

マグネティック・スプリング・モデルによる グラフ描画法について

三末 和男・杉山 公造

(株)富士通研究所 情報社会科学研究所

グラフを辺がスプリングで構成される物理モデルとみなし、その安定状態を見つけることでレイアウトを自動的に求めるスプリング・モデルに、「磁場」の概念を導入したマグネティック・スプリング・モデルを提案する。提案する方法では、辺を「方位磁針」と見なすことで磁場から受ける回転力が定義され、辺の向きや方向を制御することが可能である。それにより、複数種類の辺を持つ有向グラフのレイアウトにおいてそれぞれの辺を一定の方向に向かせることや、混在グラフ（有向辺と無向辺が混在したグラフ）のレイアウトにおいて有向辺だけを一定方向を向ける、無向辺も特定の方向にそろえるといった制御が可能になった。

On Graph Drawing by Magnetic-Spring Model Kazuo Misue and Kozo Sugiyama

E-mail: {misue,sugi}@iias.flab.fujitsu.co.jp

Institute for Social Information Science,
FUJITSU LABORATORIES LTD.

140 Miyamoto, Numazu-shi, Shizuoka 410-03 Japan

A novel method for drawing graphs is proposed. The method is a type of laying out a graph by finding a stable state of a model of the graph in a physical system. The method uses a model called "magnetic-spring model," which is an extension of spring model. In the magnetic-spring model, a graph is placed in a magnetic field and each edge of the graph is replaced by a compass made of spring. This modeling enables to define rotational force on edges to control orientation of the edges. Thus, this method can draw graphs that have two or more kinds of edges while orienting each kind of edges in the same orientation.

1. はじめに

グラフを図として描くことはグラフによって表現された構造を人間に分かりやすく示すために重要な作業である。と同時に人間にとっては面倒な作業でもある。そのため計算機によるグラフの自動描画を目的とした研究がこれまで数多くなされ、多くの自動描画アルゴリズムが開発されている[1]。ただし、それらのアルゴリズムのほとんどは、無向グラフか有向グラフのどちらか、あるいはそれらのどちらかに含まれるより特殊なクラス（木や平面グラフなど）を対象とした描画法である。

実際の応用においてはグラフの頂点はある対象を、辺はそれらの対象間の関係を表すために使われる。しかしながら、辺で表現したい関係は一般に1種類ではなく、さらに向きがある関係とない関係が混在していることも少なくない。図1はある領域の問題間の関係を表したマップである[2]。そこには4種類の関係が存在している。1種類は一般的な問題から特殊な問題への関係を表す有向な関係であり、残りの3種類は、関連、相互依存、対立といった対等な、つまり無向な関係である。もちろん、すべての関係を無向あるいは有向と見なして既存の自動描画アルゴリズムを適用することは可能である。しかし、その構造を表現するために適切なレイアウト——たとえば、一般的な問題に対して特殊な問題を下側に配置し、対等な関係にある問題は横に並べる——を得るのは無理である。

本稿では、上記の問題を解決するためにグラフのレイアウトにおいて辺の向きや方向（本稿では「向き」と「方向」は違う言葉として区別する）をより柔軟に制御することを目的とした新しい自動描画アルゴリズムを提案する。そこでは、グラフ描画の美的基準として次のものを考える：

- (1) 辺の長さが均一、
- (2) 辺の交差数が最小、
- (3) 対称性を表示、
- (4) 頂点を均一に分配、
- (5) 辺が特定の向きまたは方向に従う。

(1)–(4)は従来の無向グラフの自動描画アルゴリズムで広く採用されているものである。(5)が我々の目的のために新しく追加した基準である。

提案するアルゴリズムは、無向グラフの描画アルゴリズムとして広く使われている「スプリング・アルゴリズム」またはより一般的に「力指向方式」と呼ばれるアルゴリズム[3-5]の拡張である。従来の力指向方式ではグラフを仮想的な物理モデルにあてはめ、頂点間（あるいは頂点と辺の間）に働く引力や斥力を定義し、安定状態を見つけることで適切なレイアウトを求めるものである。それに対して、提案する物理モデルでは辺に働く「回転力」を定義する。それにより、辺の向きや方向の制御が可能になる。

以下、第2節では提案する物理モデルを説明し、第3節でそのモデルに基づくアルゴリズムの実現例を示し、第4節では実現したプログラムによる描画の実例を紹介する。第5節では磁場の与える美的基準への影響に関する実験とその結果について説明し、第6節でまとめを述べる。

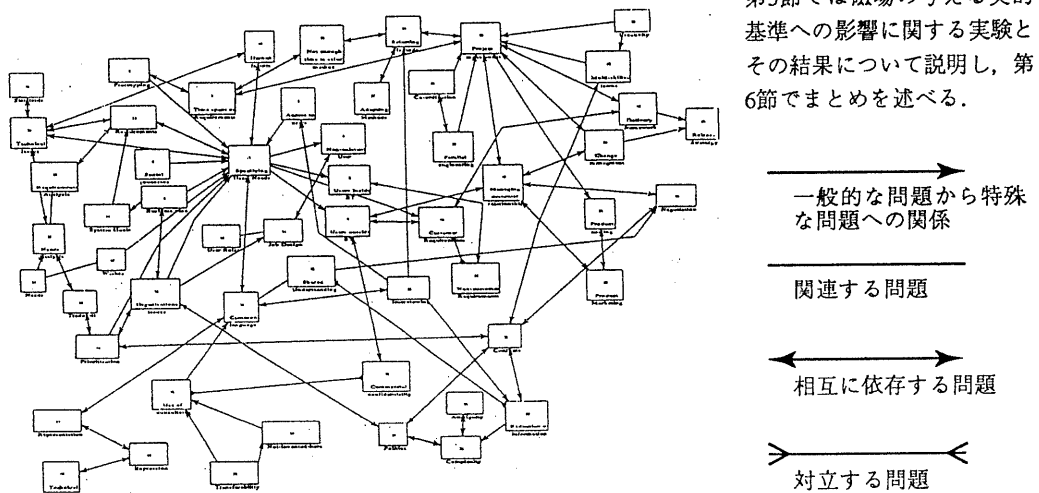


図1：有向辺と無向辺が混在したグラフの例（問題マップ）

2. マグネティック・スプリング・モデル

従来の力指向方式,たとえば, Eadesのモデル[3]では,各頂点を質量0大きさ0の「リング」とみなし,各辺をリングをつなぐ「スプリング」とみなす(図2).ただし,「スプリング」は直感的にそう振る舞うものであり,現実のスプリングのようにフックの法則に従うとするものではない.

我々は辺が方位磁針の性質をもつスプリング,「マグネティック・スプリング」であるとする物理モデルを用いる.つまり,スプリング・モデルにおいて,辺に働く回転力を導入するために,辺が「磁針」であり,グラフがある「磁場」に置かれているとする.それにより,磁針である辺にはグラフが置かれた磁場の北を向くように回転力が働く(図3).ただし,「磁場」もやはり現実の磁場と同じ性質をもつ必要はない.

以下,マグネティック・スプリング・モデルで導入する力と磁場について説明する.

2.1 力

各頂点には次の3種類の力が働くとする.

スプリングによる力

すべての辺はスプリングとみなされ,両端の頂点にはそのスプリングによって引力あるいは斥力が働く.辺(スプリング)の一方の頂点はそのスプリングから受ける力を F_s で表す.その大きさは,一般的に,下のように記述できる.

$$(1) \quad |F_s| = c_s f_s(d)$$

定数 c_s は他の力とのバランスを制御するための係数である(以下に現われる c_r , c_m も同様である). Eadesのモデルでは f_s は,

$$(2) \quad f_s(d) = \log(d/d_0)$$

と定義されている. d は現在のスプリングの長さ, d_0 はスプリングの自然長(辺の理想長)である.

非隣接頂点間の斥力

非隣接頂点間には斥力が働くとする.一つの頂点が隣接していない別の頂点の一つから受ける斥力を F_r で表す.その大きさは,一般的に,下のように記述できる.

$$(3) \quad |F_r| = c_r f_r(d)$$

Eadesのモデルでは f_r は,

$$(4) \quad f_r(d) = 1/d^2$$

と定義されている. d は頂点間の距離である.

磁場から受ける回転力

いくつかのあるいは全部の辺は磁針とみなされグラフの置かれた磁場から回転力を受ける.

[有向辺の場合]

終点が磁場の北を向くように回転力を受ける.その力を F_m で表す.大きさは,下のように記述できる.

$$(5) \quad |F_m| = c_m f_m(b, t, d)$$

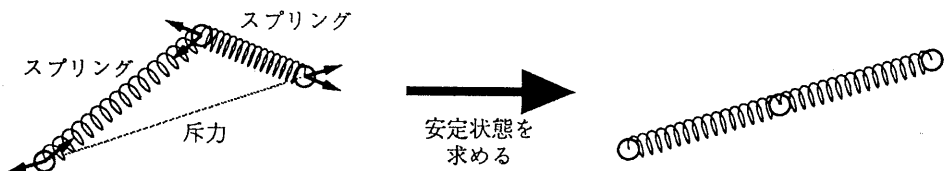


図2: スプリング・モデルによるグラフのレイアウト

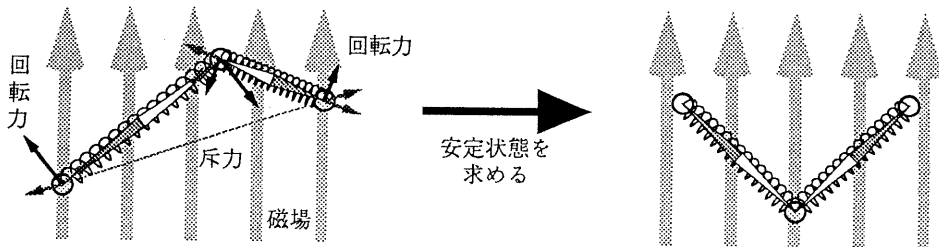


図3: マグネティック・スプリング・モデルによるグラフのレイアウト

我々は f_m を次のように定義する。

$$(6) \quad f_m(b, t, d) = bd^\alpha |t|^\beta$$

b は基準点 (各磁針に対して磁場の向きや強さを調べる点。実現上は辺の midpoint とした) における磁場の強さである。 d は現在の辺の長さである。 t は辺の基準点における磁場の北からの終点のずれの角である。つまり、磁場の向きを r (radian) としたとき、始点から終点を見た向きを p とすると、

$$(7) \quad t = p - r \pm 2n\pi$$

となる。ただし $-\pi < t \leq \pi$ とする。定数 α は辺の長さの、定数 β は t の、それぞれ回転力への影響を制御する。

[無向辺の場合]

無向辺は向きがないので方向だけをそろえてレイアウトすることが望まれる場合がある。無向辺をある方向にそろえるために北か南かには関係なく、たとえば、磁場の北向きに近い方の頂点が北を向くように回転力が働く「無向磁針」を導入する (図5)。力の大きさは「磁針」と同じとする。

2.2 磁場

「磁場」は、その性質として強さと向きが利用される。したがって、磁場は平面上の各点に対して向きと強さをベクトルとして与える関数 B で一般的に表現できる。

平行磁場

平面上のどの場所でも向きが一定の磁場を並行磁場と呼ぶ。並行磁場は次のように表される。

$$(8) \quad B(x, y) = b(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

ここで、 \mathbf{u} は磁場の向きを表す単位ベクトル、

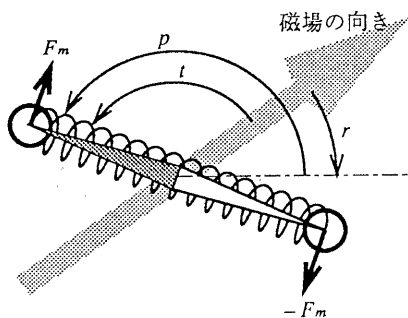


図4: 磁針 (有向辺) が磁場から受ける回転力

$b(x, y)$ は点 (x, y) における磁場の強さである。

放射状磁場

ある点を中心に放射状に外側あるいは内側に向く磁場を放射状磁場と呼ぶ。外側に向く放射状磁場は次のように表される。

$$(9) \quad B(x, y) = b(x, y) \cdot \frac{(x - x_0, y - y_0)}{|(x - x_0, y - y_0)|}$$

点 (x_0, y_0) は放射状磁場の中心であり、 $b(x, y)$ は点 (x, y) における磁場の強さである。

同心円磁場

ある点を中心に同心円状に向く磁場を同心円磁場と呼ぶ。時計回りの同心円磁場は次のように表される。

$$(10) \quad B(x, y) = b(x, y) \cdot \frac{(y - y_0, -x + x_0)}{|(y - y_0, -x + x_0)|}$$

点 (x_0, y_0) は同心円状磁場の中心であり、 $b(x, y)$ は点 (x, y) における磁場の強さである。

複合磁場

「磁場」は仮想的なものであるため、人工的な性質を自由に与えることができる。その一つとして、上で説明したような、磁場の二つ以上を互いに影響し合わないよう組合せた磁場を考えることができる。このようなものを複合磁場と呼ぶ。

向きが互いに直交している二つの並行磁場を組合せた複合磁場を直交並行磁場と呼ぶ。

3. 実現

第2節で説明したマグネティック・スプリング・モデルに基づくグラフの描画アルゴリズムを実現

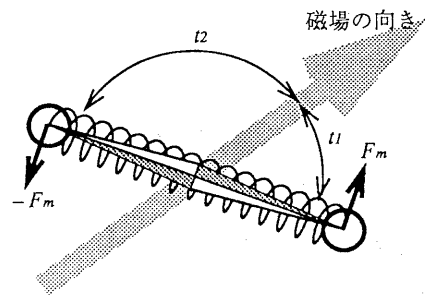


図5: 無向磁針 (無向辺) が磁場から受ける回転力

した。物理モデルの安定状態を求め方はEadesの逐次的方法に従った(図6)。すなわち、各時刻において各頂点 v に働く力 F_v を求め、その力によって頂点 v の位置を $\delta \cdot F_v$ 移動させることを繰り返して安定状態を求める。繰り返しはあらかじめ与えられた回数 M だけ行う。

逐次的に頂点の位置を修正していく方法によって得られるレイアウトは頂点の初期配置に依存するため、初期配置の決め方も重要である。ここではKamadaの方法[4]に習い、頂点を円周上に等間隔に配置した。

```

begin
  各頂点  $v \in V$  の初期配置を計算する;
  for  $i := 1$  to  $M$  do begin
    for each  $v \in V$  do begin
       $F_v := 0$ ;
      for each  $w \in V$  do begin
        if ( $v$ と $w$ が辺 $e$ で隣接) then begin
          辺 $e$ に関して $v$ が受ける $F_s$ を計算する;
          辺 $e$ に関して $v$ が受ける $F_m$ を計算する;
           $F_v := F_v + F_s + F_m$ ;
        end else begin
          頂点 $w$ に対して $v$ が受ける $F_r$ を計算する;
           $F_v := F_v + F_r$ ;
        end;
      end;
    end;
  end;
  for each  $v \in V$  do
    頂点 $v$ を $\delta \cdot F_v$ 移動する;
  end;
  グラフを表示する;
end;

```

図6：実現したアルゴリズム

4. 描画例

実現したプログラムによるグラフの描画例を図7～図10で紹介する。磁場の強さは各例ごとに一樣(つまり $b(x,y)$ が一定、 b で表す)とし、磁場の強さによるバリエーションを示す。各図において、(a)は磁場の強さが $b=0$ であり、スプリング・モデルによるレイアウトと同じである。

並行磁場

図7は閉路有向グラフ(頂点数20, 辺数25)を並行磁場を用いて描いたものである。磁場を強くすると上向き(最少)の辺が減り、(f) $b=8$ では上向きの辺は唯一(最少)となった。

同心円磁場

図8は図7に示したグラフと同一の閉路有向グラフを同心円磁場を用いて描いたものである。磁場が強くなるに連れて時計回りの渦がはっきりとしてきて、閉路の様子が分かりやすくなっている。

直交並行磁場

図9は有向2分木(頂点数20)を直交並行磁場を用いて描いたものである。リスト構造を表現する際にしばしば用いられる種類のレイアウトが磁場を与えることで容易に得られた。さらに図10は図1で示した問題マップの、有向関係を有向辺(実線)とし、その他の3種類の関係を無向辺(点線)として、直交並行磁場を用いて描いたものである。磁場を強くすると、有向辺は下向きに、無向辺は水平方向にそろっている。

5. 美的基準に関する実験

第1節で述べた美的基準が磁場の導入によってどう影響を受けるかを実験によって調べた。ここでは、2分木および混在グラフのレイアウトに対する直交並行磁場の影響について報告する。

ランダムに生成した2分木(頂点数20)および非閉路混在グラフ(頂点数20, 辺数25)のそれぞれ30個をサンプルとして、異なる強さの直交並行磁場を用いてレイアウトを行った。そして、美的基準(1), (2), (4), (5)をもとに数量化した基準：辺の長さの平均と分散、辺の交差数の平均、各頂点から最も近い非隣接頂点までの距離の平均と分散、磁場に対する辺の向き(のずれ角)の平均と分散、のそれぞれと磁場の強さとの関係をプロットしたものが図11である。

磁場によって、辺の長さの分散(非均一さ)や非隣接頂点間の距離がどちらかという悪影響を受けていることが分かる。ただし、辺の交差数に関しては磁場の導入によってむしろ減少している。磁場の導入はスプリングだけによって得られるレイアウトを歪めるので、スプリング・アルゴリズムが無向グラフに対して(1)–(4)などの美的基準に関して最もよい結果を与えるとすると、磁場がこれらの基準に関しては悪影響を与えることは当然の結果といえる。

一般に複数の美的基準は互いに競合する可能性がある。図11は、我々のモデルにおいては基準の(1)や(4)と、(5)が競合することを示している。さらに、その競合する基準のどれをどの程度重視する

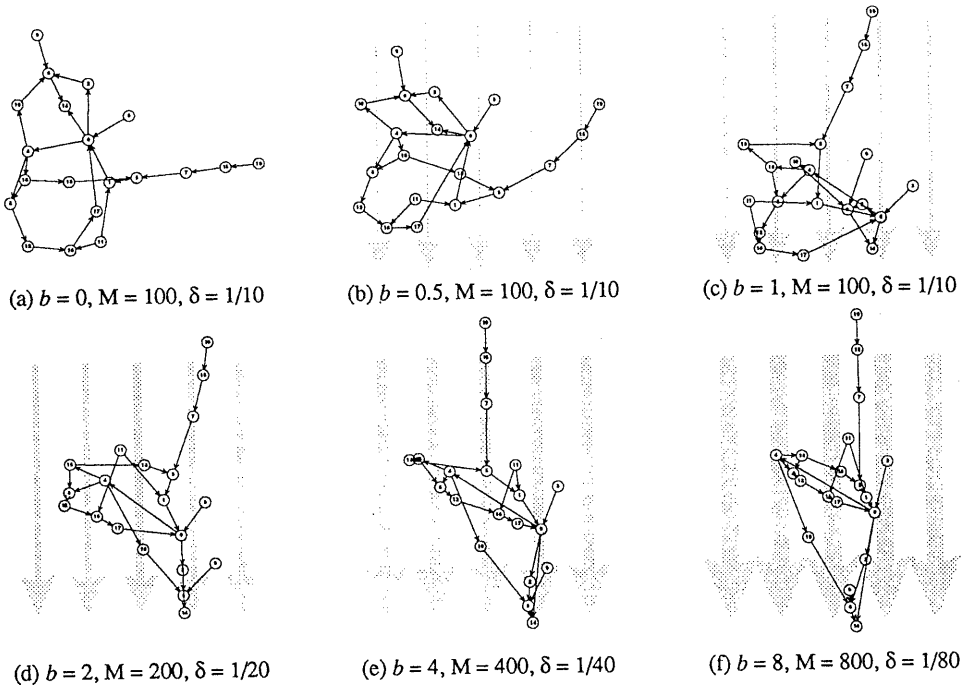


図7：並行磁場における非閉路有向グラフ（頂点数20，辺数25）の描画例
 $c_s = 2, c_r = 1, c_m = 2, \alpha = 1, \beta = 1$
 磁場の強さ**b**によるバリエーション（磁場のイメージを薄いグレイで描いた）

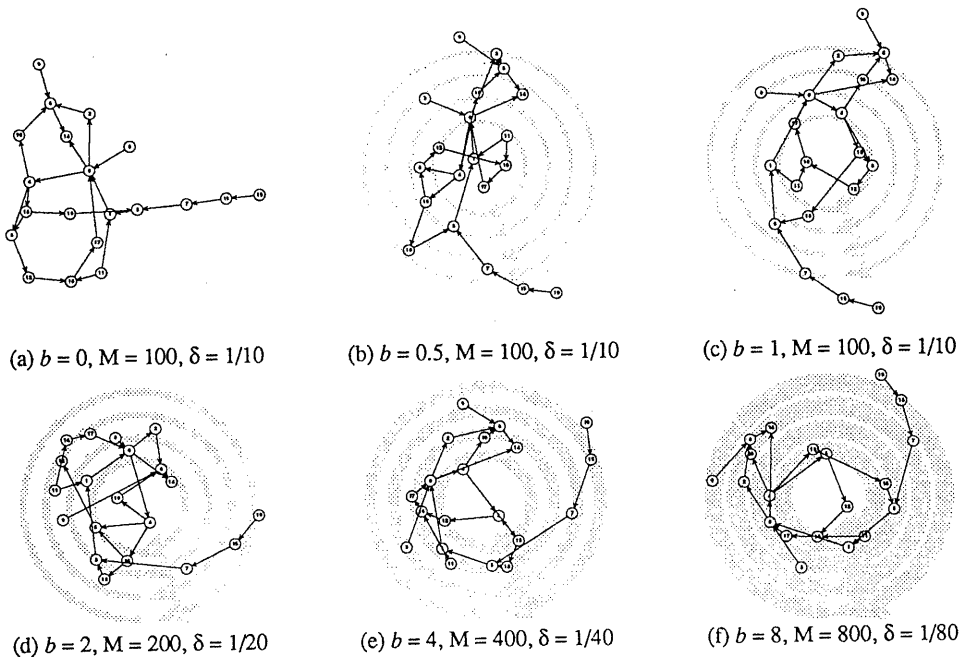
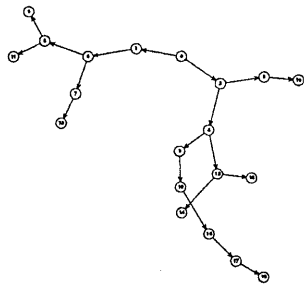
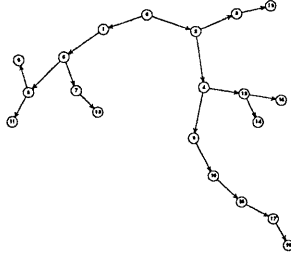


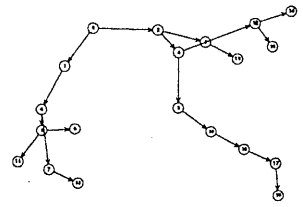
図8：同心円磁場における非閉路有向グラフ（図7と同一のグラフ）の描画例
 $c_s = 2, c_r = 1, c_m = 2, \alpha = 1, \beta = 1$
 磁場の強さ**b**によるバリエーション（磁場のイメージを薄いグレイで描いた）



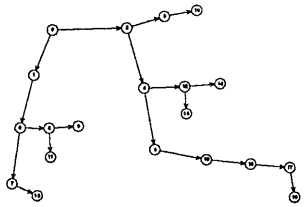
(a) $b = 0, M = 100, \delta = 1/10$



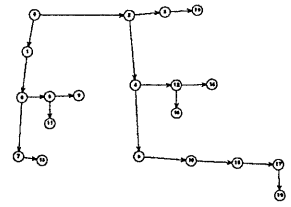
(b) $b = 0.25, M = 100, \delta = 1/10$



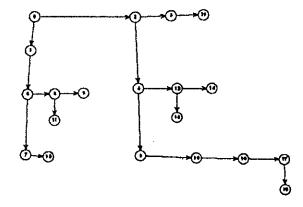
(c) $b = 1, M = 100, \delta = 1/10$



(d) $b = 2, M = 200, \delta = 1/20$

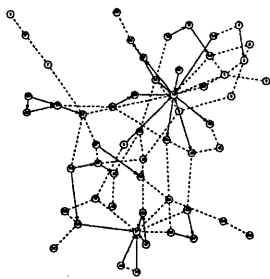


(e) $b = 8, M = 800, \delta = 1/80$

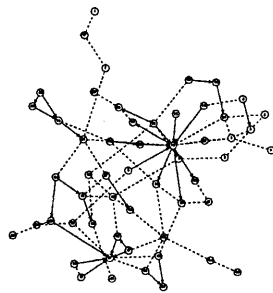


(f) $b = 16, M = 1600, \delta = 1/160$

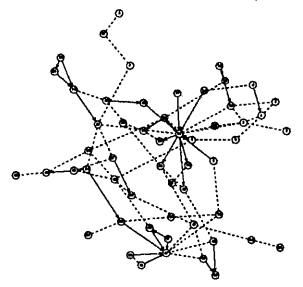
図9：直交並行磁場における2分木（頂点数20）の描画例
 $c_s = 2, c_r = 1, c_m = 2, \alpha = 0, \beta = 1$
 磁場の強さ b によるバリエーション



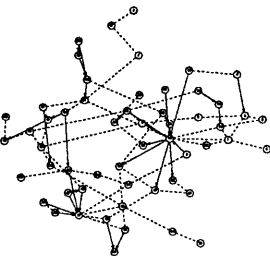
(a) $b = 0, M = 300, \delta = 1/10$



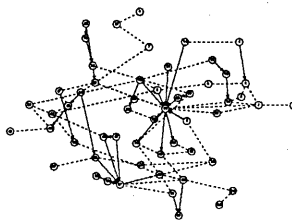
(b) $b = 0.25, M = 300, \delta = 1/10$



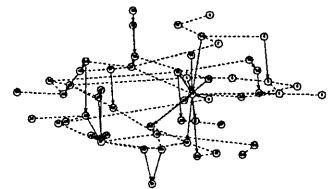
(c) $b = 0.5, M = 300, \delta = 1/10$



(d) $b = 1, M = 300, \delta = 1/10$



(e) $b = 2, M = 600, \delta = 1/20$



(f) $b = 4, M = 1200, \delta = 1/40$

図10：直交並行磁場における混在グラフ（図1と同型；頂点数55，有向辺31，無向辺51）の描画例
 $c_s = 2, c_r = 1, c_m = 2, \alpha = 0, \beta = 2$
 磁場の強さ b によるバリエーション

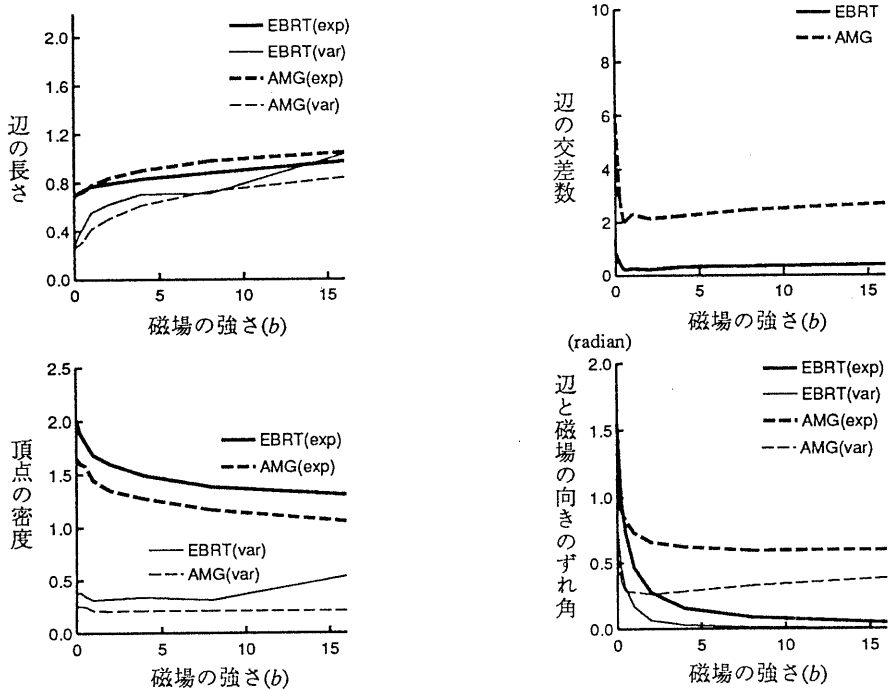


図11：美的基準への直交並行磁場の影響を調べた実験の結果
EBRT: 2分木 (頂点数20), AMG: 非閉路混在グラフ (頂点数20, 辺数25)

かを磁場の強さというパラメータで容易に変更できると考えられる。これは従来のアルゴリズムではアルゴリズム自身に組み込まれることが多く変更が容易でなかった美的基準をユーザが直感的にカスタマイズできるという、マグネティック・スプリング・モデルの一つの優れた点と言える。

6. まとめ

無向グラフの描画法であるスプリング・モデルに磁場を導入したマグネティック・スプリング・モデルを提案した。これにより、グラフの自動レイアウトにおいて、辺の向きあるいは方向を制御することが可能になった。

提案したモデルの変形および拡張としては、磁場のバリエーションとして、サインカーブのように波打った磁場など様々な形や、ある局所領域だけに存在するといったような性質も考えることができる。さらに今後の課題でもあるが、重力場など磁場以外の「場」を導入することで多様な制約条件を直感に合った形で物理モデルとして記述することが可能になると期待できる。

参考文献

- [1] P. Eades and R. Tamassia, Algorithms for drawing graph: An annotated bibliography, Tech. Rep. CS-89-09, Dept. of Computer Science, Brown Univ., 1989.
- [2] M. J. Bickerton, A practitioner's handbook of requirement engineering methods and tools, Oxford Univ., 1992.
- [3] P. Eades, A Heuristics for Graph Drawing, *Congressus Numerantium*, Vol. 42, pp. 149-160, 1984.
- [4] T. Kamada, On Visualization of abstract objects and relations, Dr. S. thesis, Univ. of Tokyo, 1988.
- [5] Fruchterman, T. and Reingold, E., Graph Drawing by Force-directed Placement, *Software - Practice and Experience*, Vol. 21, No. 11, pp. 1129-1164, 1991.
- [6] 鈴木和彦, 鎌田 富久, グラフ構造理解のための単純無向グラフの自動描画アルゴリズム, 第35回プログラミング・シンポジウム論文集, pp. 71-82, 1994.