Vol. 36 No. 11 情 報 処 理 Nov. 1995

解 説

大域的最適化法の現状：低ランク非凸型最小化問題を中心に†

今 野 浩††

1. はじめに

本稿では，80年代半ば以来急速に発展しつつある大域的最適化法（global optimization algorithms）の最近の状況を，筆者らのグループによる研究を中心に解説する．

一般の非線形最小化問題を

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) \\ \text{条件} & x \in S \subset R^n \end{array}\right. \qquad (1.1)$$

と書いたとき，従来の非線形計画法が研究対象としてきたのは，

（i） S が R^n の閉凸集合で，f が凸関数である場合

すなわち，「凸計画問題」が中心であった．よく知られているように[15]，凸計画問題においては，局所最小点が大域的最小点となるので，適当な出発点を選んで適当な方法で関数値を減らしてゆけば，いずれは大域的最小点が得られるのである．

ところが，世の中には凸計画問題として定式化することができない問題がたくさん存在する．また，ひとまずは凸計画問題として定式化される問題も，より精密にモデル化すると，非凸性が入り込んでくることは珍しくない．たとえば，ポートフォリオ理論の出発点であるマーコビッツの平均・分散モデルは，ふつうは凸2次計画問題として定式化されるが，取引きコストをモデルに取り入れた途端に非凸型問題となってしまうし，生産計画問題の場合も，生産費用は厳密には生産量の線形関数ではなく，凹関数となる場合が多い．また，文献10）で扱われている凸多面体の最小被覆球を求める問題は，凹2次関数の最小化問題となる．

凸計画問題と違って，非凸型問題には一般に複数の局小点が存在するから，その大域的最小点を見つけるには，直接的または間接的に制約領域の全体を調べることが必要となる．しかし，変数の数や制約条件式が多くなると，制約領域全体を調べるのはきわめて難しい．そこで従来は，適当な点を出発点として適当な方法で局小点を求め，これを繰り返してなるべくよい局小点を探るのが，唯一の現実的な方法であると考えられてきた（このあたりの事情は，1989年に書かれたサーベイ論文[17]を見るとよく分かる）．ところがこのような方法は，理論的に見てあまり面白い研究課題とはいえない．

しかし最近になって，大域的最適化法に関する理論的枠組みが整備されるとともに，いくつかの特別なタイプの問題は，現実的な意味で解けることが分かってきた[2),8)]．中でも，問題（1.1）において

（ii） f が凹関数で，S が凸多面集合である場合（凹関数最小化問題）[10),23),25)~27)]

（iii） f が凸関数で，S の補集合が凸集合である場合（逆凸計画問題）[12),14)]

（iv） f が2つの凸関数の差で，S が凸集合である場合

に対して，いくつかの興味深い解法が提案され，問題によっては変数の数が数百程度までのものが解けるようになっている．また，より特殊なタイプの非凸型最小化問題の効率的な解法を取り扱った研究も盛んである．とりわけ

（v） f が凹2次関数で，S が凸多面集合である場合（凹2次計画問題）[10),16),29)]

（vi） f が2つ以上の非負凸関数の積で，S が凸集合である場合（凸乗法計画問題）[3)~5),11),13)]

（vii） f が凹関数で，S がネットワーク型制約式によって与えられる集合である場合[25)~27)]

などについては，かなり大型の問題が効率的に解

† The State-of-the Art of Global Optimization: Minimization on Low Rank Nonconvex Structure by Hiroshi KONNO (Department of Industrial Engineering and Management, Tokyo Institute of Technology).

†† 東京工業大学工学部経営システム工学科

けるようになっている．さらに非凸型問題に対する双対理論[19)~21)]を用いれば，双対空間において上記の性質を持つ問題群に対しても，効率的な解法を考案することができる．

大域的最適化法に関する研究は，20年以上の潜伏期間を経て，80年代半ば以来急速な発展を見せている．そして90年にこの分野の創始者であるHoang Tuy教授とR. Horst教授による教科書[2)]が出版されるとともに，91年に専門誌Journal of Global Optimizationが発刊されるに及んで，世界的な流行を見せ始めている．また本年1月には，Handbook of Global Optimizationというタイトルの900ページ近い大著[1)]が刊行され，その中で膨大な研究成果が紹介されている．

そこで本稿では，大域的最適化問題の中でも比較的解きやすい問題群に共通する性質である，“低ランク非凸性”または，ある種の“単調性”を満たす非凸型問題群に対する代表的なアルゴリズムを紹介し，大域的最適化法の現状の一端を紹介することとしたい．これらのアルゴリズムは，いずれも問題の特殊構造を利用して，もとの問題を低次元の空間に射像し，結果的に制約領域の一部のみを探索するだけで，大域的最適解を得ようとするものである．ここで紹介するアプローチについてより詳しいことを知りたい読者は，1996年春に刊行予定の書物[8)]を参照していただきたい．

なお以下では，読者が線形計画法に関する基礎知識[1)]を持つことを想定して，議論を進めることとする．

2. ランク―1非凸型2次計画問題とパラメトリック単体法[3),7),9),16),29)]

行列$A\in R^{m\times n}$とベクトル$b\in R^m$, c_0, c_1, $c_2\in R^n$に関して定義される，特殊なタイプ2次計画問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & f(x)=c_0^tx+c_1^tx\cdot c_2^tx \\ \text{条件} & Ax=b,\ x\geqq 0\end{array}\right. \qquad (2.1)$$

を考えよう．以下では実行可能解の集合

$$X=\{x\in R^n|Ax=b,\ x\geqq 0\} \qquad (2.2)$$

は有界かつ空でないものと仮定する．次の例が示すとおり，$f(x)$はX上で(準)凸関数ではないことに注意しよう．

例2.1 $c_1=(1,1,0,\cdots,0)^t$, $c_2=(1,-1,0,\cdots,0)^t$とおくと，$f(x)=c_0^tx+x_1^2-x_2^2$となる．この関数が凸関数でないことは明らかである．□

一般に，実対称行列$Q\in R^{n\times n}$がk個の負の固有値を持つとき，2次計画問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & c_0^tx+(1/2)x^tQx \\ \text{条件} & Ax=b,\ x\geqq 0\end{array}\right. \qquad (2.3)$$

をランク―kの非凸型2次計画問題と呼ぶことにしよう．明らかに問題(2.1)の目的関数は(2.3)の形に表現できるが，この場合Qの2つの固有値のうちの1つは負の値をとる．したがって，問題(2.1)はランク―1の非凸型2次計画問題となる．

問題(2.1)は，凸計画問題の中心に位置する線形計画問題を非凸型世界に拡張した，最もシンプルな非凸型最小化問題である．しかしその単純な形にもかかわらず，この問題はNP—困難であることがPardalosらによって示されている[16)]．一方，問題(2.1)で$c_0=0$である場合，すなわち

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & c_1^tx\cdot c_2^tx \\ \text{条件} & Ax=b,\ x\geqq 0\end{array}\right. \qquad (2.4)$$

は線形乗法計画問題[3)]と呼ばれているが，現在までのところこの問題がNP—困難か否かは分かっていない．(もしこの問題に対する多項式オーダの解法が見つかれば，かなりの評判になることであろう)

そこで以下では，問題(2.1)に対するパラメトリック単体法を用いた“効率的”な解法を紹介しよう．まず第1のステップは，補助変数

$$\xi=c_2^tx \qquad (2.5)$$

を導入し，

$$\xi_{\min}=\min\{c_2^tx|x\in X\}$$
$$\xi_{\max}=\max\{c_2^tx|x\in X\} \qquad (2.6)$$

とおいて，問題(2.1)を次のような等価な問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & f(x;\xi)=c_0^tx+\xi c_1^tx \\ \text{条件} & Ax=b,\ x\geqq 0 \\ & c_2^tx=\xi,\ \xi_{\min}\leqq\xi\leqq\xi_{\max}\end{array}\right. \qquad (2.7)$$

に書き直すことである．ここで$\xi\in[\xi_{\min},\xi_{\max}]$を固定すると，問題

$$P(\xi)\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & (c_0+\xi c_1)^tx \\ \text{条件} & Ax=b,\quad x\geqq 0 \\ & c_2^tx=\xi\end{array}\right.$$

は線形計画問題となっている．したがって，単体法を用いてこの問題の最適基底解を求めることが

できる．そこで，問題 $P(\xi)$ の最適基底行列を B とし，B に対応する基底形式表現を

$$x_B=B^{-1}\binom{b}{\xi}-B^{-1}Nx_N$$
$$z=z_0(\xi)+(\bar{c}_{0n}+\xi\bar{c}_{1n})^t x_n \tag{2.8}$$

と書こう．ここで

$$z_0(\xi)=(c_{0B}+\xi c_{1B})^t B^{-1}\binom{b}{\xi}$$
$$\bar{c}^{\,t}_{0n}=c^t_{0n}-c^t_{0B}B^{-1}N$$
$$\bar{c}^{\,t}_{1N}=c^t_{1N}-c^t_{1B}B^{-1}N \tag{2.9}$$

である．仮定により，B は問題 $P(\xi)$ の最適基底行列だから

$$B^{-1}\binom{b}{\xi}\geqq 0,\quad \bar{c}_{0N}+\xi\bar{c}_{1N}\geqq 0 \tag{2.10}$$

が成立している．また B は，上の不等式を満たすすべての ξ に対して問題 $P(\xi)$ の最適基底行列となる．(2.10) は ξ に関する $m+n+1$ 本の1次不等式だから，この不等式を解くことにより B が最適条件を満足する区間 $[\underline{\xi}, \bar{\xi}]$ が求まる．

$\xi>\bar{\xi}$ に対しては，B は最適条件を満たさなくなる．そこで，$\xi=\bar{\xi}$ において単体法もしくは双対単体法の基底変換を行えば，$\xi=\bar{\xi}$ における新しい最適基底行列 B' が得られる．このように，$\xi=\xi_{\min}$ を出発点として次々と基底変換を行うと，基底行列の列 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ と，区間の列 $[\xi_{\min}, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \cdots, [\xi_{k-1}, \xi_k]$ が求まるであろう．各区間での $f(x;\xi)$ の最小値，すなわち $z_0(\xi)$ は，(2.9) で見るとおり ξ の2次式だから，各区間における $z_0(\xi)$ の最小値を求めることは容易である．

このとき，区間 $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ での $z_0(\xi)$ の最小値を与える ξ を ξ^* とおくと，$P(\xi^*)$ の最適解がもとの問題 (2.1) の最適解となるのである．**図-1** は2次元の場合でこの解法を図解したものである．矢印で示したパスは，ξ が区間 $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$ を動くときの問題 $P(\xi)$ の最適解 $x^*(\xi)$ の軌跡を表したものである．

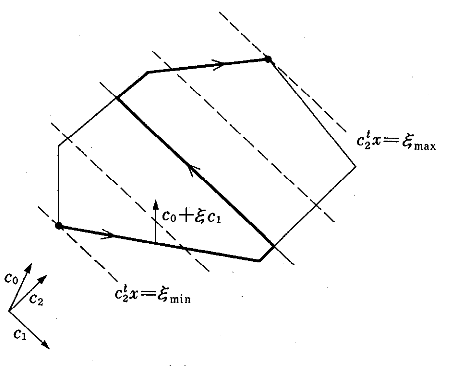

図-1　$P(\xi)$ の最適解の軌跡

このアルゴリズムを用いて様々なサイズの問題を解いてみたところ，$\xi_{\min}$ を求めるのに必要な計算時間の高々2倍程度の計算時間で，問題 (2.1) の最適解が求まることが確認された[3),9)]．NP―困難な問題に対して，このような効率的なアルゴリズムが構成されるのはきわめて珍しいことである．またこのことに関連して，問題 (2.1) のデータ (c_0, c_1, c_2, A, b) が"符号対称性"を満たす確率分布☆に従うときには，上記のアルゴリズムが平均的な意味で低次の多項式オーダの解法であることが示されている[7)]．なおパラメトリック単体法は，**5.** で紹介するように，より一般的な問題に対しても，効率的な解法を与えることが示されている[25)~27),29)]．また，一般のランク-k の非凸型2次計画問題に対しては，**4.** で述べる方法を使うことによって $k\leqq 5$ 程度問題が実用的な意味で解けることが示されているが，詳細は間もなく出版予定の文献8) を参照していただきたい．

3. 凸乗法計画問題と分枝限定法[4),5),11),12)]

次に凸乗法計画問題に対する，パラメトリック・アプローチと分枝限定法を組み合わせた解法を紹介しよう．ここで考えるのは，2つの非負凸関数 $f_1(\cdot)$ と $f_2(\cdot)$ の積を最小化する問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & f_1(x)\cdot f_2(x)\\ \text{条件} & Ax=b,\quad x\geqq 0\end{array}\right. \tag{3.1}$$

である．凸乗法計画問題は，次元の異なる2つの評価関数（たとえば時間と費用）を同時に最小化したいという多目的問題が与えられたとき，評価関数の幾何平均の最小化を図るアプローチを採用する際に出現する．

2つの凸関数の積が凸関数でないことは，例2.1より明らかである．したがって，この問題には複数の局小点が存在する可能性がある．問題 (3.1) とよく混同されるのが，2つの非負凹関数の積を最大化する問題である．この問題は準凹関数の最大化問題なので，普通の方法で解けること

☆ (c_0, c_1, c_2, A, b) の任意の成分の符号を入れかえたデータを $(c_0', c_1', c_2', A', b')$ としたとき，両者の確率密度が不変であるような分布．

に注意しよう．

乗法計画問題（3.1）を解くため，次の問題

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & F(x;\xi)=\xi f_1(x)+f_2(x)/\xi \\ \text{条件} & Ax=b,\quad x\geqq 0,\quad \xi>0\end{array}\right. \quad (3.3)$$

を考えよう．X は有界かつ空でないから，問題（3.3）には最適解 (x^*, ξ^*) が存在する．

定理 3.1. x^* は問題（3.1）の最適解である．

証明　仮定により，任意の $x\in X$ に対して $f_1(x)>0$, $f_2(x)>0$ だから，

$$\min\{\xi f_1(x)+f_2(x)/\xi \mid \xi>0\}=2\{f_1(x)f_2(x)\}^{1/2}$$

を得る．よって

$$\min\{\xi f_1(x)+f_2(x)/\xi \mid x\in X, \xi>0\}$$
$$=2\min\{(f_1(x)f_2(x))^{1/2} \mid x\in X\}$$

となる．□

問題（3.3）で補助変数 ξ（>0）の値を固定して得られる問題：

$$P(\xi)\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & F(x;\xi)=\xi f_1(x)+f_2(x)/\xi \\ \text{条件} & Ax=b,\quad x\geqq 0\end{array}\right.$$

の目的関数は x の凸関数だから，適当な方法を用いて問題 $P(\xi)$ を解くことができる．そこで $P(\xi)$ の最適解を $x(\xi)$ とし

$$h(\xi)=F(x(\xi),\xi),$$

としよう．定理 3.1 より

$$\xi^*=\operatorname{argmin}\{h(\xi) \mid \xi>0\}$$

とおくと，$x(\xi^*)$ が（3.1）の最適解となるのである．

2 つの関数 f_1, f_2 の一方がアフィン関数である場合を別とすれば，パラメータ ξ を連続的に変化させながら $P(\xi)$ を解くのは容易ではない．ところが，f_1 と f_2 が非負な連続関数であることを考慮すると，次の定理が成り立つことが示される[11]．

定理 3.2. $\xi_1>0$, $\xi_2>0$ に対して

$$H(\xi)=\xi\frac{h(\xi_1)\xi_1-h(\xi_2)\xi_2}{\xi_1-\xi_2}+\frac{1}{\xi}\cdot\frac{h(\xi_1)/\xi_1-h(\xi_2)/\xi_2}{1/\xi_1-1/\xi_2}$$

おくと，

$$H(\xi)\leqq h(\xi),\ \forall\xi\in[\xi_1,\xi_2]$$

が成立する．

この結果，$h(\xi)$ の暫定値（計算の途中で求まった $h(\xi)$ の最小値）を $h(\hat{\xi})$ とし

$$H(\tilde{\xi})=\min\{H(\xi) \mid \xi_1\leqq\xi\leqq\xi_2\}$$

としたとき，もし $H(\tilde{\xi})\geqq h(\hat{\xi})$ が成立していれば

$$h(\xi)\geqq h(\hat{\xi}),\ \forall\xi\in[\xi_1,\xi_2]$$

であることが分かる．この結果を用いれば，$h(\xi)$ の $\xi>0$ での最小値を求めるための分枝限定法を構築することが可能となる（**図-2** 参照）．

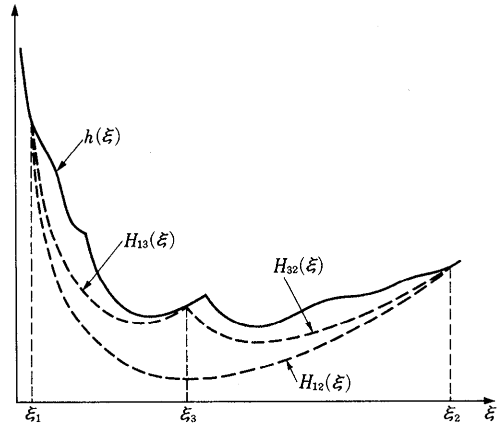

図-2　下界値関数と分枝限定法

我々は，f_1 が凸 2 次関数，f_2 がアフィン関数である場合に対して数値実験を行ったところ，制約式の本数と，変数の数が 100 個程度までであれば，この問題が SUNIV/280 S 上で約 10 分程度で解けることが確認された．注目すべき事実は，分枝限定法で生成される子問題（すなわち実際に $h(\xi)$ の値を計算する回数）は，問題のサイズにあまり依存しない，という事実である．このことは，$h(\xi)$ を計算する方法を工夫することによって，より大型の問題を解くことも可能であることを示している．

4. 一般化凸乗法計画問題と外部近似法[5),13),14)]

次に非凸型最小化問題を解くための一般的解法である，外部近似法について説明するため，2 つ以上の凸関数の積を凸集合 $X\subset R^n$ 上で最小化する問題：

$$\left|\begin{array}{ll}\text{最小化} & \Pi_j f_j(x) \\ \text{条件} & x\in X\end{array}\right. \quad (4.1)$$

を取り上げよう．ここでも再び，すべての j に対して

$$f_j(x)>0,\ \forall x\in X \quad (4.2)$$

が成り立つことを仮定する．この問題に関連して，p 個のパラメータ $\xi_j (j=1,\cdots,p)$ を導入して問題：

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \Sigma_j\xi_j f_j(x) \\ \text{条件} & x\varepsilon X \\ & \Pi_j\xi_j \geqq 1,\ \xi_j \geqq 0,\ j=1,\cdots,n \end{array}\right. \quad (4.3)$$

を定義しよう．

定理 4.1 問題 (4.2) の最適解を (x^*, ξ^*) とすると，x^* が問題 (4.1) の最適解となる．

証明． $x\varepsilon X$ を固定すると，$f_j(x)>0(j=1,\cdots,p)$ より

$$\begin{aligned}&\min\{\Sigma f_j(x)\cdot\xi_j | \Pi_j\xi_j \geqq 1,\ \xi_j \geqq 0,\ j=1,\cdots,p\}\\ &\quad=\min\{\Sigma_j f_j(x)\cdot\xi_j | \Pi_j\xi_j=1,\ \xi_j \geqq 0,\ j=1,\cdots,p\}\\ &\quad=p\{\Pi_j f_j(x)\}^{1/p}\end{aligned}$$

となる．よって (4.3) は，$\Pi_j f_j(x)$ を X 上で最小化する問題 (4.1) と等価である．□

以上の結果，

$$h(\xi_1,\cdots\xi_p)=\min\{\Sigma_j\xi_j f_j(x)|x\varepsilon X\} \quad (4.4)$$

とおくと，問題 (4.1) は，関数 h を k 次元空間の凸集合

$$G=\{\xi=(\xi_1,\cdots\xi_p)|\Pi_j\xi_j \geqq 1,\ \xi_j \geqq 0,\ j=1,\cdots,p\} \quad (4.5)$$

上で最小化することに帰着される．また $h(\xi^*)=\min\{h(\xi)|\xi\varepsilon G\}$ とおくと，(4.1) の最適解は凸計画問題：$\min\{\Sigma_j\xi_j^* f_j(x)|x\varepsilon X\}$ を解くことによって得られるのである．

そこで次に，$h(\xi)$ を G 上で最小化するための外部近似法について説明しよう．まず $h(\xi)$ は，アフィン関数 $\Sigma_j f_j(x)\xi_j$ の $x\varepsilon X$ 上での最小点なので，仮定 (4.2) より G 上で単調非減少な凹関数となることに注意しよう．適当な正数，$\underline{\xi}_j<\bar{\xi}_j(j=1,\cdots,p)$ に対して超直方体

$$G_0=\{\xi=(\xi_1,\cdots\xi_p)|\underline{\xi}_j \leqq \xi_j \leqq \bar{\xi}_j,\ j=1,\cdots,p\} \quad (4.6)$$

を定義しよう．$\underline{\xi}_j$ を十分小さく，また $\bar{\xi}_j$ を十分大きく選べば，$h(\xi)$ の最大点は G_0 の中に含まれるはずである．したがって，

$$\min\{h(\xi)|\xi\varepsilon G_0\} \leqq \min\{h(\xi)|\xi\varepsilon G\}$$

が成り立つ．一方，$h(\xi)$ 単調非減少関数だから G_0 上での最小値は $h(\underline{\xi})$ である．

そこで ξ—空間の原点から $\underline{\xi}$ に到る半直線と G の交点を P_1 とし，P_1 における G の支持超平面を $L_1(\xi)\geqq 0$ と書こう (図-3 参照)．そして

$$G_1=G_0\cap\{\xi|L_1(\xi)\geqq 0\}$$

とおけば，$G\subset G_1\subset G_0$ が成立する．したがって，

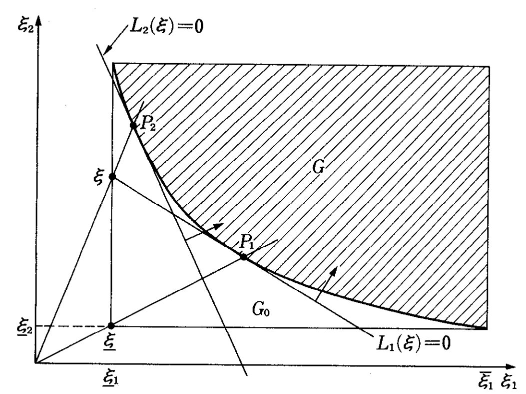

図-3 外部近似法

$$h(\xi^1)=\min\{h(\xi)|\xi\varepsilon G_1\}$$

とおくと，

$$h(\xi)\leqq h(\xi^1)\leqq h(\xi^*)$$

が成立するはずである．ここで $h(\xi)$ が凹関数であることに注意すると，G_1 のすべての端点を列挙し，それらの各々に対して (4.5) 式の右辺の問題を解けば，G_1 上での $h(\xi)$ の最小値 $h(\xi^1)$ が得られる．

一般に集合 G を外部から近似する凸多面集合の列，すなわち

$$G\subset G_k\subset G_{k-1}\subset\cdots\cdots\subset G_1\subset G_0 \quad (4.7)$$

となる凸多面集合の列 $G_j(j=1,\cdots,k)$ が得られているものとし，G_k 上での h の最小点 ξ^k が求まったものとしよう．ここで十分小さな $\varepsilon>0$ に対して

$$|\Pi_j\xi_j^k-1|<\varepsilon \quad (4.8)$$

が成立していれば，ξ^k を ξ^* の近似値と見なすことができる．一方 (4.8) が満たされないときは，ξ—空間の原点と ξ^k を結ぶ直線と G の交点 P_k における G の支持超平面を $L_k(\xi)\geqq 0$ とし，G を含む新たな凸多面集合

$$G_{k+1}=G_k\cap\{\xi|L_k(\xi)\geqq 0\} \quad (4.9)$$

を生成する．

定理 4.2 任意の $\varepsilon>0$ に対して，k を十分大きくとれば，上記のプロセスは条件 (4.8) を満たして終了する．□

我々の計算実験[13]によれば，$p\leqq 5$ の場合は上記のアルゴリズムは十分実用的である．

5. 単調な非凸型問題とパラトリック・アプローチ[28]

以上では，3 つの特殊な非凸最小化問題を紹介

し，パラメトリック単体法，パラメトリック・アプローチ/分枝限定法，そして外部近似法を用いた解法を説明した．この章では，パラメトリックな解法が，より一般的な問題にも適用可能であることを示そう．

定義　5.1　関数 $f: R^n \to R \cup \{+\infty\}$ と集合 $\Omega \subset R^n$ に対して，閉凸錐 $M \subset \Omega$ が存在して

$$x \varepsilon \Omega,\ u \varepsilon M \Rightarrow f(x+u) \geqq f(x) \qquad (5.1)$$

が成り立つとき，f は Ω 上で M―単調であるという．□

集合 Ω 上で M－単調な関数 f を $X \subset \Omega$ 上で最小化する問題

$$\text{最小化}\quad \{f(x) | x \varepsilon X\} \qquad (5.2)$$

を考えよう．条件 (5.1) より，$x \varepsilon X$ に対して

$$f(x+u) \geqq f(x),\ \forall u \varepsilon M \qquad (5.3)$$

だから，問題 (5.2) を解く上で，集合 $x+M$ に属する点は探索の対象から外すことができる．

ここでもし，M が R^n の k 次元の部分空間であれば，問題 (5.2) は本質的に n―k 次元の部分空間での最小化問題となるのである．たとえば，線形乗法計画問題に関して

$$f(x) = (c_1^t x + c_{10})(c_2^t x + c_{20})$$

$$\Omega = \{x | (c_1^t x + c_{10}) \geqq 0,\ c_2^t x + c_{20} \geqq 0\}$$

$$M = \{u | c_1^t u \geqq 0,\ c_2^t u \geqq 0\}$$

と定義すると，明らかに f は定義 5.1 の条件を満足する．**図-4** は 2 次元の場合の例を示したものであるが，$f(x)$ を凸多面集合 $X \subset \Omega$ 上で最小化するには，太線で示した X の境界部分だけを調べればよいことになるのである．

そこで，定義 5.1 の条件を満たす 4 つの例を示

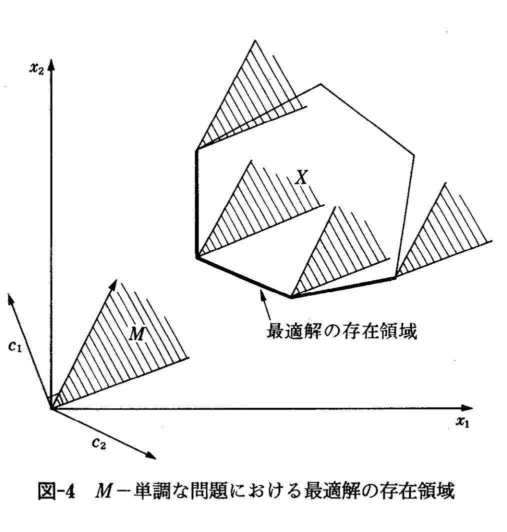

図-4　M－単調な問題における最適解の存在領域

しておこう．

例 5.1　$f(x) = \Pi_i l_i(x) \alpha_i,\ (\alpha_i > 0),\ l_i(x) = c_i^t x + d_i,$

$$\Omega = \{x | c_i^t x + d_i \geqq 0,\ i = 1, \cdots, k\}$$

$$M = \{u | c_i^t u \geqq 0,\ i = 1, \cdots, k\}$$

例 5.2　$f(x) = \Sigma_i \theta_i \exp c_i^t x,\ (\theta_i < 0,\ \forall i)$

$$\Omega = R^n,\ M = \{u | c_i^t u \leqq 0,\ i = 1, \cdots, k\}$$

例 5.3　$f(x) = -\Sigma_{i=1}^{k-1} (c_i^t x)^2 + c_k^t x$

$$\Omega = R^n,\ M = \{u | c_i^t u = 0,\ i = 1, \cdots, k-1,\ c_k^t u \geqq 0\}$$

例 5.4　$f(x) = \min\{y^t C x | Ay = b,\ y \geqq 0\}$

$$\Omega = R^n,\ M = \{u | C^t u \geqq 0\}$$

6.　おわりに

本稿では，低ランク非凸性あるいは単調性という性質を持つ大域的最小化問題について話を進めてきたが，最後にこの種の問題を重点的に取り上げた理由を説明しよう．

まず第 1 は，これらの問題に対しては，その構造を利用することによって，効率的なアルゴリズムを構成できる可能性がある，という点である．一般的な大域的最小化問題を一般的に解くことは絶望的に困難である現状の下で，広い応用範囲を持つ特殊な問題群を選び出し，それらに対する効率的な解法を模索し，それをより一般的な問題に拡張してゆく，というのが最も実り多いアプローチである，と筆者らは考えている．

第 2 は，ある種の大域的最小化問題は，実用上十分な精度で，低ランク問題によって近似できるという点である．たとえば，ランク p の非凸型 2 次計画問題 (2.3) が与えられたものとしよう．行列 Q の p 個の負の固有値を小さい順に並べたとき，最初の r 個の固有値の絶対値の和が，残りの p―r 個の絶対値の和に比べて十分大きなときは，絶対値の小さなものを 0 とおいて得られるランク r の非凸型 2 次計画問題は，もとの問題を十分よく近似していると考えられる（実用上の問題の場合，Q がこのような構造を持つことは決して珍しいことではない)．そこでランク r の非凸型 2 次計画問題を精密に解いて最適解 $x(r)$ を求め，この点を出発点として，ローカル・サーチを行えば，実用上十分に精度のよい近似最適解が得られるものと期待されるのである．

大域的最適化法は，凹関数最小化に関わる

Hoang Tuy の論文[23]以来，すでに30年近い歴史を刻んでいる．しかし，その研究が本格的軌道に乗ったのは，80年代半ば以来のことである．これは，

（i） 計算機の高速化や並列計算機の出現によって，従来は実用的でないと思われてきた解法に光が当たり始めたこと，

（ii） 計算複雑度の理論があまねくゆきわたり，NP—困難な問題に対するヒューリスティックな解法が活発な研究対象となり始めたこと，そしてこれにともなって，

（iii） 難しい大域的最適化問題を実用的な意味で解く研究が，数理計画法の研究対象として正式に認知された．

結果である．

実際，1991年の第14回国際数理計画法シンポジウムでは，僅か十数件程度に過ぎなかったこの分野の研究発表は，1994年8月にミシガン大学で開かれた第15回シンポジウムでは，100件を超える盛況を示した．これに匹敵する数の発表が行われたのは，カーマーカーに始まる内点法の研究のみであった．新しい分野の常として，内容的には玉石混淆であったが，多くの異なる分野でこの種の研究が同時多発的に行われていることから見て，一時の流行に終わるようなものでないことは確かな気配である．

参考文献

1) Horst, R. and Pardalos, P. (eds.) : Hand book of Global Optimization, Kluwer Academic Publishers (1995).
2) Horst, R. and Tuy, H. : Global Optimization : Determinstic Approaches, (2 nd ed.) Springer-Verlag (1993).
3) Konno, H. and Kuno, T. : Linear Multiplicative Programming, Mathematical Programming, 56, pp. 51-64 (1992).
4) Konno, H. and Kuno, T. : Generalized Linear Multiplicative and Fractional Programming, Annals of Operations Research, 25, pp. 147-162 (1990).
5) Konno, H. and Kuno, T. : Multiplicative Programming Problems, in Handbook of Global Optimization, (Horst, R. and Pardalos, P. eds.) Kluwer Academic Publishers (1995).
6) Konno, H. and Yajima Y. : Minimizing and Maximizing the Product of Linear Fractional Functions, in Recent Advances in Global Optimization (C. Floudas and P. Pardalos, eds.) Princeton University Press, pp. 259-273 (1992).
7) Konno, H., Kuno, T. and Yajima, Y. : Parametric Simplex Algorithms for a Class of NP Complete Problems Whose Average Number of Steps are Polynomial, Computational Optimization and Applications, 1, pp. 227-239 (1992).
8) Konno, H., Thach, P. T. and Tuy, H. : Global Optimization : Low Rank Nonçonvex Structures, Kulwer Academic Publishers, (to appear) (1996).
9) Konno, H., Yajima, Y. and Matsui, T. : Parametric Simplex Algorithms for Solving a Special Class of Nonconvex Minimization Problems, Journal of Global Optimization, 1, pp. 65-82 (1991).
10) Konno, H., Yajima, Y. and Ban, A. : An Algorithms for Obtaining a Minimal Sphere Circumscribing a Polytope, Computational Optimization and Applications, 3, pp. 181-191 (1994).
11) Kuno, T. and Konno, H. : A Parametric Successive Underestimation Method for Convex Multiplicative Programming Problems, Journal of Global Optimization, 1, pp. 267-286 (1991).
12) Kuno, T., Konno, H. and Yajima, Y. : A Parametric Successive Underestimation Method for Convex Multiplicative Programming Problems with an Additional Multiplicative Constraint, Journal of Operations Research Society of Japan, 35, pp. 290-299 (1992).
13) Kuno, T., Yajima, Y. and Konno, H. : An Outer Approximation Method for Minimizing the Product of Several Convex Functions on a Convex Set, Journal of Global Optimization, 3, pp. 325-335 (1993).
14) Kuno, T. et al. : Convex Programs with an Additional Constraint on the Product of Several Convex Functions, European J. of Operational Research, 77, pp. 314-324 (1994).
15) Luenberger, D. G. : Introduction to Linear and Nonlinear Programming (2 nd ed.), Addison-Wesley (1984).
16) Pardalos, P. M. and Vavasis, S. A. : Quadratic Programming with One Negative Eigen-Value is NP-hard, Journal of Global Optimization, 1, pp. 843-855 (1991).
17) Rinnooy - Kan, A. and Timmer : Global Optimization, in Optimization (G. Nemhauser et al. eds.), North-Holland (1989).
18) Pferschy, U. and Tuy, H. : Linear Programs with an Additional Rank Two Reverse Convex Constraint, Journal of Global Optimization, 4, pp. 441-454 (1993).
19) Thach, P. T. : A Nonconvex Duality with Zero Gap and Applications, SIAM Journal on

Optimization, 4, pp. 44-64 (1994).
20) Thach, P. T.: Global Optimality Criteria and a Duality with a Zero Gap in Nonconvex Optimization Problems, SIAM Journal on Mathematical Analysis, 24, pp. 1537-1556 (1993).
21) Thach, P. T. and Konno, H.: On the Degree and Separability of Nonconvexity and Applications to Optimization Problems, IHSS 92-52, Institute of Human and Social Sciences Tokyo Institute of Technology (to appear in J. of Optimization Theory and Applications) (1993).
22) Thach, P. T., Konno H. and Yokota, D.: A Dual Approach to a Minimization on the Set of Pareto-Optimal Solutions, IHSS 93-55, Institute of Human and Social Sciences Tokyo Institute of Technology, (to appear in J. of Optimization Theory and Applications) (1993).
23) Tuy, H.: Concave Minimization under Linear Constraints, Soviet Mathematics, 5,pp. 1437-1440 (1964).
24) Tuy, H.: Polyhedral Annexation, Dualization and Dimension Reduction Technique in Global Optimization, Journal of Global Optimization, 1, pp. 229-244 (1991).
25) Tuy, H., Dan, N. D. and Ghannadan, S.: Strongly Polynomial Time Algorithm for Certain Concave Minimization Problems on Networks, Operations Research Letters, 14, pp. 99-109 (1993).
26) Tuy, H., Ghannadan, S., Migdalas, A. and Varbrand, P.: Strongly Polynomial Algorithm for a Production-Transportation Problem with Concave Production Cost, Optimization, 27, pp. 205-227 (1993).
27) Tuy, H., Ghannadan, S., Migdalas, A. and Varbrand, P.: The Minimum Concave Cost Flow Problems with a Fixed Number of Nonlinear Arc Costs and Sources, Department of Mathematics, Linkoping University (1992).
28) Tuy, H., Konno, H. and Thach, P. T.: Unified Approach to a Class of Monotonic Global Optimization Problems I. Primal Methods, IHSS 94-70, Institute of Human and Social Sciences, Tokyo Institute of Technology (1994).
29) Yajima, Y. and Konno, H.: Efficient Algorithms for Solving Rank Two and Rank Three Bilinear Programming Problems, Journal of Global Optimization, 1, pp. 155-173 (1991).

(平成6年10月31日受付)

今野　浩

1963年東京大学工学部応用物理学科卒業．(財)電力中央研究所，筑波大学電子情報工学系を経て，1982年より東京工業大学工学部教授．工学博士，Ph. D.専門は数理計画法，理財工学，オペレーションズ・リサーチ一般．主要著書「非線形計画法」(1978)，「線形計画法」(1987)，「理財工学Ｉ」(1995)（以下いずれも日科技連出版社)，「数理決定法入門」(1992)（朝倉書店)，「カーマーカー事件：ソフトウェアと特許」(1995)（中央公論社）など．