辺彩色グラフにおける交互性について

猿渡 康文
筑波大学大学院経営システム科学

本稿では，辺彩色グラフ (edge-colored graphs) と呼ぶ，あらかじめ各辺に彩色がなされたグラフの特徴付けについて議論する．“一般のグラフ”の特徴付けにおいては，ハミルトン閉路といったグラフのもつ構造を鍵として利用している．“辺彩色グラフ”においては，“一般のグラフ”におけるグラフのもつ構造と共に，交互性 (alternaty) と呼ぶ構造を導入した特徴付けがなされている．本稿では，辺彩色グラフにおける交互性を導入したグラフの特徴付けに関する既往の研究を紹介し，さらに，ある特定の点を端点としてもつハミルトン路をもつ辺彩色グラフの特徴付けを示す．

Alternaty in Edge-Colored Graphs

Yasufumi Saruwatari
Graduate School of Systems Management,
The University of Tsukuba, Tokyo

An *edge-colored graph* is a graph, each of whose edge is colored by some color in advance. This paper treats a characterization of edge-colored graphs. To do so, a structure, so-called *alternaty*, is introduced. This structure is concerning to colors on edges, and plays an important role in characterizations as well as a graphical structure (e.g. Hamiltonian cycle, etc.). We first summarize some previous works concerning to characterizations of edge-colored graphs, and show a characterization of edge-colored graphs based on a new graphical structure.

1　はじめに

あらかじめ各辺に色が付けられたグラフを辺**彩色グラフ** (edge-colored graph) という．本稿では，辺彩色グラフに対する**グラフの特徴付け**について議論する．一般のグラフでは，例えば，ハミルトン閉路という構造を鍵に，“与えられた**構造を満たすグラフの性質**”を導くことが，グラフの特徴付けの一つとして議論されている．一方，辺彩色グラフでは，各辺にあらかじめ付加された色が与えられた辺彩色グラフを特徴付けるものの一つであり，各辺の色に関する**交互性** (alternaty) と呼ぶ構造を利用した辺彩色グラフの特徴付けが議論されている．交互性とは，端的には，**隣接する辺の色がお互いに異なる**という構造を意味する．しかし，この交互性は，一般のグラフにおけるハミルトン閉路といったグラフの構造を前提としたものである．本稿でいう辺彩色グラフの特徴付けとは，グラフの構造を前提とし，さらに，交互性の構造を加味した構造を満足するグラフの性質を導出することである．例えば，ハミルトン閉路 (グラフの構造) を前提とし，ハミルトン閉路に含まれる隣接する辺の色が互いに異なる (交互性) ものが存在するような辺彩色グラフが満たすべき条件とはどのようなものであるかを議論することが辺彩色グラフの特徴付けである．

本稿では，辺彩色グラフにおける交互性に関

する既往の研究を紹介する． また，各枝に付加された色が2色からなる辺彩色グラフを対象に，特定の点を端点とするハミルトン路をグラフの構造として取り上げ，辺彩色グラフの交互性による特徴付けを行う．

2 定義

$H = (V, E)$ を単純な無向グラフとする．ただし，V は点集合，E は無向の辺集合である．**辺彩色グラフ** (edge-colored graph) は，無向グラフ H の各辺に対して，あらかじめ彩色が施されたグラフであり，辺彩色グラフをその基礎となる無向グラフと区別して，$G = (H, \mathcal{C})$ で表す．ただし，$\mathcal{C}$ は，色集合である．このとき，任意の辺 (v_i, v_j) の色を $c(v_i, v_j)$ と表記する． 辺彩色グラフ G の色集合 $\mathcal{C}$ が k 色からなるとき，辺彩色グラフ G を，**k-彩色グラフ** (k-edge-colored graph) と呼ぶ．また，辺彩色グラフの基礎となる無向グラフが完全グラフであるとき，即ち，辺集合 E が，$E = V \times V$ を満たすとき，そのグラフ G を**辺彩色完全グラフ** (edge-colored complete graph) と呼ぶ．

辺彩色グラフ G が与えられているとする．点 v $(\in V)$ に接続する色 c_i $(\in \mathcal{C})$ の辺の数を $\delta^{c_i}(v)$ と表現する． また，点の部分集合 X $(\subset V)$ に含まれる点に接続する色 c_i の辺数の合計を $\delta^{c_i}(X)$ と表す．すなわち，$\delta^{c_i}(X) = \sum_{v \in X} \delta^{c_i}(v)$ である．

任意の色 c_i $(\in \mathcal{C})$ に対して，色 c_i をもつ辺からなるグラフ H の部分グラフを H_{c_i} で表し，H_{c_i} を H の **c_i 部分グラフ**と呼ぶ．ただし，H_{c_i} の点集合は，V とする．任意の c_i 部分グラフに対して，**マッチング**とは端点を共有しない辺の部分集合のことであり，マッチングに含まれる辺の数を，そのマッチングの**サイズ**という．また，点 v_i を端点にもつ辺が，マッチングに含まれていないとき，そのマッチングは，点 v_i を含まないという．さらに，マッチングに属する辺の端点集合が V ならば，このマッチングを**完全マッチング**と呼ぶ．

辺彩色グラフ G に対して，任意の路を P : $v_1, v_2, \cdots, v_\ell$ で表す．このとき，路 P が3点以上からなり，かつ，任意の隣接する辺の色が G において異なるとき，この路 P を G の**交互路** (alternating path) と呼び，点 v_1, v_ℓ を交互路 P の**端点**という．また，与えられたグラフの全ての点をちょうど一度ずつ含む交互路を**交互ハミルトン路** (alternating Hamiltonian path) と呼ぶ．さらに，交互路が，与えられたグラフの全ての辺をちょうど一度ずつ含むとき，この交互路を**交互オイラー路** (alternating Euler path) と呼ぶ． また，交互路で端点が同一の点であるものを，**交互閉路** (alternating cycle) と呼ぶ．**交互ハミルトン閉路** (alternating Hamiltonian cycle) や**交互オイラー閉路** (alternating Euler cycle) は，交互ハミルトン路や交互オイラー路を拡張したものであり，交互閉路と同じように定義する．

本稿では，交互ハミルトン路や交互ハミルトン閉路など，グラフの構造と交互性からなる構造を同時に扱い，辺彩色グラフの構造と呼ぶ．

3 既往の研究

辺彩色グラフにおける交互性に関する研究は，Bollobás and Erdös [5] に始まったといわれている．彼らは辺彩色グラフの構造として交互ハミルトン閉路を取り上げ，色数を特定しない辺彩色完全グラフに交互ハミルトン閉路が存在するための十分条件を導出している．同様の結果は，[7] によっても証明されている． また，Bánkfalvi ら [1] では，色数を2に限定した辺彩色完全グラフに対する交互ハミルトン閉路の特徴付けを行っている．

これらの研究以降，辺彩色グラフの特徴付けに関する研究は，交互路や交互閉路を構造として扱ったものと，それ以外の構造を取り上げたものに大別される．また，前者の研究では，交互路は，交互閉路の特殊な場合という位置づけがなされている．

交互路や交互閉路を構造として捉えた研究には，[2, 3, 4, 8, 10, 12, 13] などがある． 交互ハミルトン閉路を構造としてもつ，色数を特に

指定しない一般の辺彩色グラフや辺彩色完全グラフの特徴付けは既に知られているため，これらの研究の中の，交互ハミルトン閉路や交互ハミルトン路を取り上げた研究では，例えば，色数を2といった数に固定した場合や，いくつかの付加的な条件を構造に加えたものが主となっている．また，辺彩色グラフの基礎となるグラフを，トーナメントグラフといった特殊なグラフとした研究などもある．例えば，Benkouar et al. [4] では，k が2以上の k- 辺彩色完全グラフを対象とし，与えられた p 個の点を必ず含む交互閉路を構造としてもつグラフの特徴付けを行っている．この研究では，この構造を満たす閉路を求める問題が $p = 2$ かつ $k = 2$ の場合でさえも，NP- 困難であることを示している．また，$p = 1$(k は一般) の場合や，$p = 2$ かつ $k = 2$ の場合を対象とした研究も行っており，この場合は，多項式で表現できる特徴付けを示している．

また，Manoussakis [12] は，与えられた2点を結ぶ2つの点疎 (あるいは辺疎) な交互路の集合を構造として取り上げ，その構造をもつ辺彩色完全グラフの特徴付けを行っている．また，与えられた2点間の点疎 (あるいは辺疎) な交互道の数を求める解法を提案している．さらに，交互路の端点に接続する辺の色を特定した場合や，複数の点を端点とする交互路を構造として取り入れた場合の解析を行っている．

[3] は，交互オイラー閉路を構造として取り上げた最初の研究である．この論文では，任意の辺彩色グラフが交互オイラー閉路をもつための必要十分条件を多項式で計算可能な形で表現しており，その性質を利用した解法を実現している．このため，一般の交互オイラー閉路を用いた辺彩色グラフの特徴付けは終了しているといえる．

交互路や交互閉路以外の構造を取り扱った研究には，[9, 11] などがある．これらでは，グラフ理論で取り扱われる “ファクター”[6] などをグラフの構造として取り上げている．

4 与えられた1点を端点とする交互ハミルトン路による辺彩色グラフの特徴付け

本節では，ある与えられた点 s を端点とする交互ハミルトン路を構造としてもつ辺彩色グラフの特徴付けについて議論する．ここで扱う構造は，[3] などで議論されている 2- 辺彩色完全グラフにおける，いわゆる交互ハミルトン路の構造に，s を端点とするという条件を付加したものであり，一般グラフの最大マッチングを求める問題などに応用できる可能性をもっている．

本稿では，n 点からなる 2- 辺彩色完全グラフを対象とする．また，説明の単純化のために，色集合を $\{red, blue\}$ とし，さらに，それぞれの色からなる c_i 部分グラフを，H_r, H_b で表す．

4.1 交互ハミルトン路の特徴付け

2- 辺彩色グラフに交互路が存在するならば，その交互路 $P : v_1, v_2, \cdots, v_\ell$ は，本節の仮定より，$c(v_i, v_{i+1}) = red$ ならば，$c(v_{i-1}, v_i) = c(v_{i+1}, v_{i+2}) = blue$ のように red の色をもつ辺と $blue$ の色をもつ辺が交互に存在する路でなければならない．このような交互路を色によって分解すると，それぞれの色に対する辺の集合は，H_r, H_b においてマッチングを構成しているのは明らかである．また，2- 辺彩色グラフにおいて，交互ハミルトン路が存在するならば，その路を色によって分解すると，それぞれの色に対する辺の集合は，H_r, H_b において一方は完全マッチング，他方は，$(n/2) - 1$ のサイズをもつマッチングとなる．このように，マッチング理論と，交互路を構造としてもつ辺彩色グラフの間には密接な関係があることが知られている．

以下の定理は，2- 辺彩色グラフの交互ハミルトン路による特徴付けであり，[3] や [10] において証明がなされている．

定理 4.1 以下の (α), (β), (γ) のいずれかの条件を満たすとき，また，そのときに限り，2- 辺彩色完全グラフ G には交互ハミルトン路が存在する．

(α) n が偶数のとき，H_r，H_b は完全マッチングをそれぞれもつ．
(β) n が偶数のとき，H_r，H_b のどちらか一方は完全マッチングをもち，もう一方は $(n/2)-1$ のサイズの最大マッチングをもつ．
(γ) n が奇数のとき，H_r，H_b はともに $(n-1)/2$ のサイズの最大マッチングをもつ．　□

この定理より，2-辺彩色グラフにおいては，その c_i 部分グラフが共に，$(n/2)-1$ 以下のマッチングしかもたない場合，交互ハミルトン路が存在しないことが分かる．

4.2　n が偶数の場合の主要な結果

ここでは，辺彩色完全グラフの点数 n が偶数の場合について取り扱う．

本稿で扱う構造を満たす交互ハミルトン路の集合は，一般の交互ハミルトン路の集合の部分集合となっている．よって，一般の交互ハミルトン路に対する定理4.1を応用することにより，以下の補題を導くことができる．

補題 4.2 H_r, H_b が共に完全マッチングをもつならば，G には，s を端点としてもつ交互ハミルトン路が存在する．　□

次に，H_r, H_b のいずれかが完全マッチングをもたない場合を取り扱う．この場合，以下の補題が成り立つ．

補題 4.3 H_r は完全マッチングをもち，H_b は $(n/2)-1$ のサイズの最大マッチングをもつと仮定する．このとき，H_b のいずれの最大マッチングにも必ず s が含まれるならば，G には，s を端点とする交互ハミルトン路が存在しない．

証明　s を始点とする交互ハミルトン路が存在すると仮定すると，H_b には s を含まない最大マッチングが存在しなければならない．よって，H_b のどのような最大マッチングにも必ず s が含まれるならば，s を始点とする交互ハミルトン路は存在しない．　□

補題 4.4 H_r は完全マッチングをもち，H_b は $(n/2)-1$ のサイズの s を含まない最大マッチングをもつと仮定する．また，$x_1=s$，$r(x_2)\le\cdots\le r(x_n)$ とする．$n\ge 6$ のとき，任意の k $(1\le k\le (n/2)-2)$ に対して，$\{\delta^r(x_1)+\delta^r(x_2)+\cdots+\delta^r(x_k)\}+\{\delta^b(x_n)+\delta^b(x_{n-1})+\cdots+\delta^b(x_{n-k+1})\}>k^2$ を満たすならば，G には，s を端点とする交互ハミルトン路が存在する．　□

補題4.4の条件の部分は，以下と等価である．すなわち，
$X,Y\subset V$, $X\cap Y=\emptyset$ を満たす任意の点集合 X,Y に対して，$n\ge 6$ のとき，全ての $k(1\le k\le(n/2)-2)$ に対して，$\delta^r(X)+\delta^b(Y)>k^2$ を満たす．

証明　紙面の都合上，証明のアイデアのみ説明する．(詳細は，Higuchi and Saruwatari [10] を参照.)

証明は，背理法による．すなわち，G に s を端点としてもつ交互ハミルトン路が存在しないならば，$\delta^r(X)+\delta^b(Y)>k^2$ を満たさない k が存在することを示す．

点 s を含まない H_b の最大マッチングと，H_r の完全マッチングの辺集合は，G において，一つの交互道と(いくつかの)交互閉路を構成する．これらの交互路と交互閉路に対して，結合と呼ぶ操作を行う．この操作は，これらの交互路や交互閉路を構成する辺とこれらに含まれない G の辺を，辺の色を利用して交換する操作である．(結合操作の詳細は，[10] を参照.) ただし，結合の操作によって得られる路や閉路は交互性の構造を保持する．この操作を可能な限り行うと，いくつかの交互閉路は，別の交互閉路と結合され，あるいは，交互路と結合され，より要素数の大きな交互路と複数の交互閉路に再構成される．(全ての交互閉路が交互路に結合できるわけではないことは，[10] に示されている.) ここで，得られた交互路の点集合を一つおきに点集合 X,Y に分割すると，X と任意の交互閉路間の辺や X と X 間の辺の色はすべて *blue* となり，Y と任意の交互閉路間の辺

や Y と Y 間の辺の色はすべて red となる．このとき，$\delta^r(X)+\delta^b(Y)=k^2$ を満たす k が存在する．以上のことより証明できる． □

補題 4.5 H_r は完全マッチングをもち，H_b は $(n/2)-1$ のサイズの s を含まない最大マッチングをもつと仮定する．また，$x_1=s$，$r(x_2)\leq\cdots\leq r(x_n)$ とする．$n\geq 6$ のとき，任意の k $(1\leq k\leq(n/2)-2)$ に対して，$\{\delta^r(x_1)+\delta^r(x_2)+\cdots+\delta^r(x_k)\}+\{\delta^b(x_n)+\delta^b(x_{n-1})+\cdots+\delta^b(x_{n-k+1})\}>k^2$ を満たさない k が存在するならば，G には，s を端点とする交互ハミルトン路が存在しない．

証明 H_b は完全マッチングをもたないことから，G に交互ハミルトン路が存在する場合，交互ハミルトン路の端点 s に接続する辺は red の色をもたなければならない．ここで，$\delta^r(X)+\delta^b(Y)=k^2$ を満たす点集合 X,Y が存在すると仮定する．このとき，s を端点として交互路となるように点をたどると，s に接続している red の色をもつ辺はすべて，Y に含まれる点を端点としてもつ．また，Y に接続している $blue$ の色をもつ辺はすべて，X に含まれる点を端点としてもつ．交互路になるように点をたどると，点集合 X と Y の間を行き来するだけで X,Y 以外の点には到達できないことが分かる．よって，ある k が補題の条件式を満たさないならば s を端点とする交互ハミルトン路が存在しないことになる． □

補題 4.2, 4.3, 4.3, 4.4は，辺の色を入れ換えても成り立つことは明らかである．
また，以下の補題は明らかに成り立つ．

補題 4.6 2- 辺彩色完全グラフ G に点 s を端点とする交互ハミルトン路が存在するならば，H_r，H_b の一方は完全マッチングをもち，もう一方は，$(n/2)-1$ のサイズの最大マッチングをもつ． □

また，$n\geq 6$ の場合，$x_1=s$，$\delta^r(x_2)\leq\cdots\leq\delta^r(x_n)$ とすると，$1\leq k\leq(n/2)-2$ を満たす k に対して，$\{\delta^r(x_1)+\delta^r(x_2)+\cdots+\delta^r(x_k)\}+\{\delta^b(x_n)+\delta^b(x_{n-1})+\cdots+\delta^b(x_{n-k+1})\}>k^2$ を満たす．

定理 4.1より，2- 辺彩色グラフにおいては，その c_i 部分グラフが共に，$(n/2)-1$ 以下のマッチングしかもたない場合，交互ハミルトン路が存在しない．よって，以上の議論から，以下の定理を導くことができる．

定理 4.7 n が偶数である 2- 辺彩色完全グラフ G が与えられている．G が，点 s を始点とする交互ハミルトン路をもつための必要十分条件は，次の $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ のいずれかを満たすことである．
(α) H_r，H_b がそれぞれ完全マッチングをもつ．
(β) H_r は完全マッチングをもつ．また H_b は $(n/2)-1$ のサイズの s を含まない最大マッチングをもつ．さらに，$n\geq 6$ のとき全ての $k(1\leq k\leq(n/2)-2)$ に対して，$\{\delta^r(x_1)+\delta^r(x_2)+\cdots+\delta^r(x_k)\}+\{\delta^b(x_n)+\delta^b(x_{n-1})+\cdots+\delta^b(x_{n-k+1})\}>k^2$ を満たす．ただし，$x_1=s$，$\delta^r(x_2)\leq\cdots\leq\delta^r(x_n)$ である．
(γ) (β) の red と blue を交換した条件． □

さらに，定理 4.7より，以下の定理を導くことができる．

定理 4.8 n が偶数である 2- 辺彩色完全グラフと点 s が与えられているとする．このとき，このグラフが s を端点とする交互ハミルトン路を含むかを判定する多項式時間の解法が存在する． □

4.3 n が奇数の場合の主要な結果

点数 n が偶数の場合と同様の議論をすることにより，以下の定理が成り立つ．(詳細は，[10] を参照.

定理 4.9 n が奇数である 2- 辺彩色完全グラフ G が与えられている．G が，点 s を始点とする交互ハミルトン路をもつための必要十分条件は，H_r, H_b が共に $(n-1)/2$ のサイズの最

大マッチングをもち，かつ，次の $(\alpha)(\beta)(\gamma)(\delta)$ のいずれかを満たすことである．

(α) s に接続する枝は全て同じ色である．

(β) H_r，H_b のいずれにも s を含まない最大マッチングがある．

(γ) H_r に s を含む最大マッチングがあり，H_b に s を含まない最大マッチングがあり，かつ，$n \geq 7$ のとき全ての $k(1 \leq k \leq (n-5)/2)$ に対して，$\{\delta^r(x_1) + \delta^r(x_2) + \cdots + \delta^r(x_k)\} + \{\delta^b(x_n) + \delta^b(x_{n-1}) + \cdots + \delta^b(x_{n-k+1})\} > k(k+1)$ を満たす．ただし，$x_1 = s$，$\delta^r(x_2) \leq \cdots \leq \delta^r(x_n)$ である．

(δ) (γ) の red と blue を交換した条件．□

さらに，定理4.9より，以下の定理を導くことができる．

定理 4.10 n が奇数である 2-辺彩色完全グラフと点 s が与えられているとする．このとき，このグラフが s を端点とする交互ハミルトン路を含むかを判定する多項式時間の解法が存在する．□

5 おわりに

本稿では，一般のグラフを拡張した辺彩色グラフを取り扱い，交互性と呼ぶ構造を利用した，辺彩色グラフの特徴付けについて述べた．また，与えられた点を端点としてもつ交互ハミルトン路を構造としてもつ，2-辺彩色完全グラフの特徴付けを示した．

参考文献

[1] M. Bánkfalvi and Z. Bánkfalvi, "Alternating Circuit in Two-Edge-Coloured Complete Graphs," in *Proceeding Colloq. Tihany 1968*, Academic Press, 1968.

[2] L. Beineke and C. Little, "Cycles in Bipartite Tournaments," *Journal of Combinatorial Theory (B)*, No. 32, pp.140–145, 1982.

[3] A. Benkouar, Y. Manoussakis, V. Paschos and R. Saad, "On the Complexity of some Hamiltonian and Eulerian Problems in Edge-Complete Graphs," Lecture Notes in Computer Sciences (W.L. Hsu and R.C.T. Lee Eds.), Vol.557, pp.190–198, Springer Verlag, 1991.

[4] A. Benkouar, Y. Manoussakis and R. Saad, "Alternating Cycles Through Given Vertices in Edge-Colored Graphs," *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, No.16, pp.199-207, 1994.

[5] B. Bollobas and P. Erdös, "Alternating Hamiltonian Cycles," *Israel Journal of Mathematics*, No.23, pp.126–130, 1976.

[6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, North-Holland, New York, 1997.

[7] C. C. Chen and D. E. Daykin, "Graphs with Hamiltonian Cycles Having Adjacent Lines Different Colors," *Journal of Combinatorial Theory (B)*, No.21, pp.135–139, 1976.

[8] J. Grossman and R. Häggkvist, "Alternating Cycles in Edge-Partitioned Graphs," *Journal of Combinatorial Theory (B)*, No.34, pp.77–81, 1983.

[9] P. Hell, Y. Manoussakis and Zs. Tuza, "Packing Problems in Edge-Colored Graphs," *Discrete Applied Mathematics*, No. 52, pp.295–306, 1994.

[10] K. Higuchi and Y. Saruwatari, "Alternating Hamiltonian Paths with a Fixed End-Vertex in Two Edge-Colored Complete Graphs," To be submitted for publication, (1997).

[11] M. Manoussakis and Y. Manoussakis, "The Number of Bipartite Tournaments with a Unique Given Factor," *Journal of Graph Theory*, Vol.13, No.3, pp.359–368, 1989.

[12] Y. Manoussakis, "Alternating Paths in Edge-Colored Complete Graphs," *Discrete Applied Mathematics*, No.56, pp.297–309, 1995.

[13] C.T. Zhan, "Alternating Euler Paths for Packing and Covers," *Amer. Math. Monthly*, No.80, pp.395–403, 1973.