数理モデル化と問題解決 11－3
（1997．1．24）

遺伝的アルゴリズムに対するメタヒューリスティクスに基づくパラメータ値設定手法

松田 憲治 八田 浩一 若林 真一 小出 哲士
広島大学工学部
〒 739 東広島市鏡山一丁目 4 番 1 号

複雑な制約を持つ大規模最適化問題の解法の一つとして遺伝的アルゴリズム (*GA*) が知られている．GA は与えられた問題の解空間に対する高い探索能力を持つが，一般に多くのパラメータを持つため，GA の探索能力を最大限に利用するためには問題に応じたパラメータ値の調整が不可欠である．本稿では GA の探索能力に大きな影響を持つ交差方法について，あらかじめ 1 つの交差方法を選択しておくのではなく，GA の実行中に動的に交差方法を変更していくことを提案する．また，交差方法の動的選択を行うために各個体のその世代での潜在的な優劣の度合を示す指標として新たにエリート度を提案する．提案交差方法を組み込んだ GA をいくつかのベンチマーク問題に適用することにより提案手法の有効性を検証する．

A Parameter Tuning Method Based on Meta-Heuristics for Genetic Algorithms

Kenji MATSUDA Koichi HATTA Shin'ichi WAKABAYASHI Tetsushi KOIDE
Faculty of Engineering, Hiroshima University
4-1, Kagamiyama 1 chome, Higashi-Hiroshima 739, Japan

Genetic algorithms (*GA*) are widely used to solve large-scaled optimization problems with complex constraints. GA has a powerful capability of exploring the search space of a given problem. However, since GA generally has many parameters, setting parameters for the problem instance is crucial for its performance. In this paper, we present an adaptive strategy, which selects a crossover operator to be used not in advance but dynamically during the execution. And we propose a new measure for adaptive operator selection, called elite degree. Elite degree shows the potential proficiency of an individual in the particular generation. Experimental results for benchmark test functions show the effectiveness of the proposed method.

1 まえがき

工学における様々な分野において複雑な制約を持つ多くの大規模最適化問題が知られており，それらをできるだけ短い計算時間で解くことが求められている．そのような問題は数理計画法や組合せ最適化アルゴリズムを適用して問題のサイズに関する多項式時間で厳密解を求めることは一般に困難なため，ヒューリスティック手法を用いて解を求めることが普通である．このようなヒューリスティック手法の 1 つとして遺伝的アルゴリズム (*GA*) が知られている [2]．GA は与えられた問題の解空間に対する高い探索能力を持つが，GA は多くのパラメータを持つため，それらのパラメータの値を調整して GA の探索能力を最大限に利用することは一般に難しいことが知られている．

従来の GA のパラメータ調整では，経験と勘によってパラメータ値をある範囲に絞り込んだ後で，実験を繰り返すことにより調整する．しかし，あるデータについてパラメータ調整を行っても，その GA を違う特徴を持ったデータに適用する場合は十分に質の良い解が得られない場合が多く，再びパラメータ値を設定し直す必要がある．しかし，GA の最適なパラメータ値を自動的に設定することができれば GA の利用がより容易になる．

本稿では GA のパラメータを，外部からあらかじめ設定しておく必要のあるものと，GA の内部で自動的に設定されるものに分類し，前者を外部パラメータ，後者を内部パラメータと呼ぶ．外部パラメータの設定については De Jong による標準 GA において実験的に求められた適切なパラメータ値が示されている．また，Grefenstette により外部パラメータを自動的に設定する手法として meta-GA [3, 7] が提案されている．これらについては Schaffer らによって総括的な実験が行われており [6]，文献 [3] によって示されたパラメータ値は良いパラメータ値の部分集合であることが示されている．しかし，これらの方法は良いパラメータ値を求めるための計算量が非常に大きいという問題点がある．一方，内部パラメータは GA の内部で動的に変更することが可能であり，これまでに GA の実行中にパラメータ値の調整を行う手法がいくつか提案されている．[1, 4, 5, 8, 9]．

著者らは，今まで一般に外部パラメータと考えられてきた交差方法，選択方法，交差確率，突然変異確率などのパラメータを内部パラメータとみなし，それらの値を GA の実行中に動的に調整することを目的として研究を進めている．本稿では特に交差方法の選択に注目し，質の良い解を短い計算時間で得ることを目的としてアルゴリズムの実行中に交差方法を動的に変更する手法を提案する．

本稿の構成は次のようになっている．まず，2. では GA のパラメータ調整に関する従来手法についてまとめた後，3. で各個体の各世代における潜在的な優劣の度合を示す新しい指標としてエリート度を提案し，この指標に基づく交差方法の動的な選択手法を提案する．提案手法の実験による評価を 4. で示し，従来手法との比較を行う．そして，最後に 5. で考察と結論を述べる．

2 従来手法

ここでは従来の代表的なパラメータ値設定手法と実験的に良いと示されたパラメータ値について述べる．

2.1 meta-GA を用いた手法

Grefenstette は外部パラメータ値の決定手法として遺伝的アルゴリズムを用いた手法を提案し，提案した手法を meta-GA と名付けた [3]．meta-GA の構成を図 1に示す．

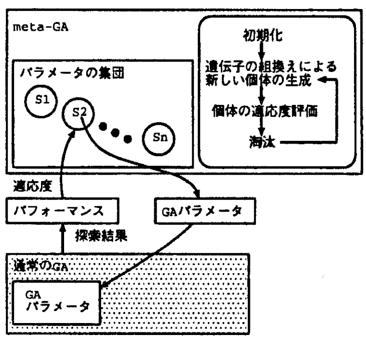


図 1: meta-GA の構成

meta-GA は GA の外部パラメータの値をメタレベルの GA を実行することにより決定する方法である．最初にパラメータ値を調整したい GA (被

験 GA と呼ぶ) のパラメータ集合とそれぞれのパラメータ値の許容範囲が指定され，その範囲内でランダムにパラメータ値の組が生成され，初期集団が形成される．ここで 1 つの個体が被験 GA の実行に必要なパラメータ値の組である．そして，メタレベルの個体の交差により新しい個体を生成する．メタレベルの個体の評価は，個体であるパラメータ値集合を被験 GA のパラメータ値として設定し，被験 GA の実行によって得られた最良解の適応度を用いて行う．また，淘汰操作により適応度の高い個体のみが残される．この操作を繰り返し行うことにより，最終的に良いパラメータ値の組が得られる．

meta-GA の問題点としては，1 つのメタレベルの個体を評価するためには被験 GA により問題を 1 回解く必要があり，meta-GA が対象とする解空間を十分に調べるためには，メタレベル の個体を数多く用意しなければならないので計算時間が非常に大きくなるということがある．また，パラメータ調整された GA をパラメータ調整のために用いた問題例以外に適用した場合，必ずしも最良のパラメータ値となっていないという問題点もある．

2.2 アダプティブな手法

アダプティブな手法は，GA を用いて問題を解いている途中で内部パラメータの値を動的に調整するものであり，計算時間は元の GA を 1 回実行するのとほとんど変わらない．しかし，特別な工夫がない限り内部パラメータの初期値はあらかじめ与えられていなければならない．文献 [1, 5] で示されているアダプティブな手法では交差確率や突然変異確率などの簡単なパラメータ値のみを調整しており，人口数，交差の種類，選択方法，世代間ギャップ，スケーリングウインドウ，個体評価回数などについては固定されている．

文献 [8] で提案されている GA では，2 種類の交差を用いており，適用される交差の選択を各個体に対してアダプティブに行っている．そして, 各個体の文字列の最後にその個体がどの交差によって生成されたかを示す ビット を付加しておき，新しく交差を行うために 2 つの親を選択したときに両方の親が同じ種類の交差によって生成されていたら，その交差を用い，そうでなければどちらかをランダムに選択するといった操作を行っている．

2.3 実験的に求めた外部パラメータ

一般に GA において用いられるパラメータの値は De Jong [3] により実験的に求められたものが使用され，これらのパラメータ値を持つ GA は標準 GA と呼ばれている．

標準 GA は，GA_s = (人口数 (N)，交差確率 (C)，突然変異確率 (M)，世代間ギャップ (G)，スケーリングウインドウ (W)，選択方法 (S)) = (50, 0.6, 0.001, 1.0, 7，エリート戦略) である．しかし，この設定値はいくつかの基本的な問題に対して実験を行い，その結果として得られたパラメータ値なので常に有効であるという保証はない．また，最近良く用いられる通常のヒューリスティック手法と GA を組合せたハイブリッド型 GA に対しては有効かどうかは検証されていない．

2.4 GA を評価する尺度

パラメータ値の設定だけが異なる複数の GA があるとする．このとき，最終的に得られる解が最適解に近く，かつ GA の実行時間が短いものをパラメータ値が最良に設定された GA とみなすことにする．

目的関数 (適応度) と計算時間の関係を調べるために適している尺度としてオンライン・パフォーマンスとオフライン・パフォーマンスがある [3]．これらは，あるパラメータ値の設定 S が与えられたときにその S により特定される GA の良さを表す尺度であり，

$$On-line_S(T) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} f_E(i)$$

$$Off-line_S(T) = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} f_E^*(i)$$

で与えられる．ここで，$f(i)$ は第 i 回目に評価された個体の適応度である．また $f_E^*(i)$ は第 i 回目の個体評価までに見つかった最良個体の適応度である．これらの尺度を用いれば最終的な解を比べるだけではなく，アルゴリズム実行の途中経過を考慮してそれぞれの GA の性能を評価することができる．

3 提案手法

これまでに報告された内部パラメータ値のアダプティブな変更は，人口全体に対するパラメータ値の変更が主であり，個々の個体についてパラメータ値の調整を考えた手法はほとんどない．そこで，計算時間の短縮と最終解の質の向上を目的として，GA を実行している途中の各個体の状態を考慮して各個体ごとに内部パラメータの値を調整することを考える．以下では交差手法 [4] をその時の個体の状態に合わせて変更する手法を考察する．

3.1 各個体の状態を表す尺度

GA の実行中に各個体の状態を調べる方法として，その個体が良いスキーマをどれくらい多く持っているかということを調べることを考える．個々のスキーマを直接調べることは難しいが，積木仮説と呼ばれる仮説が知られている [2].

【積木仮説】：GA における最適解に近い良い解は (1) 定義長が短く，(2) 評価値の高いスキーマが組み合わされて生成される．

積木仮説が成り立つと仮定する．各個体に含まれるスキーマは交差と突然変異で新たに生成されたものと，親から引き継いだものに分けることができるので，後者に注目すれば積木仮説の拡張として次の仮説が成り立つものと考えられる．

【エリート仮説】：適応度の高い先祖を近い世代に多く持つ個体は，高い適応度を示す．

すなわち，交差などの遺伝的操作において評価値の高いスキーマが破壊されなければ，適応度の高い先祖から生成される子孫は高い適応度を持つ可能性が高いと考えられる．

エリート仮説に基づき，各個体がどれくらい良いスキーマを持っているかを予測する尺度としてエリート度 ($Elite\_degree$) を定義する．現在の世代数を Tとしたとき世代 Tの個体集団のレベルを $level = 0$ とする．$T - 1$ 世代を $level = 1$，一般に $T - i$ 世代を $level = i$ とする．そして，現在の集団の中の個体を $x_i^{level}(0 \leq i \leq Popsize - 1$, $Popsize$ は人口数) とし，そのレベルの集団の中で最良の個体を x_{best}^{level} とする．また，$level\_max$ を現在の集団の中のある個体 x_i^0から先祖へたどるレベルの最大範囲とする．そのとき，個体 x_i^0のレベル k の先祖の集合を $Anc(k,i)$ とすると，個体 x_i^0 のレベル $level\_max$ までの全ての先祖は

$$\bigcup_{k=1}^{level\_max} Anc(k,i)$$

で表せる．また，ある個体がエリートかどうかを判定する際には，最大化問題においてはそのレベルの中の個体の適応度の分布を正規分布と仮定して，適応度の平均値を μ，適応度の標準偏差を σ としたときに $\mu + \alpha * \sigma$ 以上の適応度を持つ個体をエリートとみなすこととする．ただし，α は $0 \leq \alpha$ を満たす実数である．ある個体の先祖でエリートの個体の数を $elite\_num$ とする．このとき，最大化問題に対してはエリート度は以下の式で表わすことができる．

$$Elite(k) = \{x_i^k | \forall x_i^k \in Anc(k,i),\ \mu+\alpha*\sigma \leq f(x_i^k)\}$$

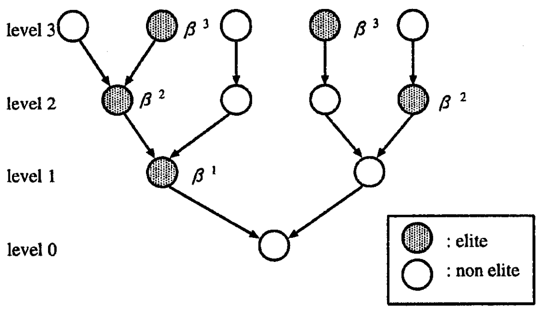
$$Elite\ degree(i) = \frac{\sum_{k=1}^{level\_max} \left\{ |Elite(k)| \times \beta^k \right\}}{\sum_{k=1}^{level\_max} \left\{ |Anc(k,i)| \times \beta^k \right\}}$$

ここで，$Elite(k)$ はレベル k のエリート個体の集合，$f(x_i^k)$ はレベル kの i 番目の個体の適応度，α はエリート決定係数，β $(0 \leq \beta \leq 1)$ はエリート影響度係数とする．α を大きくするとエリートとみなされる個体数が少なくなり，逆に α を小さくすると多くなる．また，β を変化させて遠い祖先の影響を減少させることができる．最小化問題に対するエリート度の定義も同様に行うことができる．

エリート度を求める例を図 2に示す．

3.2 交差方法のアダプティブな選択

本手法では，交差を行う際に選ばれた 2 つの親のエリート度の和の大きさに応じて交差の種類をアダプティブに変えていく．簡単のため，用いる交差の種類は 2 点交差と一様交差の 2 種類とする．ここで，2 点交差は一様交差よりも，スキーマを破壊する性質が弱く，良いスキーマを子に継続しやすいという性質を持っている．このため，2 つの親のエリート度の和を計算した値が大きい場合は 2 点交差を適用して良いスキーマを保存し，小さい場合



$$\text{Elite\_degree} = \frac{1*\beta^1+2*\beta^2+2*\beta^3}{2*\beta^1+4*\beta^2+5*\beta^3}$$

図 2: エリート度の計算例

は一様交差を適用して探索範囲を広げる．以下に交差手法のアダプティブな選択の詳細を示す．

【交差方法のアダプティブな選択】

step 1: 交差を行う 2 つの親について先に述べたエリート度を求める式でエリート度を計算し和をとる．

step 2: 2 つの親がエリートかどうか判定し，もしエリートならばそれぞれエリート度の和に 1 を加える．

step 3: エリート度の和が一定の閾値 ($Dval$) 以上ならば 2 点交差を実行し，そうでなければ一様交差を実行する．

4 実験

4.1 実験方法

3. で提案した交差方法のアダプティブな選択手法を組み込んだ GA の実験的評価を行った．実験においては基本となるアルゴリズムとして Grefenstette の作成した GENESIS [3] を使用し，3. で提案した交差方法を組み込んだ． GENESIS の外部パラメータ値は人口数を 50，交差確率を 0.6，突然変異確率を 0.001，世代間ギャップを 1.0，スケーリングウインドウを 5，選択方法をエリート保存選択，コーディングをグレイコーディング，最大個体評価回数 10000 として実験を行った．以後全ての実験はこのパラメータを用いて行った．テストデータとしては付録に示す 5 つの関数最小化問題 [3] を用いた．実験においてはそれぞれのデータとパラメータ値の設定に対して 10 回ずつ GA を実行し，平均を求めた．どの関数についても類似したオンラインパフォーマンスとオフラインパフォーマンスの曲線が得られたので f1 関数についてのみ結果を示す．

4.2 個体の適応度に関する分布

3.1 で提案したエリート度のための予備実験として個体の適応度の分布を調べた．図 3に世代ごとの実際の個体の適応度の分布を示す．

実験の対象は最小化問題なので適応度の小さい個体ほど良い個体ということになる．図は GA が初期人口を生成してから 10000 回個体を評価するまでの評価を 20 区分に分けてそれらの中から一定の間隔で区分を選んだものである．図 3(a) は一番最初の区分で図 3(b)，(c)，(d) はそれぞれ 6 番目，11 番目，16 番目の区分である．早い世代では図 (a)

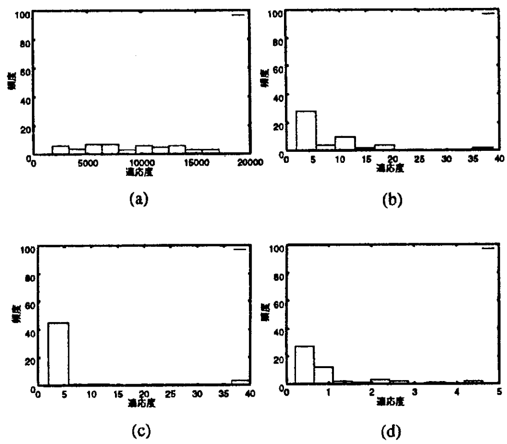


図 3: 個体の適応度の分布 (f1)

のように分布が左右均等な正規分布に近い形になっている．図 (b) になると全体に左にシフトしており，図 (c)，図 (d) においては分布の幅がかなり狭くなっている．

4.3 直前の親との条件付き確率

3.1 で示したエリート仮説が正しいかどうかを調べるためにエリートの親からエリートが生まれるかどうかを示す条件付き確率を求めた．この確率は β を 0.5 ， $level\_max$ を 5 とし α を変更しなが

らGAを実行し，各GAの実行中に実行された交差の結果全てについて計算している．2つの親からエリートの子が生成されるときに，考えられる親の組み合わせは親が2つともエリートであった場合(ee_e)と，片方がエリートでもう一方がエリートでなかった場合(en_e)と，両方ともエリートでなかった場合(nn_e)の3通りが考えられる．図4に α 変化させたときのそれぞれの確率を示す．図4より $\alpha \leq 1$ の範囲で仮説は成り立っていると考えられる．

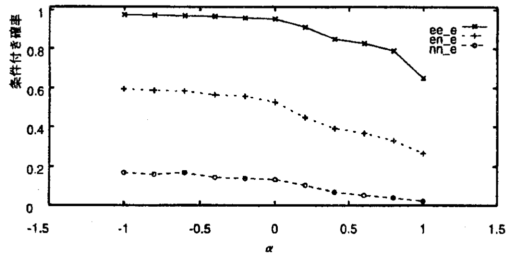


図 4: αを変えたときの条件付き確率の変化 (f1)

4.4 エリート度と適応度の相関

エリート度の高い個体が，本当に良い個体であるかを調べるためにエリート度と適応度の相関係数(r)を求めた．強い相関があればrの値が-1か1に近づき，全く相関がなければ0に近づくと考えられる．$\beta = 0.5,\ 1.0,\ level\_max = 5$ として，α を変化させたときの相関係数の変化を図5に示す．図4，図5よりエリート仮説は成り立つと考えられる．

4.5 エリート度と適応度の相関の世代に関する変化

エリート度と個体の適応度の相関の世代による変化をグラフにしたものが図6である．ここで $\beta = 0.5$ である．相関係数の変化は世代とほとんど関係がな

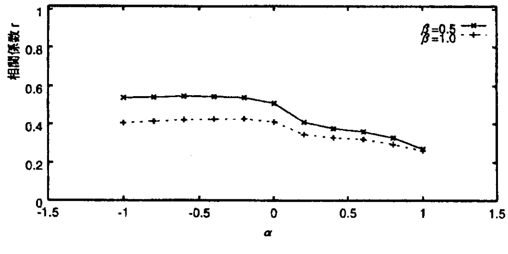


図 5: αを変えたときの相関係数の変化 (f1)

いと思われる．

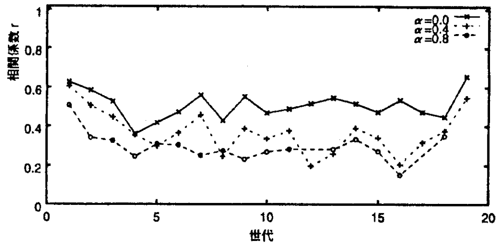


図 6: 相関係数の世代による変化 (f1);$\beta = 0.5$

4.6 しきい値による影響

2種類の交差を組み合わせてアダプティブな調整を行った場合(提案手法)と，それぞれの交差を単体で用いた場合の比較を行った(図7,8)．ここで，図の中のDvalとは3.2で述べた閾値である．Dval = 0.0，Dval = 5.0の場合はそれぞれ2点交差と一様交差のみをGAの実行中に用いた結果である．図7において，50世代まででは Dval = 2.0 として交差方法のアダプティブな選択を行った場合が最も良いオフラインパフォーマンスを示している．

4.7 従来手法との比較

従来手法[4]と最終的に得られた解とその解が得られた世代について比較を行った．表1に最終的に得られた解とその解が得られた世代を示す．

表 1: 最終的な解 ($\times 10^{-5}$) と解が見つかった世代 (テスト関数 f1)

$\alpha = 0.0, \beta = 0.5$				
Dval	*1*	*2*	*3*	*4*
Last Sol.	7.515	7.515	7.515	7.515
Gen	387	336	260	289
$\alpha = 0.2, \beta = 0.5$				
Dval	*1*	*2*	*3*	*4*
Last Sol.	7.515	7.515	7.515	7.515
Gen	137	216	230	218
$\alpha = 0.4, \beta = 0.5$				
Dval	*1*	*2*	*3*	*4*
Last Sol.	7.515	7.515	7.515	7.515
Gen	197	205	242	288
	2-Point	*Uniform*	*Rand*	*#2[4]*
Last Sol.	7.515	7.515	7.515	7.515
Gen	348	185	303	184

表の中でDvalが1から4まであるのは提案手法でしきい値を変化させたときの結果である．また，*2-Point*, *Uniform* はそれぞれ2点交差と一様交差

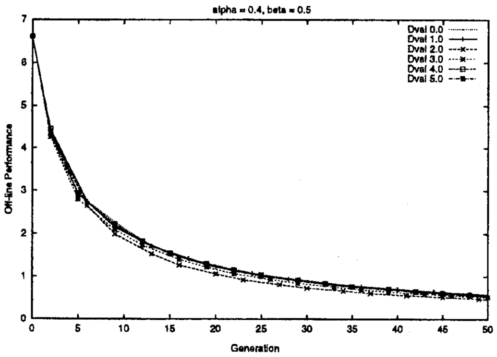


図 7: オフラインパフォーマンスの比較 (f1) $\alpha = 0.4, \beta = 0.5$

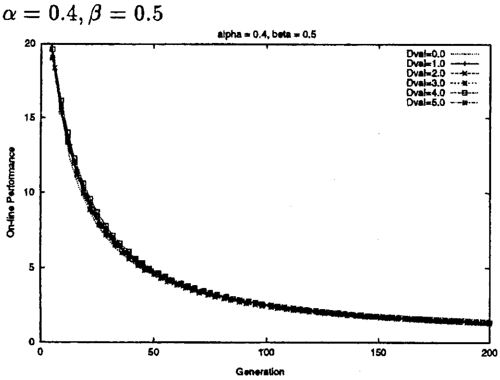


図 8: オンラインパフォーマンスの比較 (f1) $\alpha = 0.4, \beta = 0.5$

を単独で用いたときの結果である．*Rand*は交差の選択をそれぞれの交差が適用される確率を 1/2 としてランダムに行ったときの結果である．#2とあるのは文献 [4] の従来手法であり，交差のために選ばれた 2 つの親が一様交差により生成されていれば 2 点交差を実行し，2 つの親が 2 点交差により生成されていれば一様交差を実行し，それ以外の場合は先に述べたランダムな選択を行うというものである．関数 f1 に関しては，どの交差を用いても最終的に得られる解は変わらないが収束の速さはかなり違いがあるといえる．表1の中で最も収束が早かったのは提案手法において$\alpha = 0.2$,$\beta = 0.5$, $Dval = 1$ としたときで，従来手法が 184 世代で解を見つけているのに対し，提案手法は 137 世代で同じ解を見つけている．他のテスト関数に関しても提案手法の方が早く良質の解を見つけている．提案手法において，良い結果を示したα と $Dval$ の値を表2に示す．表より，あまり α の値を大きくすると良い結果が得られないことが分かる．α の範囲としては 0.0 から 0.2 が適当であろうと予想される．

表 2: 提案手法において良い結果を示したパラメータ

関数	*f1*	*f2*	*f3*	*f4*	*f5*
α	0.2	0.0	0.2	0.0	0.0
$Dval$	1	4	2	1	2

4.8 2 つの交差の適用される割合

アダプティブな交差の選択において適応される交差の回数がどのように変化するかを調べた．提案手法，ランダムに交差を選択した場合，及び文献 [4] の従来手法を適用した場合において，各世代における一様交差が適用された回数を図 9〜図 11 に示す．

各世代における交差の数は 15 であるので図の中で 15 から一様交差の適用された数を引いた値が 2 点交差の適用された回数である．従来手法とランダムな手法とは似たような推移をしているが提案手法では異なる推移をしている．

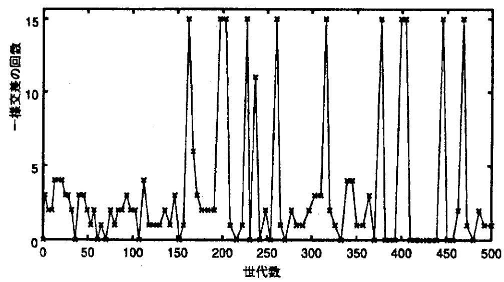


図 9: 提案手法の場合 (f1)

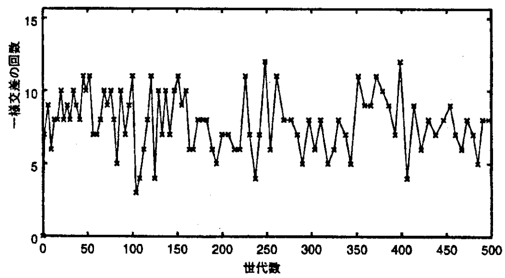


図 10: ランダムに交差を選択した場合 (f1)

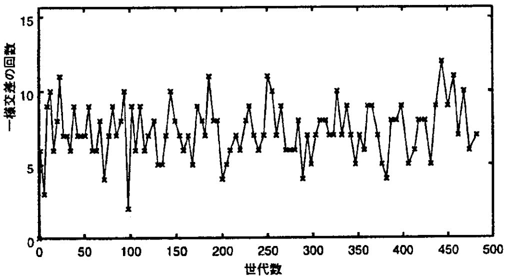


図 11: 従来手法の場合 (f1)

5 あとがき

本稿では，各個体のある世代における潜在的な優劣の度合を示す新しい指標としてエリート度を提案し，これを用いてアルゴリズムの実行中に交差をアダプティブに選択する手法を示した．今後の課題として，(1) 他の内部パラメータも含めたパラメータ調整手法の提案，(2) 提案手法の大規模組合せ最適化問題への適用，などが挙げられる．

参考文献

[1] L. Davis: "Adapting operator probabilities in genetic algorithms," Proc. of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms, pp. 61–69 (1989).

[2] D. E. Goldberg: "Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning," Addison-Wesley Publishing Company (1989).

[3] J. J. Grefenstette: "Optimization of control parameters for genetic algorithms," IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol.SMC-16, No.1, pp. 122–128 (1986).

[4] I. Hong, A. B. Kahng and B. R. Moon: "Exploiting synergies of multiple crossovers: Initial studies," Proc. International Conference on Evolutionary Computation, pp. 245–250 (1995).

[5] B. A. Julstrom: "What have you done for me lately? adapting operator probabilities in a steady-state genetic algorithm," Proc. of the 6th International Conference on Genetic Algorithms, pp. 81–87 (1995).

[6] J. D. Schaffer, R. A. Caruana, L. J. Eshelman and R. Das: "A study of control parameters affecting online performance of genetic algorithms for function optimization," Proc. of the 3rd International Conference on Genetic Algorithms, pp. 51–60 (1989).

[7] K. Shahookar and P. Mazumder: "A genetic approach to standard cell placement using meta-genetic parameter optimization," IEEE Trans. on Computer-Aided Design, Vol. 9, No. 5, pp. 500–511 (1990).

[8] W. M. Spears: "Adapting crossover in evolutionary algorithms," Proc. of the 4th Evolutionary Programming Conference, pp. 367–384 (1995).

[9] M. Srinivas and L. M. Patnaik: "Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms," IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, Vol.24, No.4, pp. 656–667 (1994).

A テスト関数

1. **Sphere model**
   $f_1(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$
   $-5.12 \le x_i \le 5.12$
   $\min(f_1) = f_1(0, \ldots, 0) = 0$

2. **Generalized Rosenbrock's function**
   $f_2(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n-1}(100 \cdot (x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2)$
   $-5.12 \le x_i \le 5.12$
   $\min(f_2) = f_2(1, \ldots, 1) = 0$

3. **Step function**
   $f_3(\vec{x}) = 6 \cdot n + \sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor$
   $-5.12 \le x_i \le 5.12$
   $\min(f_3) = f_3([-5.12, -5), \ldots, [-5.12, -5)) = 0$

4. **Quartic function with noise**
   $f_4(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} i x_i^4 + \mathrm{gauss}(0, 1)$
   $-1.28 \le x_i \le 1.28$
   $\min(f_4) = f_4(0, \ldots, 0) = 0$

5. **Shekel's foxholes**
   $\frac{1}{f_5(\vec{x})} = \frac{1}{K} + \sum_{j=1}^{25} \frac{1}{c_j + \sum_{i=1}^{2}(x_i - a_{ij})^6}$
   $(a_{ij}) =$
   $\begin{pmatrix} -32 & -16 & 0 & 16 & 32 & -32 & \cdots & 0 & 16 & 32 \\ -32 & -32 & -32 & -32 & -32 & -16 & \cdots & 32 & 32 & 32 \end{pmatrix}$
   $K = 500 \quad ; \quad f_5(a_{1j}, a_{2j}) \approx c_j = j$
   $-65.536 \le x_i \le 65.536$
   $\min(f_5) = f_5(-32, -32) \approx 1$