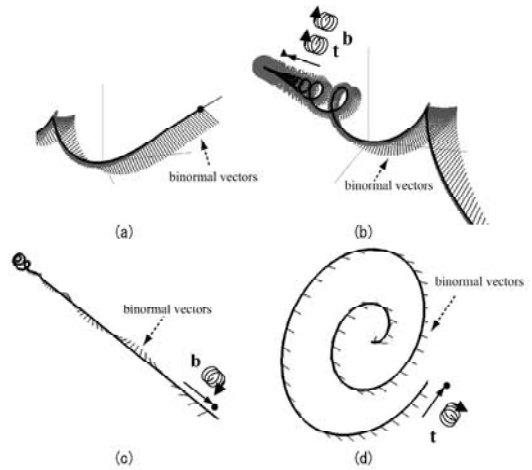


図2 美的空間曲線理解のための基本パターン

は、実線の矢印方向に、 \mathbf{t} と \mathbf{b} が無限に回転する場合である。この場合、曲線は螺旋のように渦を巻く。(c)は、実線の矢印方向に \mathbf{t} の方向が定まるが、 \mathbf{b} が無限に回転する場合であり、 \mathbf{b} が回転しながら一定の方向に曲線が進む。(d)は、 \mathbf{t} が無限に回転するが、 \mathbf{b} の方向が定まる場合である。この場合は、 \mathbf{b} がほぼ一定になってきたら、 \mathbf{b} を法線ベクトルとする平面上において曲線が渦を巻く。

図2の4つの基本パターンが理解できたら、後は、 $s = 0$ の点から s の下限または上限までの距離が有限であるか無限であるかを知る必要がある。図3に、 $\alpha, \beta, \Lambda, \Omega, \nu$ に依存した美的空間曲線の分類表を示す。(a)は曲率半径および振率半径ともに単調増加な曲線の分類、(b)は曲率半径は単調増加で振率半径が単調減少な曲線の分類である。弧長 s の定義域は、 α と β の値に応じて、式(5)と式(6)（または式(7)）の定義域の共通部分となる。 θ の欄において、 $-\infty$ または ∞ は、接線ベクトルが定まらないことを意味し、上限または下限において接線ベクトルは無限に回転 (Inf. Rotate) する。Finite($-\infty$) は、 θ が $-\infty$ に近づく途中で、振率半径による拘束から有限の値をとることを意味する。従って、接線ベクトルは、Rotationally fixed (回転する途中で決められた値を持つ) となる。Finite(F) は、 θ が有限の値に向かう途中で、振率半径による拘束から有限の値をとることを意味する。従って、接線方向が定まる。 ϕ と従法線ベクトルについても同様な関係が成り立つ。

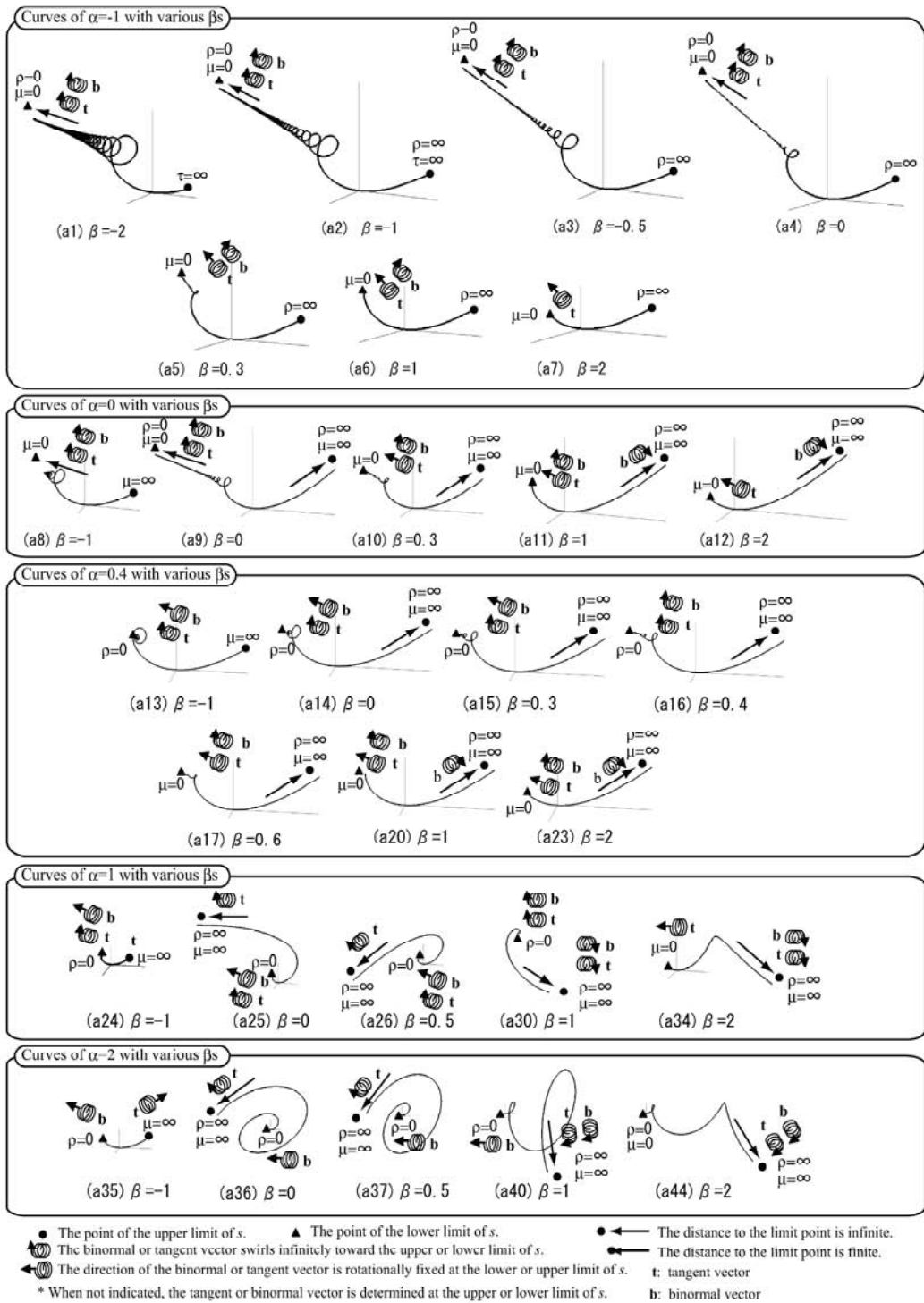


図4 美的空間曲線(曲率半径, 振率半径ともに単調増加)の全体像($\Lambda = 1, \Omega = 1, \nu = 1$)

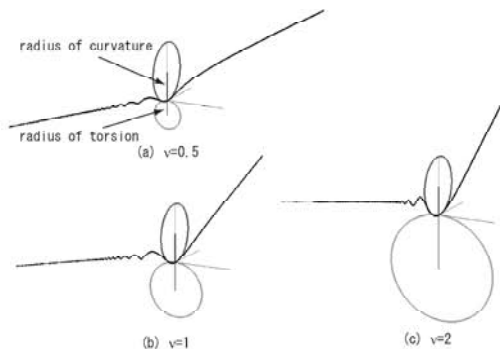


図5 $\alpha = 0(\Lambda = 1), \beta = 0(\Omega = 1)$ の様々な ν の美的空間曲線

図4に、曲率半径および捩率半径ともに単調増加な空間曲線の全体像の概要を示す (Λ, Ω, ν は全て1とした)。(a1), (a2)などは、図3(a)の表のNo.の欄に対応している。なお、式(9)の初期条件において、 \mathbf{x}_0 を原点、 \mathbf{t}_0 と \mathbf{u}_0 はそれぞれ x, y 軸方向の単位ベクトルとしている。本報告では、曲率半径が単調増加、捩率半径が単調減少な美的空間曲線の取り扱い、図3の分類を除いてスペースの関係で割愛する。

美的空間曲線は、 α, β だけでなく、 Λ, Ω, ν の値によっても、曲線形状が変化する。図5に、 $\alpha = 0(\Lambda = 1), \beta = 0(\Omega = 1)$ のさまざまな ν (基準点における捩率半径)の美的空間曲線を示す。 ν が大きいことはその点における従法線ベクトルの変化が小さいことを意味し(従って、その点から捩率半径がさらに大きくなる方向の曲線がほぼ平面に乗るようになることを意味し)。 ν が小さいことはその点における従法線ベクトルの変化が大きいくことを意味する。

図6に、 $\alpha = 0, \beta = 0$ の様々な Λ, Ω の曲線を示す。 $\Lambda = 0$ の場合には $\rho = \text{const.}$ 、 $\Omega = 0$ の場合には $\mu = \text{const.}$ である。よって、 $\Lambda = 0$ かつ $\Omega = 0$ の場合には、 α および β の値に依存せず、常螺旋(helix)[4]になる。 Λ, Ω は、常螺旋からの離れ具合を表すパラメータであるということもできる。 Λ または Ω のいずれかが0の場合には、図3の性質が成り立たなくなることに注意されたい。また、 $\alpha = \pm\infty$ および $\beta = \pm\infty$ の極限においても、 ρ および μ が const. になることから、常螺旋になる。よって、 α および β の値を、大きく(または小さく)すると曲線は常螺旋に近づく。

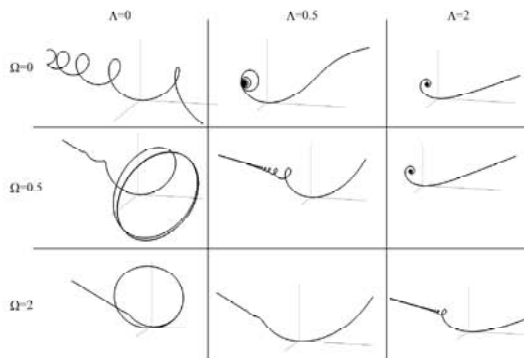


図6 $\alpha = 0, \beta = 0$ の様々な Λ, Ω の曲線

4 まとめ

本報告では、美的曲線における「曲率半径と弧長の関係」を「捩率半径と弧長の関係」にも適用した曲線を美的空間曲線と定義し、美的空間曲線の全体像を解明した。

今後の研究としては、美的空間曲線セグメントの対話的な生成、接続の問題の解決、Bézier や NURBS 曲線による表現などがあげられる。

参考文献

- [1] J. A. Adams, The intrinsic method for curve definition, Computer Aided Design, Vol 7, No.4, pp.243-249, Oct. 1975.
- [2] G. Farin, Curves and Surface for CAGD 4th Edition, Academic Press, 2001.
- [3] G. Farin, Class A Dézier curves, Computer Aided Geometric Design, Vol. 23, No. 7, pp. 573-58, 2006.
- [4] A. Gray, Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematics, 2nd Edition, CRC Press, 1997.
- [5] 原田利宣: 美しい空間曲線の性質とそれを応用した曲線作成, 精密工学会全国大会シンポジウム資料集, pp.96-97, 2007.
- [6] 三浦 憲二郎, 藤澤誠, 美的曲線の3次元への拡張と B spline 曲線による近似, Visual Computing/グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, pp.83-88, 2006.
- [7] 吉田典正, 斎藤隆文: 美しい曲線セグメント, 情報処理学会グラフィックスと CAD 研究会, No. 121, pp.97-102, 2005.
- [8] 吉田典正, 斎藤隆文: 美しい曲線の全体像解明と対話的制御, Visual Computing/グラフィックスと CAD 合同シンポジウム, pp.77-82, 2006
- [9] N. Yoshida and T. Saito, Interactive Aesthetic Curve Segment, The Visual Computer (Pacific Graphics), Vol. 22, No.9-11, pp.896-905, 2006.
- [10] N. Yoshida and T. Saito, Quasi-Aesthetic Curves in Rational Cubic Bezier Forms, Computer-Aided Design & Applications, Vol. 4, Nos. 1-4, pp.477-486, 2007.