

## 固有値解析によるクベルカ・ムンク理論の一般化

新谷 幹夫<sup>†1</sup> 白石 路雄<sup>†1</sup> 土橋 宜典<sup>†2</sup>  
岩崎 慶<sup>†3</sup> 西田 友晃<sup>†4</sup>

クベルカ・ムンク理論は、絵の具などの散乱物質の反射率（色）を解析的に与えることができ、絵画調画像生成など非写実的レンダリングで一般的に利用されているが、2光束理論であるため、BRDFが必要とされる写実的レンダリングでは適用できない。

本報告では、固有値解析によりクベルカ・ムンク理論を多光束に一般化できることを示す。まず、ボリュームレンダリング方程式を層状均質媒体に適用し、方向を離散化することにより連立1次元微分方程式を得る。次いで、固有値解析を適用し、この方程式の解析解を求める。さらに、複数の媒質層を連結した場合の連結公式を示し、その近似手法も提案する。

### Generalization of the Kubelka-Munk Theory by Eigen-value Analysis

MIKIO SHINYA,<sup>†1</sup> MICHIO SHIRAISHI,<sup>†1</sup> YOSHINORI DOBASHI,<sup>†2</sup>  
KEI IWASAKI<sup>†3</sup> and TOMOYUKI NISHITA<sup>†4</sup>

Kubelka-Munk theory analytically calculates reflectance and transparency of scattering materials and is widely used in non-photo-realistic rendering. However, it does not provide BRDF (Bidirectional Reflectance Distribution Function) and has been hard to be applied to photo-realistic rendering.

This paper generalizes the theory and derives a quasi-analytic formulae providing BRDFs of scattering layered uniform materials. The volume rendering equation is applied to a layered surface and analytically solved by using the eigen-value analysis. It also presents theories to concatenating multiple layered-materials, as well as their polynomial approximation.

#### 1. はじめに

クベルカ・ムンク理論<sup>1)</sup>は、例えば、絵の具などの散乱物質の反射率（色）を解析的に与えることができ、絵画調画像生成など非写実的レンダリングで一般的に利用されている<sup>2)</sup>。しかし、写実的レンダリングでは反射率の方向分布 (BRDF: Bidirectional Reflectance Distribution Function) などを用いることが必要であり、適用するには方向依存性を扱える様に一般化する必要がある。Hanrahanらはボリュームレンダリング方程式をモンテカルロ法を用いて解くことで、層状均質散乱物体のBRDFを求めた<sup>3)</sup>。しかし、

- 収束に時間がかかる
- 体系化が不十分である

などの課題を残している。この発表後、研究の焦点はBSSRDFなど表面下散乱に移り、BRDFの算出に関してはあまり進展を見なかった。

筆者らは、固有値解析を適用することで、層状均質媒質の散乱場を準解析的に求められることを示し、半透明

散乱媒質レンダリングへの応用を論じてきた<sup>4)</sup>。同手法におけるBRDF算出部分は、クベルカ・ムンク理論の方向分布に関する一般化と見なすことができる。本報告では、BRDFの算出に焦点を絞り、散乱層が複数ある場合の計算手法など、理論の詳細を示す。

#### 2. クベルカ・ムンク理論

クベルカ・ムンク理論は、散乱率、吸収率から上下2方向の反射率と透過率を算出する2光束理論であり、複数の媒体を重ねた場合にも適用できる。本章では、次章の一般化を意識しながら、体系的に式の導出を行う。

##### 2.1 単層の反射率・屈折率

図1に示すように、z軸に垂直に均質散乱媒質層を置く。散乱率を $\sigma_s$ 、吸収率を $\sigma_a$ 、減衰率を $\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$ とし、z軸の正負の2方向の光強度を $I = (i_+, i_-)^t$ と置く。ただし、 $(\ )^t$ は転置を示している。このとき、進行方向に $dl$ 進んだときの $I$ の増減は、減衰による減少と逆方向からの散乱による増加で、

$$\begin{aligned} di_+ &= -\sigma_t i_+ dl + \sigma_s i_- dl \\ di_- &= \sigma_s i_+ dl - \sigma_t i_- dl \end{aligned} \quad (1)$$

と表せる。 $i_+$ は正の方向に進行するので $dz = dl$ であり、 $i_-$ は逆方向なので、 $dl = -dz$ となるため、zに関

<sup>†1</sup> 東邦大学理学部, Toho University  
<sup>†2</sup> 北海道大学, Hokkaido University  
<sup>†3</sup> 和歌山大学, Wakayama University  
<sup>†4</sup> 東京大学, The University of Tokyo

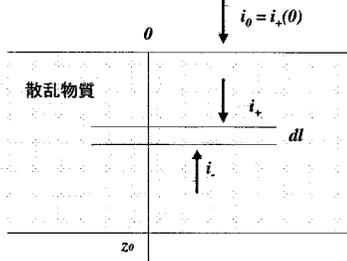


図1 層状散乱媒質

する常微分方程式

$$di_+/dz = -\sigma_t i_+ + \sigma_s i_- \quad (2)$$

$$di_-/dz = -\sigma_s i_+ + \sigma_t i_-$$

を得る。行列表現すれば、

$$dI/dz = QI \quad (3)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\sigma_t & \sigma_s \\ -\sigma_s & \sigma_t \end{pmatrix}$$

となる。この方程式は、以下のように  $Q$  を固有値分解することで解くことができる。

$$V^{-1}QV = \Lambda$$

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

ここで、 $v_i = (v_{i1}, v_{i2})^t$ 、 $\lambda_i$  はそれぞれ  $Q$  の固有ベクトルと固有値であり、

$$\lambda_{1,2} = \pm(\sigma_t^2 + \sigma_s^2)^{1/2} \quad (4)$$

$$v_{1,2} = (1/(2a^2 \pm 2ab)^{1/2}) \begin{pmatrix} 1 \\ a \pm b \end{pmatrix}$$

$$a = \sigma_t/\sigma_s$$

$$b = (a^2 - 1)^{1/2}$$

である。ただし、 $Q$  は非対称なので、 $V$  は正規行列でないことに注意が必要である。

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} \tilde{i}_1 \\ \tilde{i}_2 \end{pmatrix} = V^{-1} \begin{pmatrix} i_+ \\ i_- \end{pmatrix}$$

と置けば、

$$d\tilde{i}_j/dz = \lambda_j \tilde{i}_j$$

なので、

$$\tilde{i}_j(z) = c_j \exp(\lambda_j z) \quad (5)$$

と解析解を得る。 $\tilde{I}$  に逆変換を施し、

$$I = V\tilde{I}$$

により解が得られる。

## 2.2 境界条件

式(5)の定数  $c_j$  は境界条件で決定できる。図1に示すように、入射面  $z=0$  では  $i_+$  は入射光に一致する。一方、出射面  $z=z_0$  では反射光が0となる。したがって、入射光の強度を  $i_0$  とすれば、

$$i_+(0) = i_0, \quad i_-(z_0) = 0$$

が境界条件となる。この境界条件から、係数ベクトル  $c = (c_1, c_2)^t$  は以下のように計算される。まず、行列  $F$  を

$$F = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{21} \exp(\lambda_1 z_0) & u_{22} \exp(\lambda_2 z_0) \end{pmatrix}$$

と定義する。すると、境界条件は、

$$Fc = \begin{pmatrix} i_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と書けるので、

$$c = F^{-1} \begin{pmatrix} i_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

と計算できる。すなわち、

$$I = V \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 z) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 z) \end{pmatrix} F^{-1} \begin{pmatrix} i_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。

式(4)を代入して整理すると、

$$i_+(z) = i_0 \cdot (a \sinh(b\sigma_s(z_0 - z)) + b \cosh(b\sigma_s(z_0 - z))) / (a \sinh(b\sigma_s z_0) + b \cosh(b\sigma_s z_0)) \quad (9)$$

$$i_-(z) = i_0 \cdot \sinh(b\sigma_s(z_0 - z))$$

$$/ (a \sinh(b\sigma_s z_0) + b \cosh(b\sigma_s z_0))$$

となる。 $z=0$  および  $z=z_0$  を代入すれば、見慣れた反射率  $R$ 、透過率  $T$  の公式

$$T = b / (a \sinh(b\sigma_s z_0) + b \cosh(b\sigma_s z_0)) \quad (10)$$

$$R = \sinh(b\sigma_s z_0) / (a \sinh(b\sigma_s z_0) + b \cosh(b\sigma_s z_0))$$

を得る。

## 2.3 連結公式

絵の具を重ね塗りするような場合には、複数の層を連結した散乱系を扱う必要がある。図2に示すように、2つの層を連結した系を考える。層  $j$  の反射率、透過率を  $R_j, T_j$  とする。各境界における強度を図のように  $I_j = (i_{j+}, i_{j-})^t$  と置くと、各層での散乱は行列  $A_j$  を用いて、

$$I_j = A_j I_{j-1}$$

と表すことができる。したがって、連結した系の散乱特性は、各系の  $A$  行列の積、

$$I_2 = (A_2 A_1) I_0$$

で求められることになる。すなわち、 $A_j$  と  $R_j, T_j$  が、相互に変換できれば、連結の計算ができる。この変換は以下のように求められる。まず、

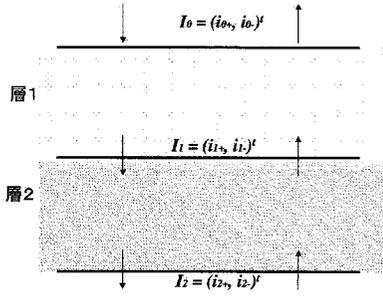


図2 層状散乱媒質の連結

$$\begin{pmatrix} i_{(j+1)+} \\ i_{j-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}^{(i)} & R_{12}^{(i)} \\ R_{21}^{(i)} & R_{11}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{(j)+} \\ i_{(j+1)-} \end{pmatrix} \quad (11)$$

とおく。ここで、

$$\begin{aligned} R_{11}^{(i)} &= R_{22}^{(i)} = T_i \\ R_{21}^{(i)} &= R_{12}^{(i)} = R_i \end{aligned}$$

である。これを変形し、 $i_{(j+1)\pm}$  を  $i_{j\pm}$  で表し、係数を見比べると

$$\begin{aligned} A_{11} &= R_{11} - R_{12}R_{22}^{-1}R_{21} \\ A_{12} &= R_{12}R_{22}^{-1} \\ A_{21} &= -R_{12}^{-1}R_{21} \\ A_{22} &= R_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

を得る（肩の添え字は省略）。同様に、

$$\begin{aligned} R_{11} &= A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \\ R_{12} &= A_{12}A_{22}^{-1} \\ R_{21} &= -A_{22}^{-1}A_{21} \\ R_{22} &= A_{22}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。結局、連結系の反射率、透過率  $R^{(12)}$  は

$$\begin{aligned} R_{11}^{(12)} &= R_{11}^{(2)}(R_{11}^{(1)} + R_{12}^{(1)})(1 - R_{21}^{(2)})^{-1} \\ &\quad R_{21}^{(2)}R_{11}^{(1)} \\ R_{12}^{(12)} &= R_{12}^{(2)}R_{11}^{(2)}R_{12}^{(1)}(1 - R_{21}^{(2)}R_{12}^{(1)})^{-1} \\ R_{21}^{(12)} &= R_{21}^{(1)} + R_{22}^{(1)}(1 - R_{21}^{(2)}R_{12}^{(1)})^{-1}R_{21}^{(2)}R_{11}^{(1)} \\ R_{22}^{(12)} &= R_{22}^{(1)}(1 - R_{21}^{(2)}R_{12}^{(1)})^{-1}R_{22}^{(2)} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。

### 3. 一般化

前章の議論では強度  $i_{\pm}$  はスカラーであったが、これを  $n$  次元ベクトルと読み直せば、ほぼ機械的に  $n$  方向の強度分布が算出できる。これにより、2 光束理論から多光束への一般化がなされる。

#### 3.1 支配方程式

散乱物質中の光強度は、位置  $x$ 、方向  $s$  に関して、以

下のポリュームレンダリング方程式に従って変化する。

$$(\nabla \cdot s)I(x, s) = -\sigma_t I + \sigma_s \int_S p(s, s')I(x, s')ds' \quad (15)$$

ここで、方向  $s'$  に関する積分は単位球面  $S$  上で行う。 $p$  は位相関数であり、Heney-Greenstein の式、

$$p(s, s') = (1/4\pi)(1-g^2)/(1+2g(s \cdot s') + g^2)^{2/3} \quad (16)$$

などで表される。ここで、 $g$  はパラメータで平均方向余弦に等しい。

さて、散乱媒質が層状均質で照明も均一である場合には、散乱場は深さ  $z$  と方向  $s$  のみの関数となる。式 (15) の  $\nabla$  は  $z$  に関する常微分に置き換わるので、次の 1 階線形常微分方程式を得る。

$$\cos \theta dI(z, s)/dz = -\sigma_t I + \sigma_s \int_S p(s, s')I(z, s)ds' \quad (17)$$

ただし、 $\theta$  は  $s$  と  $z$  軸のなす角である。式 (17) はクベルカ・ムンク方程式 (3) を多光束へ一般化したものとみなせる。

Hanrahan らはこの方程式をモンテカルロ法を用いて解き、BRDF を算出した<sup>3)</sup>。しかし、モンテカルロ法は収束が遅く、実時間の応用には耐えられない。また、散乱層の連結なども体系的に扱えない。

そこで、方向  $s$  を  $n$  方向に離散化し  $\{s_i\}$  ととり、強度分布  $I$  を  $n$  次元ベクトルとして表現する。係数を  $n \times n$  行列にまとめれば、連立常微分方程式系

$$K(d/dz)I(z) = \rho(-\sigma_t + \sigma_s P)I(z) \quad (18)$$

を得る。ここで、 $K = \{k_{ij}\}$  は余弦を要素とする対角行列、 $P = \{p_{ij}\}$  は対称行列で、それぞれの要素は

$$\begin{aligned} k_{ii} &= \cos \theta_i \\ p_{ij} &= p(s_i, s_j) \end{aligned}$$

である。

式 (18) とクベルカ・ムンクの方程式 (3) を見比べると、

$$Q = K^{-1}(-\sigma_t + \sigma_s P)$$

と置けば、形式上まったく同じになるので、結果を踏襲することができる。

#### 3.2 解の一般化

境界条件の扱いを容易にするため、強度分布を、 $z$  軸に関して正方向、負方向に別け、それぞれを  $i_+$ 、 $i_-$  と置く。また、

$$I = \begin{pmatrix} i_+ \\ i_- \end{pmatrix}$$

とする。前章と同様に、 $Q$  を固有値分解

$$V^{-1}QV = \Lambda$$

を施し、 $v_i$ 、 $\lambda_i$  をそれぞれ  $Q$  の固有ベクトルと固有値とする。

すると、入射光分布を  $i_0$  とすれば、

$$I(z) = V \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 z) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \exp(\lambda_n z) \end{pmatrix} F^{-1} \begin{pmatrix} i_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

と計算できる。行列  $F$  は、やや煩雑になるが、以下のよう  
に計算される。

まず、対角行列  $E$  を

$$E = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 z_0) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \exp(\lambda_n z_0) \end{pmatrix}$$

と定義する。また、固有ベクトルも正方向・負方向に分割し、

$$V = \begin{pmatrix} V_+ \\ V_- \end{pmatrix}$$

$$D_- = V_- E$$

とし、

$$F = \begin{pmatrix} V_+ \\ V_- E \end{pmatrix}$$

と求める。 $F$  の逆行列  $F^{-1}$  も正方向・負方向に分割し

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} F_+^{-1} \\ F_-^{-1} \end{pmatrix}$$

とおけば、反射・透過行列は

$$R = X_- F_-^{-1} + \quad (20)$$

$$T = V_+ E F_+^{-1}$$

と計算できる。この式自体は解析的であるが、固有値解析に数値処理を伴うので、準解析解と呼ぶことにする。

### 3.3 連結公式とその近似

層の連結に関しても、同様の議論が成り立ち、連結の式 (14) における  $R_{ij}$  を行列、逆数を逆行列と読み直せば、そのまま成立する。連結公式は逆行列を含むが、以下のような近似を行って効率化することも可能である。

反射・透過によりエネルギーは減少するので、その固有値の絶対値は 1 より小さい。したがって、

$$(1 - R_{ij})^{-1} = 1 + R_{ij} + R_{ij}^2 + \dots$$

などと展開することができる。連結公式をこのように展開すると、例えば、

$$\begin{aligned} R_{22}^{(12)} &= R_{22}^{(1)} (1 - R_{21}^{(2)} R_{12}^{(1)})^{-1} R_{22}^{(2)} \\ &= R_{22}^{(1)} (1 + R_{rr} + R_{rr}^2 + \dots) R_{22}^{(2)} \\ R_{rr} &= R_{21}^{(2)} R_{12}^{(1)} \end{aligned} \quad (21)$$

とできる。このうち第 1 項は層 2 - 層 1 を直接通過する強度、第 2 項は層 2 - 層 1 - 層 2 - 層 1 と 1 往復した

後に通過する強度、などと解釈することができる。透過率、反射率が小さい場合には、上位少数の項でよい近似ができる。さらに、行列が疎であれば、処理の高速化が可能である。

### 3.4 反射・屈折と表面反射

塗料の表面でフレネル反射や屈折が起こる場合や、下地が不透明であり境界面で表面反射を起こすような場合は、それぞれの反射・透過行列を求め、連結させることで、全体の散乱を求めることができる。

不透明物体では、透過行列は 0 であり、反射行列は、BRDF を離散化したものになる。屈折やフレネル反射の場合は、入射方向  $s_i$  に対して、反射・屈折方向  $s_{ref}$  及び反射・屈折率  $f_r$  をスネル則やフレネル公式から求め、

$$f_r \delta(s - s_{ref}(s_i))$$

を離散化することで、反射・透過行列を求める。ただし、 $\delta()$  はデルタ関数を表している。

## 4. 実験

### 4.1 計算手順

これまで述べてきた反射・透過行列の計算手順をまとめると以下ようになる。

- (1) 行列  $P, K$  の設定
- (2) 固有値解析により  $X, X^{-1}$  を計算
- (3) 逆行列計算により行列  $F^{-1}$  を求める
- (4) 反射・透過行列  $R_{ij}$  を求める (式 (20))
- (5) 複数層の場合は連結の計算 (式 (14))

### 4.2 強度分布

準解析解の計算例を幾つか示す。ただし、表示の見易さを考え、本節では 2 次元の例を示している。まず、図 3 に散乱光の固有ベクトルを何例か示す。第 1 固有ベクトルは広く拡散する分布であり、均質性が高い。以下、徐々に方向性が強くなってゆく。

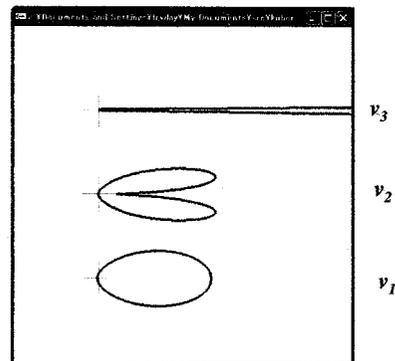


図 3 固有ベクトルの例

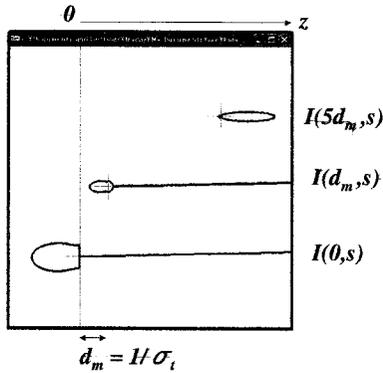


図 4 強度分布の位置による変化

図 4 に、 $z$  方向（図の右向き）に平行光を入射したときの準解析解を求め、 $z = 0, 1/\sigma_t, 5/\sigma_t$  における分布を示している。入射面では反射光が拡がっているが、透過光は入射方向のみである。深さ  $z$  が増えると透過光が拡がり、減衰していく様子が見られる。

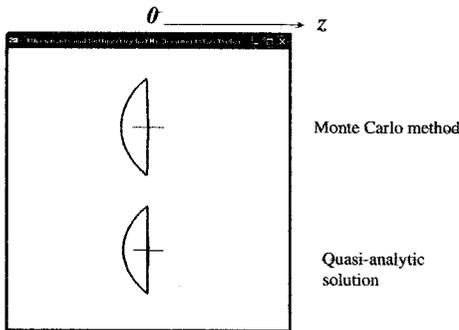


図 5 モンテカルロ法と準解析解

図 5 にモンテカルロ法との比較を示す。モンテカルロ法では、入射光線は確率的に散乱を繰り返し出射する。多数の入射光線を追跡し、出射方向に関するヒストグラムを作成することで、反射光強度分布を作成する。これを全ての入射方向に関して行えば、BRDF が算出される<sup>3)</sup>。算出精度はサンプル光線数に依存するが、本実験ではノイズが目立たなくなったサンプル数として、 $10^5$  サンプル/方向を用いた。図に示されるように、準解析解とモンテカルロ法の収束解とはよく一致している。モンテカルロ法では、1 方向の入射方向の反射強度を求めるのに 131 秒かかっている (AMD Athron 64, 2GHz)。BRDF を求めるためには全ての入射方向 (303 方向) に関して、

反射光強度を求める必要がある。したがって、BRDF 算出に要する時間は  $131 \times 303$  秒と見積られる。一方、提案手法では 8.5 秒で BRDF が計算される。すなわち、提案手法が 4,000 倍以上高速であることが分かる。

#### 4.3 散乱特性による変化

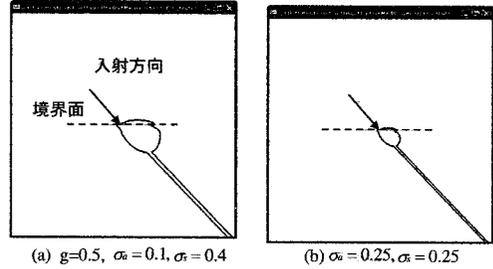


図 6 アルベドによる反射・透過分布の変化

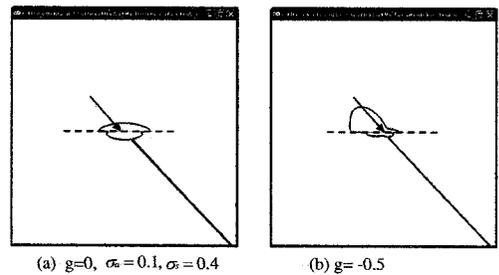


図 7 位相関数による反射・透過分布の変化

反射・透過分布は、アルベド ( $\sigma_s/\sigma_t$ ) や位相関数などにより変化する。アルベドを変化させた場合の反射・透過分布を図 6 に示す。図のように、アルベドが減少すると相対的に吸収が大きくなるため、反射、透過の強度が減少する。しかし、分布の形自体には大きな変化はみられない。

一方、位相関数を変化させた場合には、分布形状が大きく変化する。位相関数を Henyey-Greenstein の式 (16) で定義し、平均方向余弦  $g$  を変化させた場合の反射・透過分布を図 7 に示す。図のように、 $g < 0$  の場合は後方への散乱が強くなり、光源方向への反射が強くなる事が分かる。

#### 4.4 連 結

図 8 に示すように、屈折率 1.3,  $\sigma_a = 0.1, \sigma_s = 0.4$  の散乱物質を  $z_0 = 1/(2\sigma_t)$  の厚さで反射率 0.8 のランバート面に塗りつける場合を考える。この系は、散乱物質表面での反射・屈折 (層 1)、散乱物質内での散乱 (層 2)、ラ

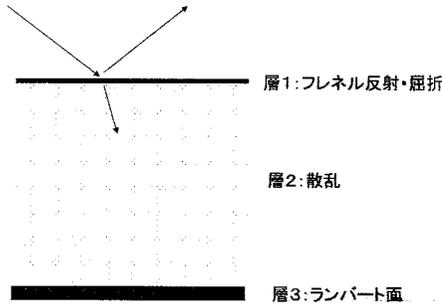


図8 3層からなる連結系の例

ンバート面での反射（層3）、の3層から構成される。上方45度方向から平行光を入射した場合の、それぞれの層の反射・透過光分布を図9 (a)-(c) に示す。ただし、水平線の上側に反射分布を、下側に透過分布を示している。また、3層を連結した場合の反射分布を (d) 図に示す。

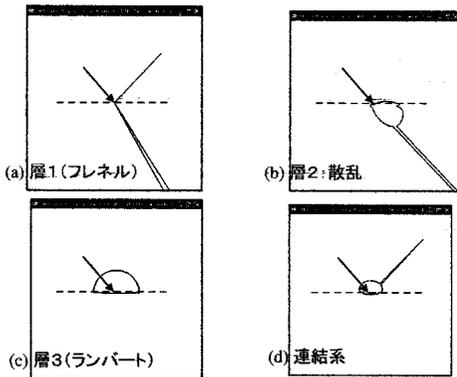


図9 連結系の計算例

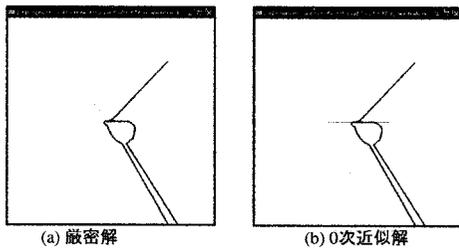


図10 2層連結系の近似解

透過分布も観察できるように、層1 および層2からな

る系を考え、展開式 (21) の0次近似、

$$(1 - R_{rr})^{-1} \approx 1$$

を用いた場合の誤差を評価する。45度入射の場合のフレネル反射率は約0.1である。また、クベルカ・ムンクの式 (10) を用いると、層2の反射率は0.26と見積もることができる。したがって、 $\|R_{rr}\| \sim 0.026$  と見積もることができるので、0次近似でも高い精度が維持できそうである。図10-(a)に逆行列を用いた解（厳密解とみなす）、(b)図に0次近似解を示す。図のように、ほとんど差は認められない。実際、RMS誤差を測定したところ、わずかに0.16%であった。誤差が見積もりより格段に小さい理由は、強度の大半が鏡面反射に集中しているためと推測できる。ちなみに、1次近似を行うと、RMS誤差は0.018%となる。

## 5. まとめ

本報告では、固有値分析を用いることで、クベルカ・ムンク理論を多光束に一般化できることを示した。これにより、層状散乱物質のBRDFを準解析的に求めることが可能となった。同手法は、従来のモンテカルロ法による解法と比較し、極めて高速である。また、複数層を重ねた散乱系においても、クベルカ・ムンク理論と同様に連結公式が成り立つことを示し、その厳密解および近似解を導出した。今後は本理論を具体的なレンダリング手法に応用し、有効性を検証してゆく。

## 参考文献

- 1) P. Kubelka, New contributions to the optics of intensely light-scattering materials, part i, Journal of Optical Society of America, vol. 38, pp.448-457, 1948.
- 2) C. Curtis, S. Anderson, J. Seims, K. Fleischer, D. Salesin, Computer-generated watercolor, SIGGRAPH'97, pp. 1032-1039, 1997.
- 3) P. Hanrahan, W. Krueger, Reflection from layered surfaces due to subsurface scattering, SIGGRAPH93, pp.165-174, 1993.
- 4) 新谷、白石、土橋、岩崎、西田, 準解析解を用いた多重散乱物質のレンダリング, Visual ComputingグラフィクスとCAD合同シンポジウム2007, pp.119-124, 2007.