

# スロットを用いた有限バッファ ループネットにおける棄却率の解析

照屋 健  
(琉球大)

白鳥則郎  
(東北大)

野口正一  
(通研)

1. はじめに 近年、オフィスオートメーション等が進展するにつれて、ローカルネットの研究が盛んである。ローカルネットは大別してバス型とリング型に分けられ、リング型の中ではトークン・リング方式とスロット方式とに分けられる。トークン・リング方式とスロット方式にはそれぞれ長所と短所があり、それぞれに特徴があつて優劣はつけがたい。本稿では、スロットを用いたループネットにおける問題を取りあげてみた。スロットを用いたループネットではノード間の相互依存性もあり、スロット方式の本質的な問題である。からみ合いがシステムパフォーマンスに与える影響を究明し、設計問題との関連、合わせてもバッファサイズの設定、棄却率の決定等を研究することは大切なことである。本稿では、バッファサイズが有限の場合のパケットの棄却率について解析した。

2. ループネットのモデル 図1のループネットのモデルにおいて、パケットは一方方向(時計方向)に伝送されるものとする。ノード*i*からノード*j* ( $j=1, 2, \dots, N-1$ )へ送られるパケットの生起率を $d_{ij}$ とし、この生起率を宛先分配率と呼ぶ。ここで $\sum_{j \neq i} d_{ij} = 1$  ( $i \neq j$ )で、 $N$ はループに連結されているノードの数を表わす。解析において考慮された条件は次の通りである。(a)パケットは固定長の単一構成とする。

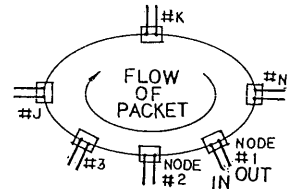


図1 ループネット

スロット長は $T$  [sec]で一定サービスとする。(b)パケットは各ノードのバッファレジスタへ到着率 $\lambda$  [packet/sec]のポアソン分布に従って到着する。バッファサイズは有限でサイズを $m$ とし、バッファ内に収容されないであふれたパケットは棄却される。

(c)パケットは図1のように上流から下流へ単一方方向(時計方向)にのみ伝送される。(d)発生地ノードで生起したパケットは誤りなく目的地ノードに伝送され、目的地ノードにおいて確実に受信される。(e)パケットの宛先は宛先分配率に従って決定される。本稿では、パケットの宛先分配率 $d_{ij}$ はノードに関係なく、すべて等しい分布をとる対称の場合を考え、これらの宛先分配率を $d_1, d_2, \dots, d_{N-1}$ とする。宛先分配率の添字の小さい順に特定のノードから他のノードへ宛てられることを表わす。

3. 棄却率の解析 スロットの先頭が図2のA点を通過し、次の隣接するステーションへ動こうとする直前(図2のB点)において、バッファ中に*i*個のパケットの存在する定常確率を $P_i$ とする。以下この時点に注目し諸量を計算する。*i*個のパケットがバッファ中に存在し、次の時点でパケットが*j*個となる確率を $P_{i,j}$ とすれば状態遷移は図3のようになり、状態*i*から出る確率を $P_i(out)$ 、状態*i*へ入る確率を $P_i(in)$ とすれば、次の関係式が成り立つ。図3で、①はバッファ中に*i*個のパケットが存在する状態を示す。

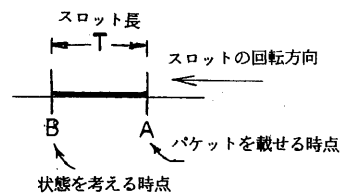


図2 スロットのモデル

$$P_i(out) = S_{i,i-1} + S_{i,i+1} + S_{i,i+2} + \dots + S_{i,j} + \dots + S_{i,m} \quad (1)$$

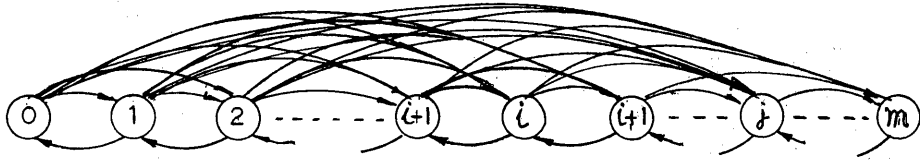


図3 バッファ長の状態遷移

$$P_i(\text{in}) = S_{i-1,i} + S_{0,i} + S_{1,i} + \dots + S_{i,j} + \dots + S_{i-1,i} \quad (2)$$

上の式を具体的な式の項で表わすと次のようになる。

$$P_i(\text{out}) = \begin{cases} P_0 \sum_{\ell=1}^m \{k_\ell (1-\nu) + k_{\ell+1} \nu\} & i=0 \quad (3) \\ P_i \left[ k_0 \nu + \sum_{\ell=1}^{m-i} \{k_\ell (1-\nu) + k_{\ell+1} \nu\} \right] & i \geq 1 \quad (4) \end{cases}$$

$$P_i(\text{in}) = \begin{cases} P_1 k_0 \nu & i=0 \quad (5) \\ P_{i+1} k_0 \nu + P_0 k_i + \sum_{j=1}^{i-1} P_j \{k_{i-j+1} \nu + k_{i-j} (1-\nu)\} & 1 \leq i \leq m-1 \quad (6) \\ P_0 k_i + \sum_{j=1}^{i-1} P_j \{k_{i-j+1} \nu + k_{i-j} (1-\nu)\} & i=m \quad (7) \end{cases}$$

ここで、 $k_j$  : 1スロット時間中にバッファへ到着する  $j$  個の packets 数、

$$k_j = (\lambda T)^j e^{-\lambda T} / (j!)$$

$\nu$  : 到着したスロットが空の割合、 $(1-\nu)$  : 到着したスロットが使用不可の割合

定常状態では、状態④への入力と状態④からの出力は等しい。従って

$$P_i(\text{in}) = P_i(\text{out}) \quad (8)$$

と置くことが出来る。式(8)によって、式(3)、(4)、(5)、(6)、(7)は次のようになる。

$$\left\{ \begin{aligned} P_1 &= \frac{P_0}{k_0} \left\{ k_{m+1} - k_1 + \frac{1}{\nu} \sum_{\ell=1}^m k_\ell \right\} & i=0 \quad (9) \\ P_{i+1} &= \frac{1}{k_0} \left[ P_i \left\{ k_0 - k_i + k_{m-i+1} + \frac{1}{\nu} \sum_{\ell=1}^{m-i} k_\ell \right\} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=0}^{i-1} P_j \{k_{i-j+1} - k_{i-j}\} - \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{i-1} P_j k_{i-j} \right] & 1 \leq i \leq m-1 \quad (10) \\ P_m &= \frac{1}{k_0} \left[ \sum_{j=0}^{m-1} P_j \{k_{m-j+1} - k_{m-j}\} + \frac{1}{\nu} \sum_{j=0}^{m-1} P_j k_{m-j} \right] & i=m \quad (11) \end{aligned} \right.$$

$\gamma$  を棄却率のない場合 (バッファサイズが無限大の場合) の単一方向伝送における伝送路のトラヒック密度とすると、そのときのトラヒック密度は次式として導かれている。(1)

$$\gamma = \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) \quad N \geq 3 \quad (12)$$

ここで  $d(k+1)$  は宛先分配率の一般形である。 $\gamma'$  を棄却がある場合の単一方向伝送における伝送路のトラヒック密度とし、 $\lambda$  を到着率  $\lambda$  のうち棄却されずに、バッファ内へ入った部分、 $C_p$  を伝送路の回線容量とすると、次の関係式が導かれる。

$$U = 1 - \gamma' / C_p = 1 - \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p = 1 - \lambda (1 - P_m) \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p$$

ここで、 $C_2 = \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p$  ,  $C_1 = 1 - \lambda \sum_{k=1}^{N-2} k d(k+1) / C_p$  とおくと

$$U = C_1 + C_2 P_m \quad (13)$$

また、正規化条件として

$$P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_m = 1 \quad (14)$$

がある。式(13), (14)を用いて式(9), (10), より  $U$  を消去 (式(9)は  $P_0$  も消去) して次の式が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} - (k_1 - k_{m+1}) C_1 + \sum_{l=1}^m k_l + \{ (k_1 - k_{m+1}) C_1 - \sum_{l=1}^m k_l - k_0 C_1 \} P_1 \\ + \{ (k_1 - k_{m+1}) C_1 - \sum_{l=1}^m k_l \} \sum_{k=2}^m P_k - (k_1 - k_{m+1}) C_2 P_m \\ + \{ (k_1 - k_{m+1}) C_2 - k_0 C_2 \} P_1 P_m \\ + (k_1 - k_{m+1}) C_2 \sum_{k=2}^m P_k P_m = 0, \quad i=0 \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} - k_0 C_1 P_{i+1} - k_0 C_2 P_{i+1} P_m + \{ (k_0 - k_1 + k_{m-i+1}) C_1 + \sum_{l=1}^{m-i} k_l \} P_i \\ + (k_0 - k_1 + k_{m-i+1}) C_2 P_i P_m + \sum_{j=0}^{i-1} (k_{i-j} - k_{i-j+1}) C_1 P_j \\ + \sum_{j=0}^{i-1} (k_{i-j} - k_{i-j+1}) C_2 P_j P_m \\ - \sum_{j=0}^{i-1} k_{i-j} P_j = 0 \quad 1 \leq i \leq m-1 \end{array} \right. \quad (16)$$

式(15)と(16)とにおいて、具体的な  $m$  と  $i$  の値を与えれば、非線形  $m$  元連立 2 次方程式が得られる。これらの方程式を解いて求めた  $P_m$  が棄却率である。

4. 宛先分配率とトラヒック密度 宛先分配率については三つのケースについて解析した。三つのケースについてトラヒック密度の式も導いた。

$$\begin{aligned} \text{(case 1)} \quad d_1/d_2 = d_2/d_3 = \dots = d_{N-2}/d_{N-1} = 2 \quad \text{のとき} \\ \gamma = \lambda (2^{N-1} - N) / (2^{N-1} - 1) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \text{(case 2)} \quad d_1 = d_2 = \dots = d_{N-2} = d_{N-1} \quad \text{のとき} \\ \gamma = \lambda (N/2 - 1) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{(case 3)} \quad d_1/d_2 = d_2/d_3 = \dots = d_{N-2}/d_{N-1} = 1/2 \quad \text{のとき} \\ \gamma = \lambda \{ 2^{N-1} (N-3) + 2 \} / (2^{N-1} - 1) \end{aligned} \quad (19)$$

ケース1は特定のノードからその最も隣接する下流のノードへより多く配分する場合、ケース2はすべてのノードに均等に配分する場合、ケース3は特定のノードから最も隣接する下流のノードへより多く配分する場合である。ケース1, 2, 3を宛先配分の方法としてそれぞれType A, Type H, Type Sと呼ぶ。

5. 数値解析 式(16)に式(14)の正規化条件を用いて $P_0$ を消去し、式(15)と合わせると $P_1, P_2, \dots, P_m$ を変数とする非線形 $m$ 元連立2次方程式が得られる。 $m=1$ の場合を除いては、この方程式の一般解はないので、電子計算機の数値解析に頼ることになる。

$m=1$ の場合

$$\begin{aligned} \{ (k_1 - k_2) C_1 - k_1 \} + \{ - (k_1 - k_2) C_1 + k_1 + k_0 C_1 + (k_1 - k_2) C_2 \} P_1 \\ + \{ - (k_1 - k_2) C_2 + k_0 C_2 \} P_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} P_1 = \left[ - \{ - (k_1 - k_2) C_1 + k_1 + k_0 C_1 + (k_1 - k_2) C_2 \} \right. \\ \left. - \left[ \{ - (k_1 - k_2) C_1 + k_1 + k_0 C_1 + (k_1 - k_2) C_2 \}^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 4 \{ - (k_1 - k_2) C_2 + k_0 C_2 \} \{ (k_1 - k_2) C_1 - k_1 \} \right]^{1/2} \right] \\ \left/ \left[ 2 \{ - (k_1 - k_2) C_2 + k_0 C_2 \} \right] \right. \end{aligned} \quad (21)$$

$m=1$ の場合、 $P_1$ を変数とする二次方程式となつて、根の公式を用いて上記のように解くことが出来る。 $m=2$ 以上の場合は、 $m$ の値に応じてそれぞれの場合の $m$ 元連立方程式を作り、具体的に数値を代入して個々の $m$ 元の連立方程式を電子計算機の数値解法で解くことになる。ここではニュートン法を用いて数値計算をおこなった。バッファサイズ $M$ は $m=1$ から $m=7$ までを計算した。

非線形5元連立2次方程式を次に示す。

$$\left\{ \begin{aligned}
 F(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) &= A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + A_4 P_4 + A_5 P_5 \\
 &\quad + A_{15} P_1 P_5 + A_{25} P_2 P_5 + A_{35} P_3 P_5 + A_{45} P_4 P_5 + A_{55} P_5^2 + A \\
 G(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) &= B_1 P_1 + B_2 P_2 + B_3 P_3 + B_4 P_4 + B_5 P_5 \\
 &\quad + B_{15} P_1 P_5 + B_{25} P_2 P_5 + B_{35} P_3 P_5 + B_{45} P_4 P_5 + B_{55} P_5^2 + B \\
 H(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) &= C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3 + C_4 P_4 + C_5 P_5 \\
 &\quad + C_{15} P_1 P_5 + C_{25} P_2 P_5 + C_{35} P_3 P_5 + C_{45} P_4 P_5 + C_{55} P_5^2 + C \\
 S(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) &= D_1 P_1 + D_2 P_2 + D_3 P_3 + D_4 P_4 + D_5 P_5 \\
 &\quad + D_{15} P_1 P_5 + D_{25} P_2 P_5 + D_{35} P_3 P_5 + D_{45} P_4 P_5 + D_{55} P_5^2 + D \\
 T(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5) &= E_1 P_1 + E_2 P_2 + E_3 P_3 + E_4 P_4 + E_5 P_5 \\
 &\quad + E_{15} P_1 P_5 + E_{25} P_2 P_5 + E_{35} P_3 P_5 + E_{45} P_4 P_5 + E_{55} P_5^2 + E
 \end{aligned} \right.$$

この方程式の係数は次の通りである。

$$\begin{aligned}
 A &= -(R_1 - R_6) C_1 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \\
 A_1 &= +(R_1 - R_6) C_1 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - R_0 C_1 \\
 A_2 &= +(R_1 - R_6) C_1 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \\
 A_3 &= +(R_1 - R_6) C_1 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \\
 A_4 &= +(R_1 - R_6) C_1 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) \\
 A_5 &= +(R_1 - R_6) C_1 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - (R_1 - R_6) C_2 \\
 A_{15} &= +(R_1 - R_6) C_2 - R_0 C_2 \\
 A_{25} &= +(R_1 - R_6) C_2 \\
 A_{35} &= +(R_1 - R_6) C_2 \\
 A_{45} &= +(R_1 - R_6) C_2 \\
 A_{55} &= +(R_1 - R_6) C_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= +(R_1 - R_2) C_1 - R_1 \\
 B_1 &= -(R_1 - R_2) C_1 + R_1 + (R_0 - R_1 + R_5) C_1 + (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \\
 B_2 &= -(R_1 - R_2) C_1 + R_1 - R_0 C_1 \\
 B_3 &= -(R_1 - R_2) C_1 + R_1 \\
 B_4 &= -(R_1 - R_2) C_1 + R_1 \\
 B_5 &= -(R_1 - R_2) C_1 + R_1 + (R_1 - R_2) C_2 \\
 B_{15} &= -(R_1 - R_2) C_2 + (R_0 - R_1 + R_5) C_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{25} &= - (R_1 - R_2) C_2 - R_0 C_2 \\
B_{35} &= - (R_1 - R_2) C_2 \\
B_{45} &= - (R_1 - R_2) C_2 \\
B_{55} &= - (R_1 - R_2) C_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= + (R_2 - R_3) C_1 - R_2 \\
C_1 &= - (R_2 - R_3) C_1 + R_2 - R_1 + (R_1 - R_2) C_1 \\
C_2 &= - (R_2 - R_3) C_1 + R_2 + (R_0 - R_1 + R_4) C_1 + (R_1 + R_2 + R_3) \\
C_3 &= - (R_2 - R_3) C_1 + R_2 - R_0 C_1 \\
C_4 &= - (R_2 - R_3) C_1 + R_2 \\
C_5 &= - (R_2 - R_3) C_1 + R_2 + (R_2 - R_3) C_2 \\
C_{15} &= - (R_2 - R_3) C_2 + (R_1 - R_2) C_2 \\
C_{25} &= - (R_2 - R_3) C_2 + (R_0 - R_1 + R_4) C_2 \\
C_{35} &= - (R_2 - R_3) C_2 - R_0 C_2 \\
C_{45} &= - (R_2 - R_3) C_2 \\
C_{55} &= - (R_2 - R_3) C_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D &= + (R_3 - R_4) C_1 - R_3 \\
D_1 &= - (R_3 - R_4) C_1 + R_3 - R_2 + (R_2 - R_3) C_1 \\
D_2 &= - (R_3 - R_4) C_1 + R_3 - R_1 + (R_1 - R_2) C_1 \\
D_3 &= - (R_3 - R_4) C_1 + R_3 + (R_0 - R_1 + R_3) C_1 + (R_1 + R_2) \\
D_4 &= - (R_3 - R_4) C_1 + R_3 - R_0 C_1 \\
D_5 &= - (R_3 - R_4) C_1 + R_3 + (R_3 - R_4) C_2 \\
D_{15} &= - (R_3 - R_4) C_2 + (R_2 - R_3) C_2 \\
D_{25} &= - (R_3 - R_4) C_2 + (R_1 - R_2) C_2 \\
D_{35} &= - (R_3 - R_4) C_2 + (R_0 - R_1 + R_3) C_2 \\
D_{45} &= - (R_3 - R_4) C_2 - R_0 C_2 \\
D_{55} &= - (R_3 - R_4) C_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= + (R_4 - R_5) C_1 - R_4 \\
E_1 &= - (R_4 - R_5) C_1 + R_4 - R_3 + (R_3 - R_4) C_1 \\
E_2 &= - (R_4 - R_5) C_1 + R_4 - R_2 + (R_2 - R_3) C_1 \\
E_3 &= - (R_4 - R_5) C_1 + R_4 - R_1 + (R_1 - R_2) C_1 \\
E_4 &= - (R_4 - R_5) C_1 + R_4 + (R_0 - R_1 + R_2) C_1 + R_1 \\
E_5 &= - (R_4 - R_5) C_1 + R_4 + (R_4 - R_5) C_2 \\
E_{15} &= - (R_4 - R_5) C_2 + (R_3 - R_4) C_2 \\
E_{25} &= - (R_4 - R_5) C_2 + (R_2 - R_3) C_2 \\
E_{35} &= - (R_4 - R_5) C_2 + (R_1 - R_2) C_2 \\
E_{45} &= - (R_4 - R_5) C_2 + (R_0 - R_1 + R_3) C_2 \\
E_{55} &= - (R_4 - R_5) C_2 - R_0 C_2
\end{aligned}$$

6. 結果 入力と棄却率の関係を示すグラフとバッファサイズ  $m$  と棄却率の関係を示すグラフをノード別と Type (宛先分配率) 別とにまとめた。

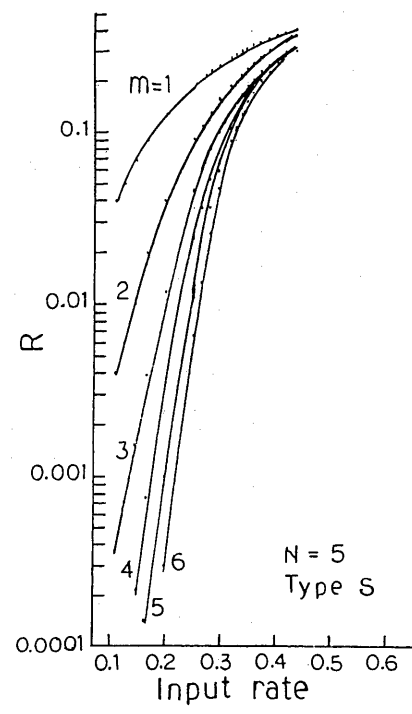
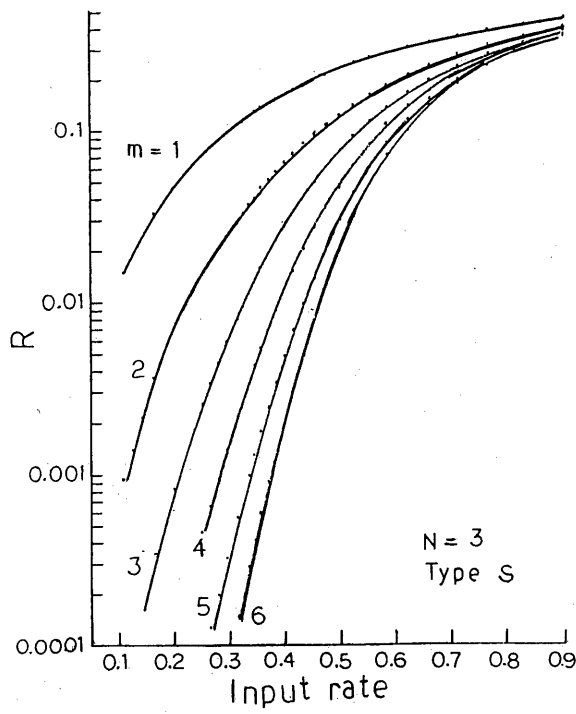
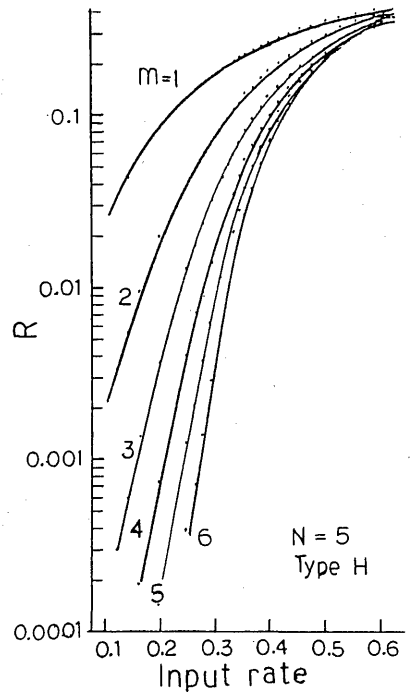
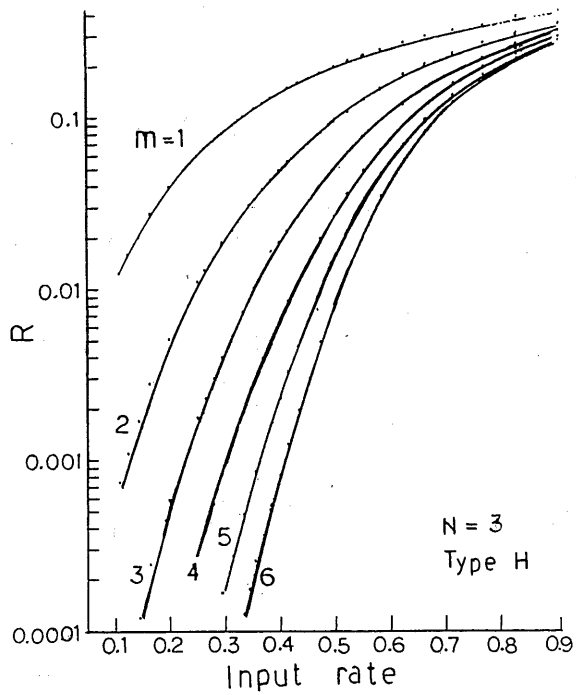


図4 入力と棄却率

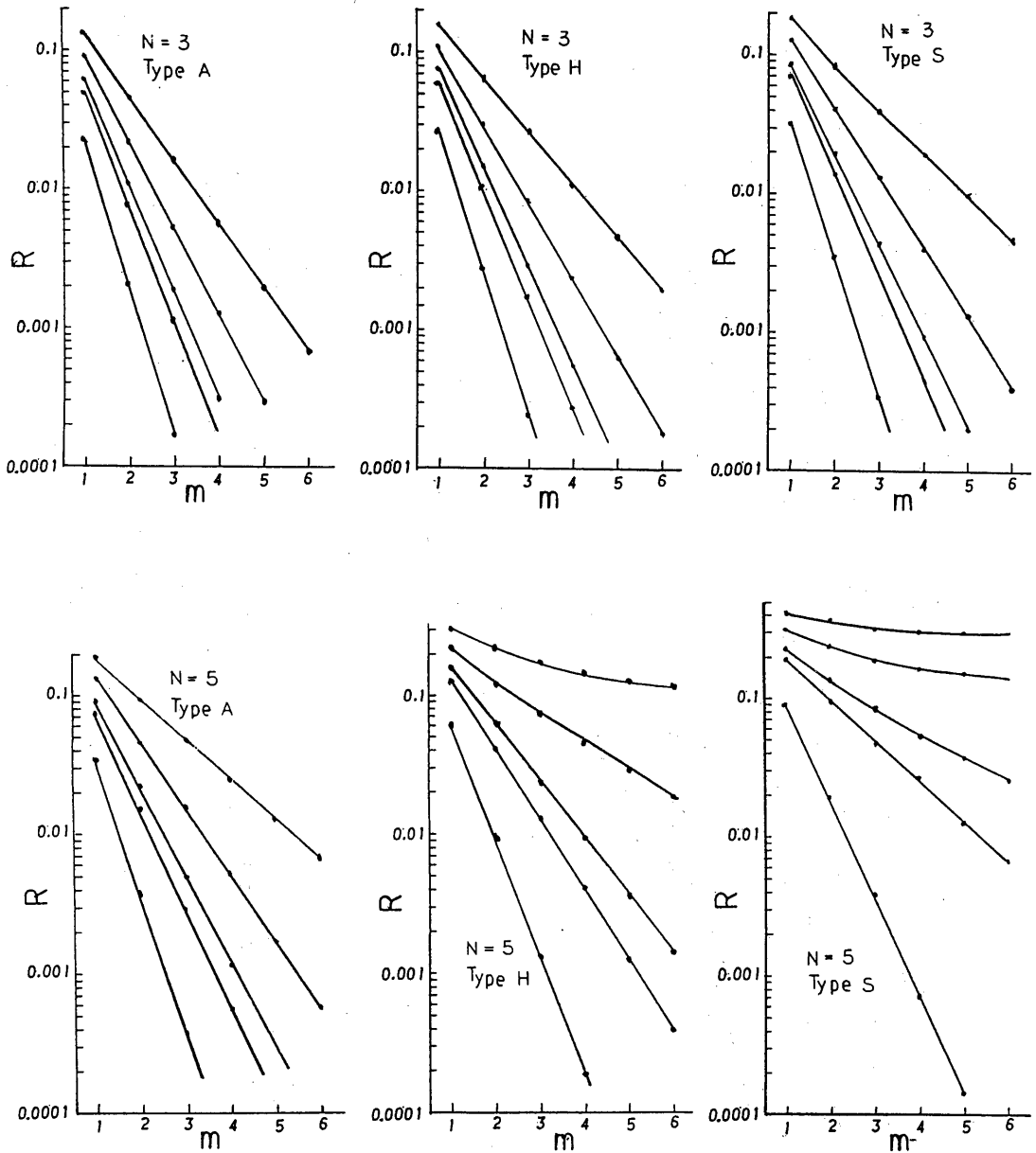


図5 バッファサイズと棄却率

7. 参考文献 (1) 白鳥、野口、大泉: "ループコンピュータネットワークにおけるバッファリングについて", 信学誌, Vol. 59-D, No. 6, 1976 (2) 照屋、白鳥、野口: "ループネットワークにおけるトラヒックの輻輳と効特性", 情報処理学会第25回全国大会講演論文集, IG7, 1982 (3) 照屋、白鳥、野口: "スロットを用いたループネットワークにおけるロード相互依存性について", 情報処理学会分散処理システム研究会資料, 19-2, 1983