重みつきグラフの k 分割問題について

高木 章成* 和田 幸一† 川口 喜三男

名古屋工業大学　電気情報工学科
電子メール [akinari|wada|kawaguchi]@elcom.nitech.ac.jp

従来の無向グラフの k 分割問題を拡張したグラフの点と辺に重みを持つ k 点分割問題 (点の分割) と k 要素分割問題 (点と辺の分割) を定義し、それぞれ k 連結グラフと k 辺連結グラフに対して重みの最大値を d_{max} とするとき分割すべき k 個の連結部分グラフが指定された要素 (基と呼ぶ) を含みそれらに含まれる重みの合計が高々 $d_{max}-1$ しか異ならないように分割出来ることを示す。また、辺の重みが 0 または 1 で点に任意の重みが与えられた k 辺連結グラフに対して点の分割を許せば重み付き k 要素分割可能であることを示す。さらに、基を指定しない (重みなし) k 点分割問題が解けるためには入力グラフが k 連結であることが必要となることを示す。

On k–partition Problems for Weighted Undirected Graphs

Akinari Takaki*　Koichi Wada　Kimio Kawaguchi

Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho, Syowa-ku, Nagoya 466, JAPAN
e-mail:[akinari|wada|kawaguchi]@elcom.nitech.ac.jp

In this paper, we show that we can partition a weighted k–connected (k–edge-connected) graph into k mutually node–disjoint (edge–disjoint) connected subgraphs, each of which contains a specified elememt (called base) and has a specified weight within $d_{max}-1$, where d_{max} is the maximum weight. We also show that there exists a $(k-1)$–connected graph G such that we can not solve the (unweighted) k–vertex–partition problem for G even if any base is not specified.

*現在コナミ (株)

†本研究の一部は平成6年度大川情報通信基金からの助成によって行なわれた。

1 まえがき

無向グラフに対する重み付き k–要素分割問題は以下のように定義される。

重み付き k–要素分割問題

入力：

(1) 連結無向グラフ $G=(V,E): S=V\cup E$,

(2) 重み関数 $f: S \to W(W \subseteq N$: 自然数の集合),

(3) k個の異なる点もしくは辺 $a_1, a_2, \cdots, a_k \in S$($a_i$を基と呼ぶ。),

(4) $\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{x\in S} f(x)$ である k個の自然数 $n_1, \cdots, n_k$, (ただし $f(a_i) \le n_i, (1 \le i \le k)$ とする).

出力：以下の条件を満足する Sの分割 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k, (1 \le i \le k)$

(a) $a_i \in S_i$,

(b) 各 S_iの重みの合計 $\sum_{x\in S_i} f(x) = n_i$,

(c) 各 S_iは G の連結部分グラフを誘導する.

重み付き k–要素分割問題に対して $S=V$とした問題を重み付き k–点分割問題 [4] と定義する。

重み付き k–点分割 (要素分割) 問題に対して出力の条件 (b) を (b')$n_i - d < \sum_{x\in S_i} f(x) < n_i + d$ とした問題を最大誤差 $d-1$ の重み付き k–点分割 (要素分割) 問題と定義する。

また、重み付き k–点分割 (要素分割) 問題において、基を $n(0 \le n \le k)$ 個指定する問題を基 n 指定重み付き k–点分割 (要素分割) 問題と定義する。$n=0$ のとき基無指定重み付き k–点分割 (要素分割) 問題と呼ぶ。

重み付き k–点分割問題において、$W = \{1\}(W=\{0,1\})$ の場合は k–点分割問題 [1](部分集合 k–点分割問題 [4]) に相当する。重み付き k–要素分割問題において、$f: V \to \{0\}, E \to \{1\}$ の場合は k–辺分割問題 [1] に相当し、$f: V \to \{0,1\}, E \to \{0\}$ の場合は辺独立性に関する部分集合 k–点分割問題 [?] に相当し、$W=\{0,1\}$ の場合は k–要素分割問題 [3] に相当する。グラフの k–点（要素）分割問題は故障耐性の高い路線割当の構成に利用される [5] ので効率的なアルゴリズムが望まれている。また分割数と点連結度がどのような関係になるかは興味深い問題である。

従来、G が k–点分割 (要素分割) 可能であるための必要十分条件は G が k–(辺) 連結であること [1][3] が示されている。また、基 1 指定 k–要素分割問題に対して次のことが示されている [3] 。(1) 入力グラフが 2–辺連結ならば $O(|V|^2)$ 時間で基 1 指定 3–要素分割問題が解ける。(2) 入力グラフが 3–辺連結ならば $O(|E|^2)$ 時間で基 1 指定 4–要素分割問題が解ける。(3) 入力グラフが 4–辺連結ならば $O(|V|\sqrt{|V|log|V|}+|E|)$ 時間で $k \ge 2$ に対する基 1 指定 k–要素分割問題が解ける。

本論文では以下のことを示す。

・基無指定 k–点分割できるための必要条件が k–連結であることを述べる。よって、k–点分割の場合は点連結度は下げられないことがわかる。

・従来重み付き k–点分割可能なグラフは基の指定のあるなしにかかわらず、k点以上の完全グラフに限られることが示されている [4] 。ここでは、w_{max}を重みの最大値とする時 k–(辺) 連結グラフは最大誤差 $w_{max}-1$ 重み付き k–点分割 (要素分割) 可能であることを示す。

・重み関数 $f: E \to \{0,1\}, V \to W(W \subseteq N$: 自然数の集合) の定義された k–辺連結グラフは点に対する重みの分割を許せば重み付き k–要素分割可能であることを示す。

1.1 諸定義

集合 A の要素数を $|A|$ と表す。単純な無向グラフすなわち、多重辺, 自己ループのない無向グラフ $G=(V,E)$ は空でない点の有限集合 Vと V に含まれる相異なる点の非順序対の有限集合 E から定義される。Eの元を辺と呼び $(u,v)(u,v \in V, u \ne v)$ と表す。以降単純な無向グラフを単にグラフと呼ぶ。またグラフ G の点集合を $V(G)$ 、辺集合を $E(G)$ と記述することがある。

グラフ $G=(V,E)$ の点 u に対して u の次数を $deg_G(u) = |\{(u,v)|(u,v) \in E\}|$ と定義する。

グラフ $G=(V,E)$ と $G'=(V',E')$ に対して $V' \subseteq V$ かつ $E' \subseteq E$が成り立つとき G'を G の部分グラフと呼び、特に $V'=V$であるとき、全域部分グラフと呼ぶ。グラフ $G=(V,E)$ の $V' \subseteq V$に対する誘導部分グラフ $G[V']$ は $(V', \{(u,v)|(u,v) \in E, u,v \in V'\})$ と定義される。グラフ $G=(V,E)$ の $E' \subseteq E$に対する誘導部分グラフ $G[E']$ は $(\{u,v|(u,v) \in E'\}, E')$ と定義される。グラフ $G=(V,E)$ の $S \subseteq V \cup E$に対する誘導部分グラフ $G[S]$ は $E'=E \cap S, V'=V \cap S$ として $(V' \cup \{u,v|(u,v) \in E'\}, E')$ と定義される。

グラフ $G=(V,E)$ と辺 e に対して、$G-e=(V, E-\{e\})$ と定義する。

グラフ $G=(V,E)$ 上の点列 $P=(v_0,\cdots,v_p)$ が各 $i(0 \le i \le p-1)$ について $(v_i, v_{i+1}) \in E$ を満たすとき、Pを v_0, v_p間の長さ p の路と呼ぶ。また、$v_1,\cdots,v_{p-1}$ を Pの内点と呼ぶ。特に、$v_0,\cdots,v_p$がすべて異なるとき、Pは単純であるという。路 $P=(v_0,\cdots,v_p)$ が長さ 3 以上で、$v_0,\cdots,v_{p-1}$ が全て異なり、$v_p=v_0$であるとき、Pを閉路と呼ぶ。路 $P=(v_0,\cdots,v_p)$ を点集合 $\{v_0,\cdots,v_p\}$, 辺集合 $\{(v_i,v_{i+1})|0 \le i \le p-1\}$ のグラフとして扱うこともある。

グラフ G の任意の 2 点間に路が存在するとき、G は連結であるといい、また、G のある 2 点 u,v間に路が存在しないとき、G は (G において u,vは) 非連結であるという。閉路を含まない連結グラフを木と呼ぶ。

G_1, G_2を G の部分グラフとする。$V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ であるとき、G_1と G_2は点独立であるといい、$E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$ であるとき、G_1と G_2は辺独立であるという。路 P_1, P_2が端点

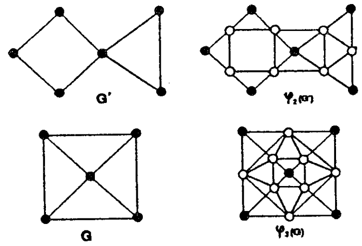

図 1: $\varphi_2(G'), \varphi_3(G)$ の例

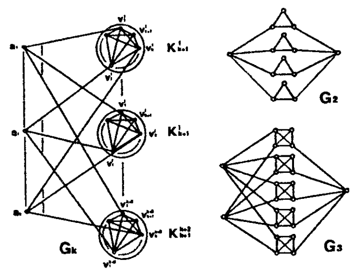

図 2: 基無指定 $(k+1)$–点分割できない k–連結グラフの例

以外の点を共有しないとき、P_1, P_2は内点独立路であるという。また、路 P_1, P_2が辺を共有しないとき、P_1, P_2は辺独立路であるという。

グラフ G の任意の $k-1$ 点 (辺) を削除したグラフが非連結とならないとき、G を k–連結グラフ (k–辺連結グラフ) と呼ぶ。

重み関数 $f : V \cup E \to W$ ($W \subseteq N$: 自然数の集合) の定義されたグラフ $G = (V, E)$ において、$S \subseteq V \cup E$に対して $f(S) = \sum_{s \in S} f(s)$ と定義する。また、$f(G) = \sum_{s \in V \cup E} f(s)$ と定義する。

1.2 グラフの変換 φ

グラフ $G = (V, E)$ に対して$\varphi_k(G) = (\varphi(V), \varphi(E))(k \geq 2)$ は次のように定義される。

点集合$\varphi(V)$ は $v \in V$に対する $max(1, k-2)$ 個の点$\varphi(v_1), \varphi(v_2), \cdots, \varphi(v_{max(1,k-2)})$ と $e \in E$ に対する点$\varphi(e)$ から構成される。

辺集合$\varphi(E)$ は次のように定義される。vをVの任意の点とし、その点に隣接する点を $u_0, u_1, \cdots, u_{d-1}$とし、$e_i = (v, u_i)$ $(0 \leq i \leq d-1)$ とする。$d \geq 3$ の場合、$(\varphi(e_i), \varphi(e_{(i+1) mod\ d}))(0 \leq i \leq d-1)$ と $(\varphi(e_i), \varphi(v_j))$
$(0 \leq i \leq d-1, 1 \leq j \leq max(1, k-2))$ が$\varphi(E)$ に存在する。$d = 2$ の場合、$(\varphi(e_0), \varphi(e_1))$ と $(\varphi(e_i), \varphi(v_j))$ $(0 \leq i \leq d-1, 1 \leq j \leq max(1, k-2))$ が$\varphi(E)$ に存在する。$\varphi_k(G)$ の例を図 1に示す。

$\varphi_k(G)$ は $max(1, k-2)|V| + |E|$ 個の点と $O(k|E|)$ 本の辺を持ち、$O(k(|V| + |E|))$ の時間で計算できる。

命題 1 [2][3] 任意の k (≥ 2) に対して G が k–辺連結グラフであるならば$\varphi_k(G)$ は k–連結グラフである。 □

$G' = (V', E')$ を$\varphi_k(G)$ の連結部分グラフとする。$G = (V, E)$ の部分グラフ$\varphi_k^{-1}(G') = (\varphi^{-1}(V'), \varphi^{-1}(E'))$ は次のように定義される。

$\varphi^{-1}(V') = \{v | \varphi(v_i) \in V'$ かつ $v \in V\} \cup \{e$ の端点 $| \varphi(e) \in V'$ かつ $e \in E\}$
$\varphi^{-1}(E') = \{e | \varphi(e) \in V'$ かつ $e \in E\}$

命題 2 [3]$k \geq 2$ に対して、
$(a)\varphi_k(G)$ の部分グラフ $G' = (V', E')$ が連結ならば$\varphi_k^{-1}(G')$ は連結である。
$(b)\varphi_k(G)$ の部分グラフ $G' = (V', E'), G'' = (V'', E'')$ が点独立ならば$\varphi_k^{-1}(G'), \varphi_k^{-1}(G'')$ は辺独立である。 □

2 $k-1$–連結グラフの基無指定 k–点分割問題

基無指定 k–要素分割問題は分割数より入力グラフの辺連結度を kより小さくできるが、基無指定 k–点分割問題は分割数より入力グラフの点連結度を小さくできないことを示す。

次のようなグラフ G_kを考える (図 2)。G_kは $k+2$ 個の $k+1$ 点完全グラフ K_{k+1}^i(K_{k+1}^i の点をそれぞれ $v_1^i, \cdots, v_{k+1}^i$ $(1 \leq i \leq k+2)$ とする) と k個の点 $a_1, \cdots, a_k$からなり、辺 $(a_j, v_j^1), \cdots, (a_j, v_j^{k+2})$ $(1 \leq j \leq k)$ が存在するグラフとする。このとき以下の 2 つの補題が成り立つ。

補題 1 グラフ G_kは k–連結グラフである。

(証明) グラフ G_kの任意の異なる 2 点 x, yを考える。
・$x, y \in V(K_{k+1}^i), (1 \leq i \leq k+2)$ の場合
K_{k+1}^iは $k+1$ 点完全グラフであるので、明らかに x, y 間に k本の点独立な路が存在する。
・$x \in V(K_{k+1}^i), y \in V(K_{k+1}^j), (1 \leq i < j \leq k+2)$ の場合
$x = v_s^i, y = v_t^j$とすると、以下のように k本の点独立な路を構成できる。
$(v_s^i, v_1^i, a_1, v_1^j, v_t^j), (v_s^i, v_2^i, a_2, v_2^j, v_t^j),$
$\cdots, (v_s^i, v_k^i, a_k, v_k^j, v_t^j)$
・$x = a_i, y = a_j, (1 \leq i < j \leq k)$ の場合
x, y間に以下のように k本の点独立な路を構成できる。
$(a_i, v_i^1, v_j^1, a_j), (a_i, v_i^2, v_j^2, a_j), \cdots, (a_i, v_i^k, v_j^k, a_j)$

・$x = a_i, y \in V(K^j_{k+1}), (1 \le i \le k, 1 \le j \le k+2)$ の場合
$y = v^j_i$とすると、以下のように k本の点独立な路を構成できる。
$(f(x) = x \ mod \ (k+2), g(x) = x \ mod \ k$とする。)
$(a_i, v^j_i, v^j_i), (a_i, v^{f(j+1)}_i, v^{f(j+1)}_{g(i+1)}, a_{g(i+1)}, v^j_{g(i+1)}, v^j_i),$
$\cdots, (a_i, v^{f(j+k-1)}_i, v^{f(j+k-1)}_{g(i+k-1)}, a_{g(i+k-1)}, v^j_{g(i+k-1)}, v^j_i)$

よって、グラフ G_kの任意の2点間に k本の点独立な路を構成できるので補題1は成り立つ。 □

補題 2 グラフ G_kは基無指定 $(k+1)$-点分割できない。

(証明) グラフ G_kに対して、$n_1 = k+2, \cdots, n_k = k+2, n_{k+1} = 2(k+1)$ となる基無指定 $(k+1)$-点分割が存在すると仮定し、その解をそれぞれ $G_1 = (V_1, E_1), \cdots, G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ とする。

$G_i = (V_i, E_i), (1 \le i \le k)$ は $|V_i| = n_i = k+2$ となるような連結部分グラフであるので、少なくともその点の1つは $a_j, (1 \le j \le k)$ を含んでいる。また各 $G_i, (1 \le i \le k+1)$ は点独立であるので、$a_1, \cdots, a_k$の全ての点は $V_1, \cdots, V_k$の中に含まれており、各 G_iの点独立性から G_{k+1}は点 $a_1, \cdots, a_k$を含まない。しかし $G_{k+1} = (V_{k+1}, E_{k+1})$ は $|V_{k+1}| = n_{k+1} = 2(k+1)$ となるような連結部分グラフであるので、少なくともその点の1つは $a_j, (1 \le j \le k)$ を含まなければならず矛盾する。よって補題2は成り立つ。 □

以上の補題から次の定理が成り立つ。

定理 1 基無指定 k-点分割できるための必要条件は入力グラフが k-連結であることである。

3 誤差あり重み付き k–分割問題

3.1 k–連結グラフに対する誤差あり重み付き k–点分割問題

この問題の解の存在性の証明に用いる k–連結グラフの性質を述べる。

命題 3 [1] グラフ $G = (V, E)$ が k-連結グラフであるための必要十分条件は任意の点集合 $V_1 \subset V$ から $V - V_1$ $(|V - V_1| \ge k)$ の少なくとも k個の点に接続している辺が存在することである。□

次に、重み関数 $f : V \to W = \{0, 1, \cdots, d\}$ の定義された k–連結グラフの点集合を最大誤差 $d-1$ の重み付き k–点分割するための性質を述べる。補題3は Györi の証明 [1] を拡張したものである。

補題 3 重み関数 $f : V \to W = \{0, 1, \cdots, d\}$ の定義された k-連結グラフ $G = (V, E)$ において以下の条件 $(A^-) \sim (C^-)$ を満たす互いに素な点集合 $V^-_1, \cdots, V^-_k$が与えられたとする。

(A^-) $G[V^-_i]$ は a_iを根とする生成木 C^-_iを含む,

(B^-) 各 V^-_iの点の重みの合計 $f(V^-_i) = n^-_i \le n_i$,

(C^-) $f(V^-_j) = n^-_j \le n_j - d$ となる jが存在する.

このとき $n^-_j \le n_j - d$ となる任意の $j (1 \le j \le k)$ に対して以下の条件 $(A^+) \sim (C^+)$ を満たす互いに素な点集合 $V^+_1, \cdots, V^+_k$が存在する。

(A^+) $G[V^+_i]$ は a_iを根とする生成木 C^+_iを含む,

(B^+) V^+_jの点の重みの合計 $f(V^+_j) = n^+_j = n^-_j + \alpha$
(ただし $1 \le \alpha \le d$),

(C^+) $n^-_i \le n_i - d$ となる $i (i \neq j)$ に対して $n^-_i \le f(V^+_i) \le n_i$, $n_i - d < n^-_i \le n_i$となる $i (i \neq j)$ に対して $n_i - d < f(V^+_i) \le n_i$.

(証明) ここで一般性を失うことなく $j = 1$ としてよい。また、次の条件を考える。

(A^0) $G[V^0_i]$ は a_iを根とする生成木 C^0_iを含む,
(B^0) V^0_jの点の重みの合計 $f(V^0_j) = n^0_j = n^-_j$,
(C^0) $n^-_i \le n_i - d$ となる $i (i \neq j)$ に対して $n^-_i \le f(V^0_i) \le n_i$, $n_i - d < n^-_i \le n_i$となる $i (i \neq j)$ に対して $n_i - d < f(V^0_i) \le n_i$.

$G_1 = G[V^0_1 \cup \cdots \cup V^0_k]$ とし、そして、$V - V(G_1)$ の点集合を Sとする。そして、$(A^0) \sim (C^0)$ の条件を満たし $C^0_1, \cdots, C^0_k$から Sの重み0の点に辺が存在しないもので、なおかつその中で C^0_1の点数が最も多いものを考える。

ここで G は k–連結グラフであるので命題3より V^0_1から $V - V^0_1$の k個の点に辺が存在する。従って、V^0_1から $a_2, \cdots, a_k$以外の $V - V^0_1$の点に少なくとも1本の辺が存在するので以下の場合分けにより証明する。この辺を $< x, y >$ $(x \in V^0_1)$ とする。

A：Sの点に辺$< x, y >$が存在する場合

$f(y) = 0$ の場合は $C^0_1, \cdots, C^0_k$から Sの重み0の点に辺が存在しないことに矛盾するのでこのような場合は存在しない。

$f(y) \neq 0$ の場合は $C^+_1 = C^0_1 \cup (\{y\}, < x, y >), C^+_i = C^0_i (2 \le i \le k)$ とすることによって $(A^+) \sim (C^+)$ の条件が満足された $V^+_1, \cdots, V^+_k$が構成される。

B：Sの点に辺$< x, y >$が存在しない場合

生成木 C^0_1から点集合 $S = V - V(G_1) \neq \emptyset$への辺は存在しないことと、$G$ は k–連結なので命題3より V^0_1から $V - V^0_1$の点の少なくとも k個の点に辺が存在しているので $a_2, \cdots, a_k$とは異なる $V - V^0_1 - S$の点に少なくとも1本の辺$< x, y >$が存在する。yが属する生成木を C^0_jとする。C^0_j上で yを通らないで a_jから到達可能な点集合を $S_j(y)$ とする。全ての $S_j(y)$ の中で $f(S_j(y))$ が最も大きくなる yを P_{j1}と表し、P_{j1}を C^0_jにおける第一種F点 (favoured vertex) と呼ぶ。また、$f(S_j(y))$ が最も大きい点集合 $S_j(y)$ を第一種F点集合 (favoured vertex set) と呼び S_{j1}と表す。

ここで条件 $(A^0) \sim (C^0)$ を満たし $G[V^0_1]$ のみ G_1と同じでかつ、$G[V^0_1], \cdots, G[V^0_k]$ から Sの重み0の点に辺が存在しない $V^0_1, \cdots, V^0_k$から誘導される G の任意の部分グラフ G'を考える。

G^0_j以外にもいくつかの生成木において同様に第一種F点, 第一種F点集合が定義できるので第一種F点集合の点の重みの総和が最大である G'を新たに G_1とし、$G[V^0_j]$ における第一種F点集合を (存在する

ならば)S_{j1}とする。

この場合はS_{j1}からSの点への辺が存在する場合とS_{j1}からSの点への辺が存在しない場合に分けられる。この辺を$< u,v >$ $(u \in S_{j1})$とする。ここでS_{j1}からSの点への辺が存在する場合は$f(v) = 0, f(v) \neq 0$の場合に分けられる。しかし、$f(v) = 0$の場合は$C_1^0, \cdots, C_k^0$からSの重み0の点に辺が存在しないことに矛盾するので以下の場合分けを考える。

Case 1：S_{j1}からSの点へ辺$< u,v >$ $(v \in S)$が存在しかつ$f(v) \neq 0$の場合

$T_{j1} = V_j^0 - S_{j1}$とし、T_{j1}の重みの合計をw_{j1}とする。またT_{j1}から誘導される生成木C_j^0の部分木を$T_{P_{j1}}$とする。

Case 1.1：$w_{j1} > f(v)$の場合

この場合次の条件を満たす$V(T_{P_{j1}})$の部分集合Rを考える。$T_{P_{j1}} - R$が連結で、$n_j^0 \leq n_j - d$の場合$n_j^0 < f(C_j^0) - f(R) + f(v) \leq n_j$となり、$n_j - d < n_j^0 \leq n_j$の場合$n_j - d < f(C_j^0) - f(R) + f(v) \leq n_j$となる$R$とする。このような$R$は$T_{P_{j1}}$の葉の点から順に選ぶことによって構成できる。このときRの点をSの点とし、S_{j1}からSの点vへの辺(u,v)が存在するので$C_j^0 = (C_j^0 - R) \cup (\{v\}, < u,v >)$とする。このことは$S_{j1}$の重みが最大であることに矛盾しているのでこのような場合は存在しない。

Case 1.2：$0 < w_{j1} \leq f(v)$の場合

この場合$C_1^+ = C_1^0 \cup T_{P_{j1}} \cup < x, P_{j1} >$とし、$C_i^+ = C_i^0 (i \neq 1, j)$とする。そして、$S_{j1}$から$S$の点$v$への辺$(u,v)$が存在するので$f(C_j^0) - w_{j1} + f(v) \leq n_j$の場合$C_j^+ = (C_j^0 - V(T_{P_{j1}})) \cup (\{v\}, < u,v >)$とすることによって$(A^+) \sim (C^+)$の条件を満たす$V_1^+, \cdots, V_k^+$が構成される。また、$f(C_j^0) - w_{j1} + f(v) > n_j$の場合$C_j^+ = (C_j^0 - V(T_{P_{j1}}))$とすると$n_j - d < f(C_j^+) \leq n_j$となるので$(A^+) \sim (C^+)$の条件を満たす$V_1^+, \cdots, V_k^+$が構成される。

Case 1.3：$w_{j1} = 0$の場合

この場合$C_1^0 = C_1^0 \cup T_{P_{j1}} \cup < x, y >$とすると$C_1^0$の点数が最大であることに矛盾しているのでこのような場合は存在しない。

Case 2：S_{j1}からSの点へ辺$< u,v >$ $(v \in S)$が存在しない場合

V_1^0と$\bigcup_j S_{j1}$から$[V_2^0 \cup \cdots \cup V_k^0] - \bigcup_j S_{j1}$への辺が存在するような$[V_2^0 \cup \cdots \cup V_k^0] - \bigcup_j S_{j1}$の点の集合を$U$とする。$U \cup S$は少なくとも$V_2^0, \cdots, V_k^0$の各一点($P_{j1}$あるいは$a_j$)と$S$を含み$V_1^0$と$S_{j1}$から$S$の点への辺が存在しないことと、命題3より$V_1^0 \cup \bigcup_j S_{j1}$から$U$の少なくとも$k$個の点への辺が存在する。ここで$U_0 = U - \bigcup_i \{a_i\} - \bigcup_j \{P_{j1}\} \neq \emptyset$の点を考える。(各$P_{j1}$とF点集合の存在しない$C_j^0$の$a_j$は$k-1$個の点の集合を構成することと、$V_1^0 \cup \bigcup_j S_{j1}$から$U$の$k$個の点へ辺が存在することより$|U_0| \geq 1$であるので、$U_0 \neq \emptyset$である。)

このとき$U_0 \cap V_j^0 \neq \emptyset$である$C_j^0$を考える。$U_0 \cap V_j^0$の点$y$に対し、$a_j$と$C_j^0$において$y$を通らないで$a_j$から到達可能な点の集合を考える。この点の集合の重みが最も大きくなる点yを考える。この点yはC_j^0における第二種F点と呼ばれ、P_{j2}と表す。またこの点集合はC_j^0における第二種F点集合と呼ばれS_{j2}と表す。

ここで、まえと同様に条件$(A^0) \sim (C^0)$を満たし、$G[V_1^0]$のみG_1のものと同じで、各$G[V_i^0]$はG_1の$S_{i1} \cup \{P_{i1}\}$を含みかつ、$G[V_1^0], \cdots, G[V_k^0]$から$S$の重み0の点に辺が存在しない$V_1^0, \cdots, V_k^0$から誘導される$G$の任意の部分グラフ$G'$を考える。

C_j^0以外にも幾つかの生成木において第二種F点, 第二種F点集合が定義でき、G'のなかで第一種と第二種を合わせたF点集合の重みの総和が最大となるものを新たにG_1とすれば、もしV_1^0とF点集合の和集合からSに辺が存在したら、前述の証明と同様に場合分けされ、F点集合の和集合の重みが最大であることに矛盾するか、$(A^+) \sim (C^+)$の条件を満たす$V_1^+, \cdots, V_k^+$が存在するか、C_1^0の点数が最大であることに矛盾するかのいずれかにあてはまる。

そして第一種, 第二種F点集合の和集合からSの点への辺が存在しない場合、第三種, 第四種,…のF点,F点集合も同様に定義でき、各段階でのF点集合の和集合の重みの総和は増大する。従っていつかはF点集合からSへの辺が存在するので、$(A^-) \sim (C^-)$の条件を満たす互いに素な点集合$V_1^-, \cdots, V_k^-$が与えられたとき$(A^+) \sim (C^+)$の条件を満たす$V_1^+, \cdots, V_k^+$が存在する。 □

定理 2 重み関数$f : V \to W = \{0, 1, \cdots, d\}$の定義された$k$-連結グラフ$G = (V, E)$は最大誤差$d-1$の重み付き$k$-点分割可能である。

(証明)$V_i \leftarrow \{a_i\} (1 \leq i \leq k), S \leftarrow V - \bigcup_{i=1}^k V_i$として、$f(V_i) \leq n_i - d$となる$i$が存在するあいだは補題3の操作を繰り返し適用することにより$n_i - d < f(V_i) \leq n_i (1 \leq i \leq k)$となる$V_i$が得られる。そして、$S$の点が空でない場合は$i = 1$から順に$S$の点が空になるまで$n_i \leq f(V_i) < n_i + d$となるように補題3の条件を変えた操作を適用することによって最大誤差$d-1$の重み付きk-点分割が得られる。 □

3.2 k–辺連結グラフに対する誤差あり重み付きk–要素分割問題

定理 3 重み関数$f : V \cup E \to W = \{0, 1, \cdots, d\}$の定義された$k$-辺連結グラフ$G = (V, E)$は最大誤差$d-1$の重み付き$k$-要素分割可能である。

(証明) 最大誤差$d-1$の重み付きk-要素分割問題の入力を

(1) k-辺連結グラフ$G = (V, E)$,
(2) 重み関数$f : V \cup E \to \{0, 1, \cdots, d\}$,
(3) $a_i \in V \cup E$ $(1 \leq i \leq k)$,
(4) n_i $(1 \leq i \leq k)$とする。

これらの入力から最大誤差$d-1$の重み付きk-点分割問題の入力を以下のように構成する。

(1') $\varphi_k(G)$,
(2') $f'(\varphi(v_1)) = f(v)$, $f'(\varphi(v_i)) = 0 (i \geq 2)$, $f'(\varphi(e)) = f(e)$,
(3') $a_i' = \varphi(a_i)$ ($a_i \in E$の場合), $a_i' = \varphi(a_{i_1})$ ($a_i \in V$の場合),
(4') $n_i' = n_i$ $(1 \leq i \leq k)$

命題1より$\varphi_k(G)$はk-連結グラフであるので、定理2より(1') ~ (4')の入力に対する最大誤差

$d-1$ の重み付き k-点分割問題の解 $V_1', \cdots, V_k'$ が存在する。このとき点独立な連結部分グラフを $G_1' = (V_1', E_1'), \cdots, G_k' = (V_k', E_k')$ とすると、命題2より $\varphi^{-1}(V_1'), \cdots, \varphi^{-1}(V_k')$ は連結で互いに辺独立である。よって $\varphi^{-1}(V_1'), \cdots, \varphi^{-1}(V_k')$ が最大誤差 $d-1$ の重み付き k-要素分割問題の解の条件を満たす。□

4 点分割可能な重み付き k–要素分割問題

点分割可能な重み付き k–要素分割問題は以下のように定義される。

点分割可能な重み付き k–要素分割問題

入力：
(1) 連結無向グラフ $G = (V, E) : S = V \cup E$,
(2) 重み関数 $f : S \to W (W \subseteq N$: 自然数の集合),
(3) k個の異なる点もしくは辺 $a_1, a_2, \cdots, a_k \in S$,
(4) $\sum_{i=1}^{k} n_i = \sum_{x \in S} f(x)$ である k個の自然数 $n_1, \cdots, n_k$.

出力：以下の条件を満足する Sの分割 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$, と重み関数 $f_i : S \to W, (1 \leq i \leq k)$ (ただし $v \in V$に対して$\sum_{i=1}^{k} f_i(v) = f(v)$),
(a) $a_i \in S_i$,
(b) 各 S_iから誘導されるグラフの重みの合計 $\sum_{x \in V(G[S_i]) \cup S_i} f_i(x) = n_i$,
(c) 各 S_iは G の連結部分グラフを誘導する.

定理 4 重み関数 $f : E \to \{0, 1\}, f : V \to W (W \subseteq N$: 自然数の集合) の定義された k-辺連結グラフ $G = (V, E)$ は点分割可能な重み付き k-要素分割可能である。

(証明) 与えられた k-辺連結グラフ $G = (V, E)$ の点 $v \in V$について次のような変換を考える。

・$deg(v) > f(v)$ の場合

vの代わりに $d = deg(v)$ 個の新たな点 $v_1, \cdots, v_d$を考える。vに隣接する d 個の点を $u_1, \cdots, u_d$とし、辺 $e_i = (u_i, v)$ の代わりに、辺 $e_i' = (u_i, v_i)$ $(1 \leq i \leq d)$ を考える。また、点 $v_1, \cdots, v_d$が完全グラフになるように辺集合 E_dを付け加える。そして、$f(v) = 0$ の場合 $f(v_i) = 0$ $(1 \leq i \leq d)$ とし、$0 < f(v) < d$ の場合 $f(v_i) = 1$ $(1 \leq i \leq f(v))$, $f(v_i) = 0$ $(f(v) < i \leq d)$ とする。また、$f(e_i') = f(e_i)$, $e \in E_d$ に対して $f(e) = 0$ とする。

・$deg(v) \geq f(v)$ の場合

vの代わりに $g = f(v)$ 個の新たな点 $v_1, \cdots, v_g$を考える。vに隣接する d 個の点を $u_1, \cdots, u_d$とし、辺 $e_i = (u_i, v)$ の代わりに、辺 $e_i' = (u_i, v_i)$ $(1 \leq i \leq d)$ を考える。また、点 $v_1, \cdots, v_g$が完全グラフになるように辺集合 E_gを付け加える。そして、$f(v_i) = 1$ $(1 \leq i \leq g)$ とする。また、$f(e_i') = f(e_i)$, $e \in E_d$ に対して $f(e) = 0$ とする。

全ての点に対してこの操作を行なって得られるグラフを$\phi(G)$ とすると、G が k-辺連結ならば$\phi(G)$ は k-連結になることがわかる。よって、重み関数 $f : V \cup E \to \{0, 1\}$ の定義された k-連結グラフ$\phi(G)$ が得られるので、$\phi(G)$ に対する k-要素分割問題の解 $G_1, \cdots, G_k$を求め、それを利用して元の問題に対する解$\phi^{-1}(G_1), \cdots, \phi^{-1}(G_k)$ を得ることができる。□

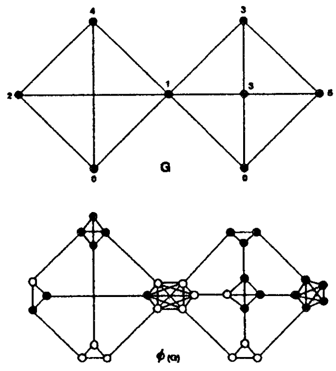

図 3: 入力グラフ G の変換$\phi(G)$

参考文献

[1] E.Györi: "on Division of Graphs to Connected Subgraphs," in: Combinatorics(Proc. 5th Hungarian Combinational Coll., 1976, Keszthely) North-Holland, Amsterdam,485-494(1978)

[2] Z.Galil and G.F.Italiano: "Reducing Edge Connectivity to Vertex Connectivity," SIGACT NEWS,22,1,57-61,(1991)

[3] K.Wada,A.Takaki and K.Kawaguchi: "Efficient algorithms for a Mixed k- partition Problem of Graphs wihthout Specifying Bases," 20th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science,(1994), also in Lecture Notes in Computer Science 903, pp. 319–330(1995).

[4] 和田,川口,横山: "拡張されたグラフの k-分割問題について," 第 6 回回路とシステム軽井沢ワークショップ,pp243-248,(1993-04)

[5] 和田,渋谷,川口,杜本: "連結グラフの (L,k)–辺分割線形時間アルゴリズムと k-辺連結グラフに対する高信頼性路線割当," 電子情報通信学会論文誌,D-I,Vol.J75-D-I,No.11,pp993-1004,(1992-11)