

結び目理論研究支援ソフトウェアにおける自明な結び目判定アルゴリズム

今藤紀子

奈良女子大学理学研究科情報科学専攻

落合豊行

奈良女子大学理学部情報科学科

結び目が自明であるか否かを判定するアルゴリズムは、3橋結び目などの特別な結び目においてしか知られていない。本講演では、3種類の変形パターンからなるライドマイスター変形、有限個のライドマイスター変形を組み合わせて得られるウェーブ変形、更にこれらとは別のブロック移動、逆ケーブル操作という曖昧な変形を導入した非決定性のアルゴリズムについて紹介する。このアルゴリズムは、我々が開発した「結び目理論研究支援ソフトウェア」において既実現されている。また、結び目を区別するために用いられる多項式不変量は、ミュータントな2つの結び目の区別が不可能であるが、このソフトウェアに移植された3平行化不変量はそれを可能にしている。

An algorithm to recognize whether knots to be trivial in Computer Aided Knot Theory

IMAFUJI NORIKO

Information and computer sciences, Graduate school, Nara Women's University

OCHIAI MITSUYUKI

Information and computer sciences, Faculty of science, Nara Women's University

Only in the special case such as 3-bridge knot, there exists an algorithm to recognize whether knots are trivial or not. We show a non deterministic algorithm with using Reidemeister moves which include 3 kinds of moving patterns, wave moves which can be carried out by combining finite number of Reidemeister moves, and moreover block moves and anticablings. This algorithm has been implemented in our software-A Software to assist researchers in Knot Theory. Generally speaking, polynomial invariants which are used for distinguishing knots cannot distinguish two mutant knots, but a 3-parallel version polynomial invariant which we use in this software enables it.

1 正則射影とライドマイスター変形

結び目は3次元空間の図形であるので、この図形を平面上で取り扱うには平面上に正則射影して得られる2次元図形を用いる。この2次元図形は連結な4正則平面グラフで、交点において上下がつけられているものとして扱う。この図形のことを結び目の正則表示という。

ライドマイスター変形とは、図1に示すような3種類の変形からなる。これらの変形I, II, IIIは、そのどの変形も他の2つの変形の組み合わせからは得られないことが知られている。

2つの結び目 K_1 , K_2 が正則表示で与えられたとき、 K_1 と K_2 が同型である(同じ結び目である)ための必要十分条件は、ライドマイスター変形を有限回適用することにより、 K_1 の正則表示から K_2 の正則表示が得られることである。しかしこれを行う効率の良いアルゴリズムはまだ発見されていない。

パークー(Parko)により同値性が明らかにされた2つの結び目が示すように一方の正則表示から他

方の正則表示に移行するのに、途中のライドマイスター変形で交点の数を増やす操作が必要であることが問題を複雑にしている。

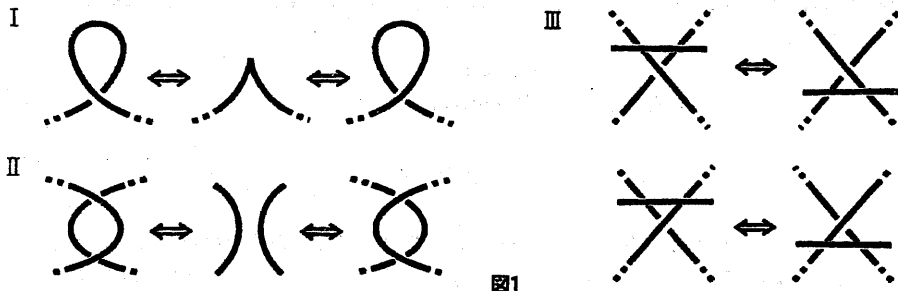


図1

2 ウェーブ変形

自明な結び目の正則表示は、多くの場合、図形を簡単にする操作を許す部分を持ち、それをウェーブと呼ぶ。

結び目 K の正則表示を \bar{K} とする。 \bar{K} において隣接する2つの交点を結ぶ弧を辺と呼ぶ。 e, e' を \bar{K} の異なる2つの辺とする。 辺 e から出発して辺 e' へと \bar{K} をたどるとき、その途中にある t 個の全ての交点が上方交点（又は下方交点）のみであるとする。 e の中点から e' の中点への平面上での単純曲線 r が \bar{K} と r 個の交点を持ち、かつ $r < t$ のとき、 r を r -ウェーブという。

図2に示された r は2-ウェーブである。

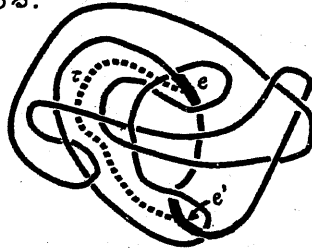


図2

自明な結び目の3橋正則表示（3本の上方向と3本の下方道のみから作られる正則表示）には、必ず0-ウェーブが存在する。従って、3橋正則表示が自明な結び目を与えるかどうか決定可能である。

図3(a)(b)(c)は全て自明な結び目である。これらが示すように一般の結び目の正則表示では自明な結び目でも r -ウェーブを持たないことがある。

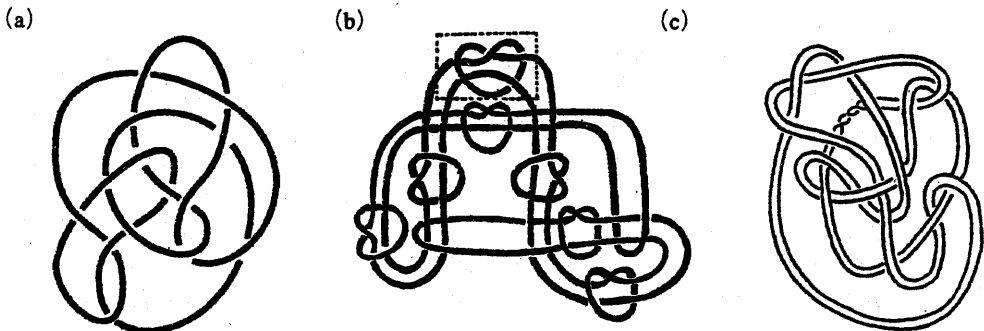


図3

3 ブロック変形と逆ケーブル操作

図3 (b)のような図形が与えられたときに、四角で囲まれた結び目の1部分を1つのブロックとする。このブロックを交点を超えて移動させることをブロック移動という。このブロック移動は、有限回のライドマイスター変形の組み合わせで実現できる。(図4 (a))

図3 (c)のような図形が与えられたときに、図3 (c)を図4 (b)のように単純化することを逆ケーブル操作という。

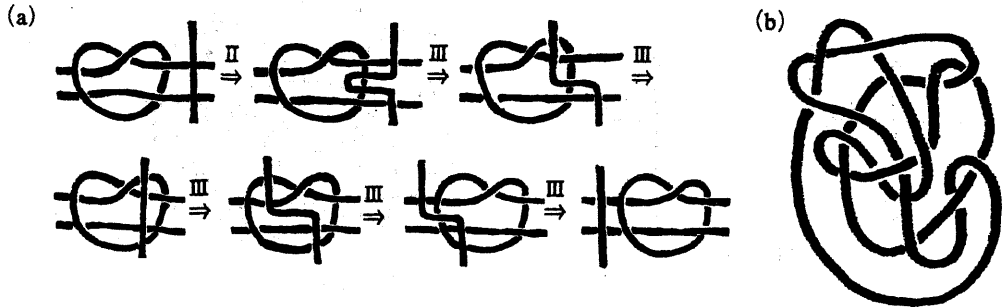


図4

4 タングル分解とミューテーション

K を結び目、 \bar{K} を K の平面 E 上の正則表示とする。 \bar{K} と4点のみで交差する E 上の単純閉曲線 C が存在するとき、 C を K のタンクルという。

結び目 K とそのタンクル(図5 (a))が与えられたとき、 K のタンクル部分の内部を図5 (b),(c),(d)のように、180度面上で回転、水平方向を軸に180度反転、垂直方向を軸に180度反転することを、タンクルのミューテーションという。2つの結び目が一方から他方にミューテーションで移りあえるとき、それらは互いにミュータントな結び目であるという。

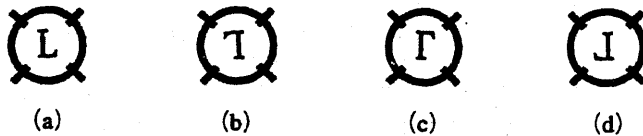


図5

図6の二つの結び目は、それぞれ樹下-寺阪結び目(図6 (a))、コンウェイ結び目(図6 (b))と呼ばれ、それらは互いにミュータントである。(ただし、同型ではない。)

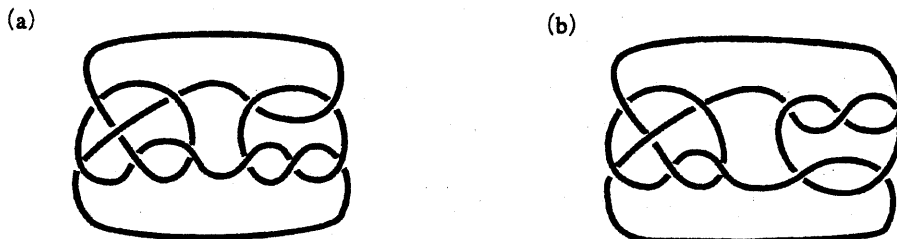


図6

現在知られている全ての多項式不変量は、2つの異なるミュータントな結び目を区別できないが、ここで述べているソフトウェアに移植された3平行化不変量は、樹下-寺阪結び目、コンウェイ結び

目を区別することが可能である。

5 結び目のデータ構造

向き付けられた結び目の正則表示が与えられたとき、各交点における交差の仕方は図7のいずれかになる。そこで、図7(a)のように交差している交点に+の符号、図7(b)のように交差している交点に-の符号をそれぞれ与える。

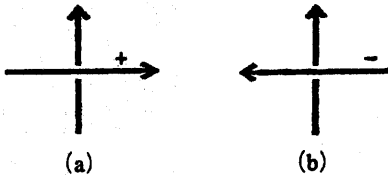


図7

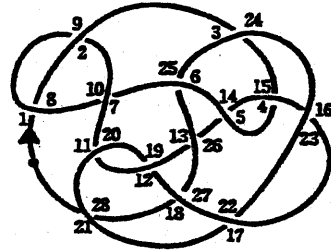


図8

次に適当な出発点 s を定め、 s から結び目の向きに沿って交点を順にたどりながら交点に番号をつけていく (図8)。 i 番目の上方交点に到達したとき、その交点の下方交点の番号を a_i とする。 s から上方交点をたどるごとに a_i を符号付きでリストアップしたものを結び目の P-データと呼ぶ。図8の P-データは次のようになる。

-9 -14 +25 -1 -7 +19 -4 -22 +27 +11 -28 -16 +3 +13

この結び目の P-データから次に述べる完全 P-データを簡単に得られる。例えば、上に上げた P-データを完全 P-データとして書くと、次のようになる。

prd	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
a	8	9	24	15	14	25	10	1	2	7	20	19	26	5
b	2	1	4	2	1	3	2	1	2	1	4	3	4	2
c	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
4	23	22	27	12	11	28	17	16	3	6	13	18	21
1	2	1	3	4	3	1	2	1	3	4	3	4	2
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

完全 P-データは次の内容を含んでいる。正則表示が保持する平面グラフの性質に関して

- (1) 何個の頂点を持つか。 (頂点の個数を v とする)
- (2) 何個の辺を持つか。 (辺の個数を e とする)
- (3) 何個の面を持つか。 (面の個数を f とする)

(1),(2),(3)の情報から P-データが与えるグラフが平面グラフかどうか、オイラーの定理により判定することができる。つまり、 $v - e + f = 2$ のとき平面グラフであり、このときその P-データは結び目の正則表示を与えると決定できる。

6 自明な結び目を判別するアルゴリズム

結び目の正則表示が与えられたら、次のような操作を繰り返す。

- (1) 逆ケーブル操作を行えるなら、それを行う。
- (2) ブロック移動を行えるなら、それを行う。
- (3) (1),(2)の操作後、 τ -ウェーブがあれば τ -ウェーブに沿って単純化の操作を行う。
もしそうでないとき、ライドマイスター変形を適当に行う。
- (3)の始めに戻る。

例えば、(1),(2)の操作後、図9(a)のようなどんな τ -ウェーブも持たない正則表示に対して、ライドマイスター変形Ⅲを施すことにより、 τ を τ' へと移動させると図9(b)が得られる。図9(b)は2-ウェーブを持つ。

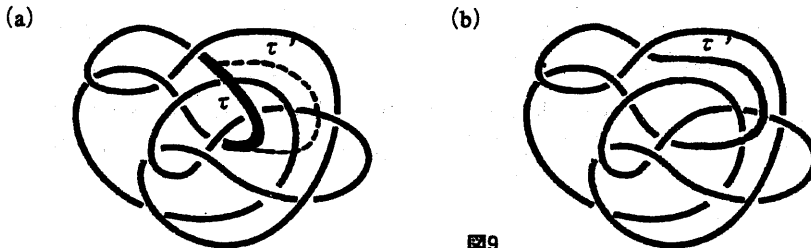


図9

τ -ウェーブを持たない自明な結び目の正則表示に対して、“交点数を増やさず”ライドマイスター変形を有限回施すだけで、ウェーブを持つ図形が得られるかどうかは不明である。従って、現在のところ上に述べた手順が正しいアルゴリズムであるかは不明である。しかし、これまでに得られたどんな τ -ウェーブも持たない自明な結び目の正則表示に対しても上に述べた手順により自明な結び目に変形できる。

例えば、図9(a)の結び目は図9(b)への変形の後、以下のようにして真に自明な結び目の正則表示にまで変形できる(図10)。

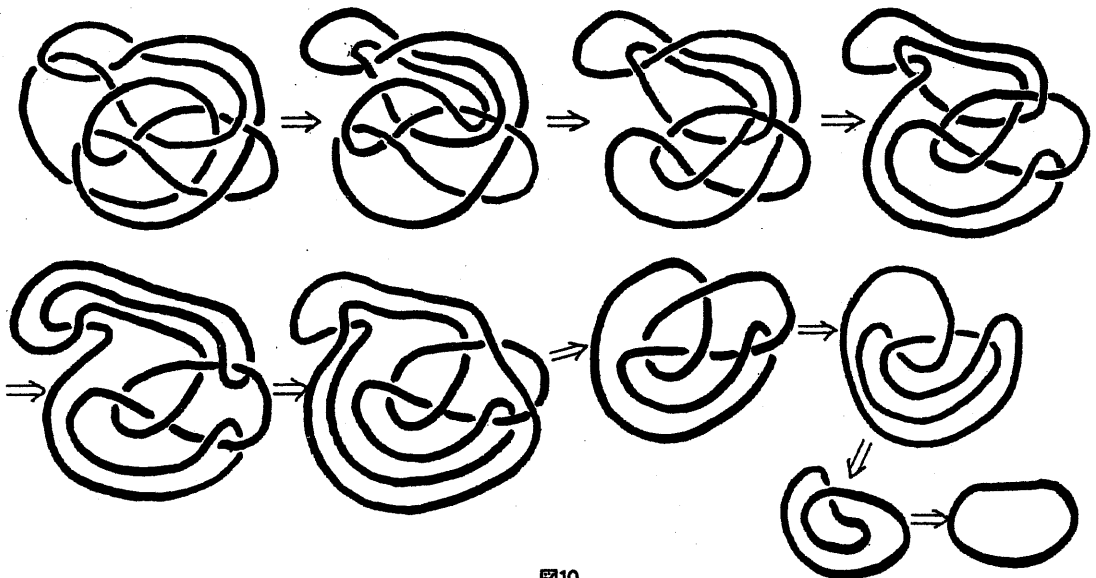


図10

7 まとめと展望

結び目が自明かどうかを判定するには,

(1) “交点数を増やさずに” ライドマイスター変形を有限回施すだけでウェーブを持つ図形が得られるかどうか決定する。

(2) 結び目の正則表示が逆ケーブル操作を行えるかどうかを決定する。

の二つを証明する必要があるが, どちらも極めて難しいように思われる。但し, (2)に関しては, 結び目のP-データが得られたときに, 逆ケーブル操作の逆操作として n 重化されたP-データを得ることは既に解決されている。

また, 結び目が自明かどうかを判定するには, 多項式不変量を利用する方法もある。自明な結び目の多項式不変量は常に1である。従って, 多項式不変量が1でない結び目は自明ではない。問題は, 多項式不変量が1の結び目が自明であるかをどのようにして決定するかである。

現在のところ, アレキサンダー多項式に関しては, “多項式不変量が1で自明でない結び目”の例として, 第4節でも述べた寺阪-樹下, コンウェイ結び目が知られている。しかし, ジョーンズ多項式以降に知られた全ての多項式不変量に関しては, “多項式不変量が1で自明でない結び目”の例は今のところ知られてはいない。但し, この問題に関しては殆どの研究者がそのような結び目の存在を予想している。

参考文献

落合豊行, 山田修司, 豊田英美子: “コンピュータによる結び目理論入門”
牧野書店