

## 3Dメッシュモデルのインタラクティブな変形操作

小川健太 藤井智 村上健治 増田宏  
東京大学大学院 工学系研究科

四面体メッシュモデルは、物体の内部構造を表現するために有用である。近年、メッシュモデルの頂点近傍を制約とするメッシュ変形手法が盛んに研究されているが、3Dメッシュに適用できる手法の提案は非常に少ない。Zhouらは四面体メッシュの内部頂点に対して線形制約を導入したが、その適用には、ベクトル量の回転を必要とし、処理も煩雑であった。本論文で提案する手法では、内部頂点の制約として平均値座標を利用した新しい線形制約を導入する。また、サーフェスモデルに対して、四面体を定義して立体の潰れを抑制する方法についても示す。

### Interactive Editing for Tetrahedron Meshes

Kenta Ogawa Satoshi Fujii Kenji Murakami Hiroshi Masuda  
School of Engineering, The University of Tokyo

Tetrahedron mesh models are useful to represent internal structure of 3D objects. Recently, various interactive deformation techniques have been proposed, but deformation techniques for 3D mesh models are very few. In this paper, we propose an interactive mesh deformation technique that can deform tetrahedron mesh models. In our method, we assign mean curvature normals to the boundary vertices of 3D meshes and mean value coordinates to internal vertices. In our experiments, our method could deform volumetric mesh models in an interactive manner. In addition, we will show how to preserve volumetric properties on the basis of tetrahedrized mesh models.

#### 1. 目的

メッシュモデルはCGやCAEで用いられる標準的な表現である。代表的な形式として用いられるのは、物体の表面のみを記述した三角形メッシュモデルと、物体の内部についても記述した四面体メッシュモデルである。通常は三角形メッシュが多く用いられるが、異なる材質から成る物体を記述したい場合や、人体などの内部構造を記述したい場合などには、図1に示すような四面体メッシュがよく用いられる。

近年、CGコンテンツの作成や編集のために、インタラクティブなメッシュ変形手法の研究が盛んに行われている。これらの手法では、メッシュモデルの各頂点で離散平均曲率を計算し、その値を保存するように変形を行うことで、詳細形状を保存したデフォーメーションを実現する[1]。しかし、これらの手法は、物体表面の制約のみを記述するため、四面体メッシュには簡単に適用できない。そこで、本研究では、四面体メッシュモデルを効率よく、リアルタイムに変形する手法を開発する。

四面体メッシュに適用できるインタラクティブなメッシュ変形の研究は少ない。Zou[2]らは、四面体メッシュの内部頂点に関して Volumetric Graph Laplacian を計算して、

四面体モデルを変形した。しかし、この手法では、内部頂点に関する制約がグローバル座標系に依存するベクトル量を用いているため、変形に際しては、そのベクトルをリアルタイムに回転する必要がある。ベクトルの回転を補間するためには、重みを適切に指定することが必要である。Zhouらは、三角形メッシュの内部にはほぼ均一な四面体を生成することでこの問題を回避したが、一般の四面体モデルが入力される場合にはこの前提は成立しない。

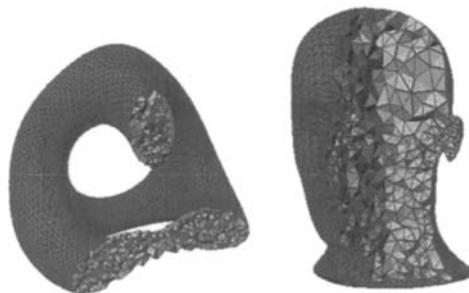


図1. 3Dメッシュモデルの例

本研究では、まず、2章で四面体メッシュモデルの変形手法を示す。我々は、物体内部の制約として平均値座標 (Mean Value Coordinates) を利用する。この制約は、グローバル座標に依存したベクトル量を持たないため、回転について考慮する必要がない。そのため、アルゴリズムが単純であり、実装が容易である。次に、3章において、閉じた三角形メッシュモデルの大変形に対応した手法を示す。立体感を保持するために、四面体分割を利用した立体制約を導入する。

## 2 平均値座標を用いた3Dメッシュ変形

本手法では、入力として、四面体メッシュを考える。四面体メッシュは、図2に示すように、物体表面と物体内部に分けられる。ここでは、物体表面上の頂点を境界頂点、それ以外の頂点を内部頂点と呼ぶ。それぞれに対して、異なる制約を定義する。

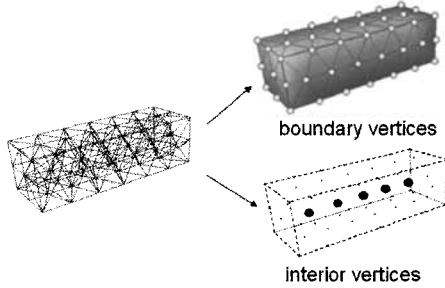


図2. 境界頂点と内部頂点

### 2.1 境界頂点の制約

物体表面では曲率が定義できるので、平均曲率を保存する制約を与える。ここで、 $\kappa_i$ は平均曲率、 $\mathbf{n}_i$ は法線ベクトル、 $A_i$ は頂点 $\mathbf{p}_i$ に関するボロノイ面積、 $N(i)$ は頂点 $\mathbf{p}_i$ の1近傍の頂点の添字集合、 $\mathbf{p}_i$  ( $i \in \Lambda$ )はメッシュの頂点である。また、 $\alpha_j$ と $\beta_j$ は、エッジ $(i, j)$ に隣接する二つの三角形の頂点角である。 $\delta_i$ は初期値、 $R_i$ は回転行列である。

$$\mathbf{L}(\mathbf{p}_i) \equiv \frac{1}{4A_i} \sum_{j \in N(i)} (\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij})(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j) = R_i \delta_i \quad (1)$$

さらに、境界頂点に対しては、ユーザが固定部とハンドル部に次の位置制約を定義する。

$$\mathbf{p}_j = \mathbf{u}_j \quad (2)$$

回転行列  $R_i$  は、各頂点での回転軸  $\mathbf{n}_i$  と回転角  $\theta_i$  に関する次の制約を解いて決定する。ただし、 $\mathbf{r}_i = (\theta_i/2)\hat{\mathbf{n}}_i$  である。

$$\begin{cases} \mathbf{L}(\mathbf{r}_i) = 0 & (i \in \text{境界頂点}) \\ \mathbf{r}_j = \mathbf{c}_j & (j \in \text{固定・ハンドル頂点}) \end{cases} \quad (3)$$

### 2.2 物体内部の制約

Juら[4]とFloaterら[5]は、閉じた三角形メッシュ $S$ の

頂点座標 $\{\mathbf{q}_i\}$ の線形和として、任意の点 $\mathbf{p}_i$ を以下のように表した。

$$\mathbf{p}_i = \sum_j w_{ij} \mathbf{q}_j \quad (4)$$

重み $w_{ij}$ を固定することで、メッシュ $S$ の変形に追従して点 $\mathbf{p}_i$ が移動する。

重み $w_{ij}$ の計算では、点 $\mathbf{p}_i$ を中心とする単位球面上にメッシュ $S$ を投影した図形 $\tilde{S}$ に関して、式(5)が一般に成立することを利用する。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i &= \int_{\tilde{S}} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}_i|} d\tilde{S} / \int_{\tilde{S}} \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}_i|} d\tilde{S} \\ &= \left( \sum_j \int_{\tilde{T}_j} \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}_i|} d\tilde{T}_j \right) / \int_{\tilde{S}} \frac{1}{|\mathbf{q} - \mathbf{p}_i|} d\tilde{S} \end{aligned} \quad (5)$$

メッシュ $S$ を構成する三角形 $T_i$ 上の点 $\mathbf{q}$ は、三角形の頂点座標の線形和として、 $\mathbf{q} = \alpha(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{q}_i + \beta(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{q}_j + \gamma(\hat{\mathbf{q}}) \cdot \mathbf{q}_k$ とかけられるので、式(5)は式(4)の形式に変形できる[4][5]。

我々はこの関係式を用いて内部頂点に関する制約を記述する。図3のように、内部頂点と直接連結している近傍頂点を取り出すと、近傍頂点は、内部頂点を囲む閉じたメッシュを形成する。したがって、平均値座標を用いれば、内部頂点は、近傍頂点の線形和として記述できる。ただし、式(1)と次元を同じにするために閉メッシュの表面積 $S_i$ を用いて、以下の制約式を定義する。

$$V(\mathbf{p}_i) \equiv \frac{1}{S_i} \left( \mathbf{p}_i - \sum_{j \in N(i)} w_{ij} \mathbf{p}_j \right) = 0 \quad (6)$$

この制約式では右辺が0なので、Zhouらの方法と異なり、回転は必要ない。したがって、式(3)の計算は、境界頂点に対してのみ行えばよい。

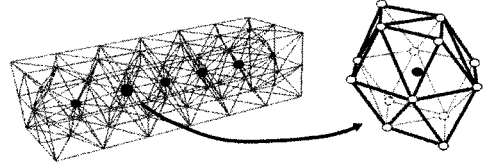


図3. 内部頂点の近傍頂点

### 2.3 頂点座標の計算

以上より、四面体メッシュに関する制約は以下のようにまとめられる。

$$\begin{cases} V(\mathbf{p}_i) = 0 & (i \in \text{内部頂点}) \\ L(\mathbf{p}_i) = R_i \delta_i & (i \in \text{境界頂点}) \\ \mathbf{p}_i = \mathbf{u}_i & (i \in \text{固定・ハンドル頂点}) \end{cases} \quad (7)$$

式(3)を解いて、境界頂点 $\mathbf{p}_i$ での回転行列 $R_i$ を算出したのち、式(7)の制約を満たす頂点を算出する。計算は以下の最小2乗法を用いる。 $\beta$ は十分大きな値を与える。制約はすべて線形なので、線形方程式を解く問題に帰着される。

$$\arg \min_{\{p_i\}} \left\{ \sum_{i \in T} V(p_i)^2 + \sum_{i \in B} (L(p_i) - R_i \delta_i)^2 + \beta \sum_{i \in B_p} (p_i - u_i)^2 \right\} \quad (8)$$

#### 2.4. 四面体メッシュの変形結果

図4-7に四面体メッシュの変形結果を示す。内部頂点の変形を示すために、断面図についても示す。図5では、粗密のある場合でも、式(6)の制約によって整合的に変形できていることを示している。式で(6)は、小さい四面体ほど表面積が小さいので、制約は相対的に強くなる。図6,7は内部のエッジが整合的に回転していることを示している。式(6)の右辺が0であるために、明示的に回転させなくても、内部構造は物体表面の回転に応じて回転する。

表1は、計算時間を示している。最小2乗法は線形方程式を解く問題に帰着する。ここでは、行列を作成する時間と、インタラクティブな変形を行うための前処理として、行列をコレスキー分解する時間を示している。これらの前処理計算を行った後は、マウスの移動に追従して、インタラクティブに変形できることを確認した。使用した計算機は、1.40 GHz の Intel Core2 Duo CPU のノートPCである。

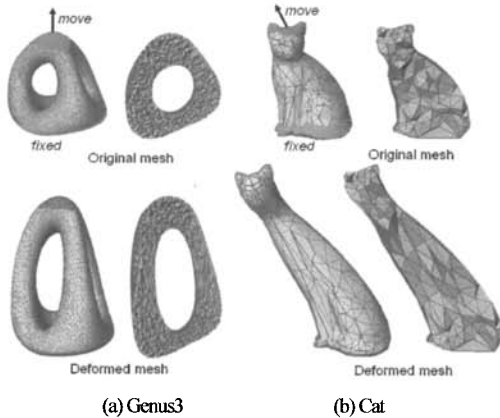


図4. 四面体メッシュの変形



図5. 粗密のある四面体メッシュの変形 (Mannequin)

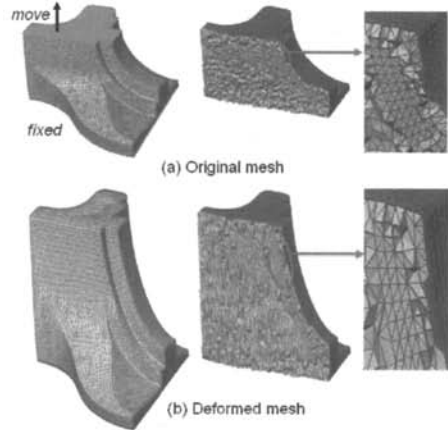


図6. 内部構造の回転 (Fandisk)

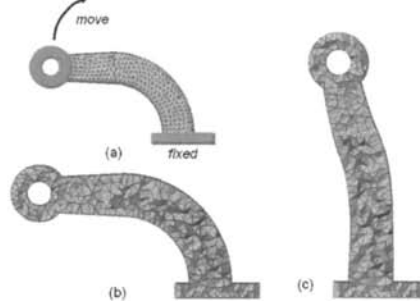


図7. 内部構造の回転 (Part)

メッシュ		個数			CPU Time (sec)		
名前	図番	テトラ	境界	内部	行列	分解	計
cat	図4	1,828	352	165	0.19	0.03	0.22
part	図7	13,263	2,666	963	1.47	0.31	1.78
mannequin	図5	93,565	2,732	5,375	5.25	1.70	6.98
genus3	図4	93,565	6,652	12,491	15.37	6.09	21.56
fandisk	図6	94,006	6,475	12,631	16.36	7.69	24.13

表1. 前処理のための計算時間。テトラ: 四面体の個数; 境界: 境界頂点の個数; 内部: 内部頂点の個数; 行列: 最小2乗行列の作成時間; 分解: 行列分解の計算時間。

### 3. サーフェスモデルの大変形

次に、閉じた三角形メッシュモデルを入力とし、仮想的に四面体モデルを生成して、大きな変形において立体が潰れる傾向を持つ現象を改善する手法について示す。この手法では、四面体は補助的に作成され、陽には扱われないので、式(6)の制約は用いず、別の制約を導入する。

#### 3.1 立体感を保存する制約

メッシュモデルを大きく変形させると、図7(a)に示すように、形状がひしゃげて立体が潰れることがある。また、図8(a)のように細い部分での歪みが全体を大きくひしゃげさせることもある。これは、サーフェスの変形において、表面上の制約のみを保存しており、立体が潰れることに対するペナルティ項を持たないためである。

Zhouらは、閉じたサーフェスモデルの内部に仮想的に四面体構造を導入し、グローバル座標系に依存するベクトル量を保存することで、大規模な変形操作においても立体がつぶれにくい変形手法を示した。しかし、本手法においては、式(6)が座標の相対的な関係のみを指定しており、長さを保存するベクトル量を持たないため、体積を保存する効果は持たない。そこで、Zhouらと同等の効果を得るために、式(6)の代わりにサーフェスメッシュの潰れを防ぐための単純な制約を追加する。

まず、入力が三角形メッシュなので、メッシュモデルの頂点に関して、メッシュの面を保存する制約付きの3Dドロネー分割を行う。この四面体分割はメッシュ内部には頂点をできるだけ生成しないように行う。

次に、生成された四面体メッシュの内部に存在するエッジ $(i, j)$ に関して、以下の制約を設定する。ここでは、この制約を立体制約と呼ぶ。

$$\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j = R \left( \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2} \right) (\mathbf{p}_i^0 - \mathbf{p}_j^0) \quad (9)$$

ここで、 $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$ は元の三角形メッシュの頂点であり、四面体メッシュでは境界頂点となる。 $\mathbf{p}_i^0, \mathbf{p}_j^0$ は変形前の頂点座標である。また、 $R(\mathbf{r}_i)$ は式(3)によって計算される $\mathbf{r}_i$ を用いて計算される回転行列である。この制約は、立体内部のエッジの変化に対してペナルティを与える。

頂点座標は次の式によって算出する。ここでは、立体制約が弱い制約となるように、重み $\gamma$ を相対的に小さくする。

$$\arg \min_{(\mathbf{p}_i)} \left\{ \sum_{i \in B} (L(\mathbf{p}_i) - R_i \delta)^2 + \beta \sum_{i \in B_p} (\mathbf{p}_i - \mathbf{u}_i)^2 + \gamma \sum_{(i,j) \in e} \left( \mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j - R \left( \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j}{2} \right) (\mathbf{p}_i^0 - \mathbf{p}_j^0) \right)^2 \right\} \quad (10)$$

#### 3.2 変形結果

図7に式(10)に基づく変形結果を示す。これらの例では、変形されたメッシュモデルの立体感がより改善されて

いることがわかる。また、図8では、翼を支える細い部分が正しく保たれていることがわかる。

### 4. まとめ

本稿では、まず、3Dメッシュの変形手法を示した。3Dメッシュを構成する頂点に対して、境界頂点に対しては離散平均曲率を保存する制約を、内部頂点に対しては平均値座標を保持する制約を与えることで良好な結果を得ることができた。次に、閉じた三角形メッシュモデルの大変形に対して、立体部のつぶれを抑制する立体制約を導入し、変形における品質を改善できることを示した。

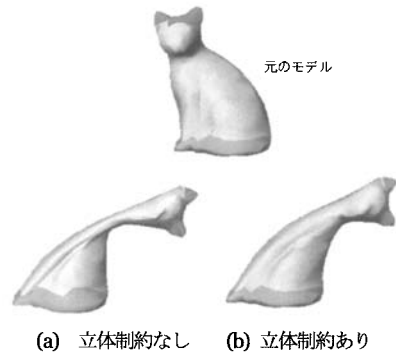


図7. 立体制約を用いた変形 (Cat)

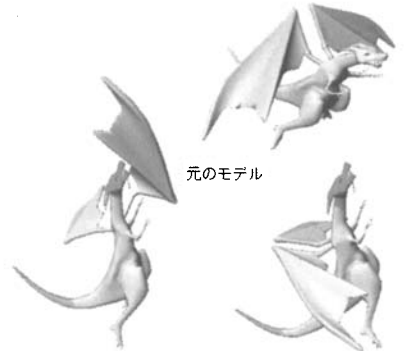


図8. 立体制約を用いた変形 (Dragon)

### 参考文献

1. O.Sorkine, D.Cohen-Or, YLipman, M.Alexa, C.Rossil and H.Seidel, "Laplacian Surface Editing", Eurographics/ACM SIGGRAPH 2004.
2. K.Zhou, et al. "Large Mesh Deformation Using the Volumetric Graph Laplacian", Proceedings of ACM SIGGRAPH 2005, 496-503.
3. H.Masuda, Y.Yoshioka, Y.Furukawa, "Preserving Form-Features in Interactive Mesh Deformation," LNCS 4077 (GMP2006), 207-220.
4. T. Ju, et al. "Mean Value Coordinates for Closed Triangular Meshes," ACM Trans. Graph. 24, 3, 561-566.
5. M. S. Floater, et al. "Mean value coordinates in 3D," Computer Aided Geometric Design, 22(7), 2005, 623-631
6. 小川, 増田; "立体要素を含んだメッシュモデルのデフォーメーション", 精密工学会秋季講演会, 2007.