困難な問題の双線形計画問題を用いたモデル化手法

萩原　斉[†]　中森　眞理雄[††]

本論文では，一般に計算機では解きにくいとされる問題を双線形計画問題（*bilinear programming problem*）を用いてモデル化する方法を示す．具体的には，代表的なNP完全問題である「論理式充足可能性問題」の他に,「大きさ K のカバーの存在判定問題」,「グラフ K 色彩色可能性の判定問題」などのグラフに関する諸問題を双線形計画問題としてモデル化している．また，本論文では，その結果における，変数の個数，制約条件式の個数，係数行列の非零要素の個数を，各問題の複雑さを特徴づける静的な量として提案する．これらの静的な量は，どんな計算機械モデルやアルゴリズムにも依存しないため，問題そのものが持つ不変量と考えられる．また，双線形計画問題としてモデル化した結果を踏まえて，困難な問題を相互結合を有する回路問題としてモデル化する方法についても述べる．この回路問題としてのモデルにおける電流制限器の個数と双線形計画問題としてモデルにおける係数行列の非零要素の個数の間に密接な関連があることを示す．

Modeling Intractable Problems by Bilinear Programming

Hitoshi Hagiwara [†] and Mario Nakamori[††]

In the present paper, we describe typical intractable problems, e.g., "Satisfiablility Problem", "K-Cover Problem", "K-Coloring Number Problem", by bilinear programming problems. We propose a new static measure of problem complexity as the number of variables, constraints and non-zero elements of matrices in the above discription. Since these numbers do not depend on any computational models or algorithms, we think regard them as invariant quantities for each problem. Also, we show how to model problems, which are described by bilinear programming problems, as electric circuit problem with mutual coupling. We also show that there is a relation between the number of current limiter in the electric circuit model and the number of non-zero elements of matrices in the discription by bilinear programming problem model.

1. まえがき

本論文では，一般に計算機では解きにくいとされる問題（NP完全問題など）を双線形計画問題（*bilinear programming problem.* 以後，BLPと記す）を用いてモデル化する方法を示す．また，その結果における，変数，制約条件式，係数行列の非零要素の個数を，各問題の複雑さを特徴づける量として提案する．

本論文において重要な役割を果たすBLPとは，次の数理計画問題である[1]．

maximize

$$\varphi=\sum_{j=1}^{n} e_j x_j+\sum_{i=1}^{m} f_i y_i+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_i x_j,$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \le b_k \quad (k=1,2,\cdots,p),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{li} y_i \le d_l \quad (l=1,2,\cdots,q),$$

$$0 \le x_j \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

$$0 \le y_i \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

ただし，x_j, y_i は変数，$a_{kj}, b_k, c_{li}, d_l, e_j, f_i, g_{ij}$ は与えられた定数である．

近年，ソフトウェア開発の現場で取り扱われる問題やアルゴリズムは大規模化の一途をたどっている．かつては，コンピュータで扱うことが不可能とされていた問題でも，今日では，コンピュータを用いて解くことが可能になってきている．これに伴い，アルゴリズムの手間や問題の複雑さが，従来以上にきびしく評価され始めている．アルゴリズムの手間や問題の複雑さを測定したり理論的に評価したりすることは，ソフトウェアの性能向上やシステム開発の効率化のために不

† 株式会社 構造計画研究所
KOZO KEIKAKU ENGINEERING INC.
†† 東京農工大学
Tokyo A&T University

可欠である．

一般に，このような測定や評価には動的な解析方法と静的な解析方法とがあり，それぞれに対応した評価尺度がある．

動的な解析方法は，計算時間や所要記憶容量の大きさの測定と解析が本来の目標である．ただし，計算機環境，プログラム言語，プログラマの技能などにより差が出ることがあるため，特徴的な演算の回数やステップ数をもって計算時間の普遍化を図ることがしばしば行われている．具体的には，データの比較が行われる回数，ある関数が呼び出される回数，表類が参照される回数などが用いられる．動的な解析は，必ずしもプログラムを実行させて測定することを要するわけではない．理論的に，上記のような特徴的な演算の回数の見積を得ることによって，解析・評価することも多い．計算時間，特徴的な演算の回数，ステップ数などを一般的に時間計算複雑度あるいは時間計算量とよび，所要記憶容量を空間計算複雑度あるいは空間計算量とよぶ．

動的な解析方法では，アルゴリズムの計算量は前提となる計算機械モデルによって異なる．前述のように，近年では大規模な問題を解くために，従来型の逐次計算とは異なる並列計算や分散計算などの新しいタイプの計算が実用化されてきている．同時に，各タイプの計算に応じた新たな計算機械モデルも提案されている[2)~5)]．しかしながら，従来の計算複雑さの理論は計算機械モデルに依存するため，モデルに応じて異なる複雑度が定義される．例えば，逐次計算機械モデルと並列計算機械モデルでは問題間の複雑さの関係が異なる．

静的な解析は，アルゴリズムやプログラムや問題そのものが持つ複雑さを扱う方法である．例えば，プログラム（コード）中の行の数や関数の数をそのプログラムの複雑さの尺度とする方法などである．関数のネストの深さを複雑さの尺度とすることも考えられる．また，Lispプログラムでは，括弧の数をもってプログラムの尺度とすることも考えられる．近年では，フラクタルを利用したプログラムの複雑さの解析に関する報告もある[6)]．

静的な解析では，問題の複雑さを問題が持つ特徴的な不変量で評価することがしばしば試みられている．例えば，行列の次数，変数の個数，制約条件の式の個数などは問題の複雑さを表す指標として頻繁に用いられている．問題をグラフで表現した上で，点や辺の個数，グラフの階数（*rank*）や零度（*nullity*）や位相幾何学的自由度を用いることは，電気回路の解析においてしばしば行われる．疎（*sparse*）な行列における非零要素の個数も，問題の持つ特徴量と考えられる．

本論文では，静的な解析を行う一つの尺度として，次に示す問題複雑度を提案する．

双線形計画問題に基づく問題複雑度

各問題をBLP としてモデル化した結果における係数行列の非零要素の数の和により各問題の問題複雑度を定義する．

本研究と同様に，従来の問題複雑度とは異なる尺度を通して問題の複雑さを考える研究として，文献7)~11) が挙げられる．特に，文献 7)，8) においては，論理式充足可能性問題を通して他の難しい問題が持つ複雑さについて考察している．文献 9) においては，対話型証明（IP : *interactive proof*）およびゼロ知識の性質と計算量の理論との関係が論じられている．文献 10)，11) においては，確率的検査可能証明（PCP : *probabilistically checkable proof*）とよばれる証明プロトコルを通して，難しい問題に対する新しい特徴付けがなされている．

本研究では，これらの研究と異なり，BLP という数理計画問題を利用している．その理由は，BLP が持つ部分的な線形性を利用し，効率の良い近似解法の開発へ本研究を応用するためである．つまり本研究では，今後，静的な解析である問題複雑度の議論に留まらず，動的な解析と解法そのものへの応用も考えているのである．

2. 論理式充足可能性問題

論理式充足可能性問題（*satisfiability problem.* 以後，SAT と記す）は，典型的なNP 完全問題である．他の多くのNP 完全問題が持つNP 完全性は，このSAT が持つNP 完全性に基づいて証明されている．このことから，SAT がBLP としてモデル化可能であることを示すことにより，問題間の多項式還元可能性から，他のすべてのNP 完全問題も同様にBLP としてモデル化可能であると言える．

そこで本節では，NP 完全問題の基本とも言えるSAT をBLP としてモデル化する方法を示す．特に第 2.2 節においては，NP 完全な問題をBLP としてモデル化する際に用いる基本的かつ重要なSAT（0-1整数計画問題）とBLP との関係について述べる．

2.1 諸定義

ここでは，SAT をBLP として記述する際に使用する用語ならびに記号を定義する．

一般に，SAT に関する記述においては，ある論理変数 ξ の肯定形 ξ および否定形 $\neg\xi$ の両者をまとめ

てリテラルとよぶ．また，有限個のリテラルを論理和で結んだものを節とよぶ[12)]．

本論文では，この節に関する定義を拡張した"任意節"を次のように定義する．これにより，任意節の階層構造が表現可能となる．

任意節

リテラル，肯定形の任意節，否定形の任意節を有限個だけ同一の論理演算子で結んだものを任意節とよぶ．

本論文では，論理変数の種類数を定数 n で表し，任意節の数を定数 m で表す．このとき，各論理変数および任意節には，それぞれ 1 から n の変数番号および 1 から m の節番号が一意に付されているものとする．与えられた論理式全体に対しては節番号 0 が付されているものとする．

次に，これらの変数番号および節番号に対して 3 組の集合を定義する．

集合 L_i および $\overline{L}_i$

第 i 任意節内において，肯定形および否定形で存在する論理変数の変数番号からなる集合をそれぞれ L_i および $\overline{L}_i$ とする．

集合 C_i および $\overline{C}_i$

第 i 任意節内において，肯定形および否定形で存在する任意節の節番号からなる集合をそれぞれ C_i および $\overline{C}_i$ とする．

集合 O, A, E

第 i 任意節内において，その節を構成する論理演算子が論理和，論理積，排他的論理和である任意節の節番号からなる集合をそれぞれ O, A, E とする．

本論文においてSATを考える対象となる論理式は，次に示す論理式構成規則に従う論理式☆とする．なお，下記の規則内において，記号'+'は 1 回以上の繰り返しを意味する．

論理式構成規則

⟨ リテラル ⟩ ::= ⟨ 論理変数 ⟩ | ¬⟨ 論理変数 ⟩
⟨ 因子 ⟩ ::= ⟨ リテラル ⟩ | (⟨ 任意節 ⟩) | ¬(⟨ 任意節 ⟩)
⟨or 節 ⟩ ::= ⟨ 因子 ⟩ [∨ ⟨ 因子 ⟩]+
⟨and 節 ⟩ ::= ⟨ リテラル ⟩ | ⟨ 因子 ⟩ [∧ ⟨ 因子 ⟩]+
⟨ex-or 節 ⟩ ::= ⟨ 因子 ⟩ [⊕ ⟨ 因子 ⟩]+
⟨ 任意節 ⟩ ::= ⟨or 節 ⟩ | ⟨and 節 ⟩ | ⟨ex-or 節 ⟩
⟨ 論理式 ⟩ ::= ⟨ 任意節 ⟩

また，定数 l および連続変数 x_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$, y_i $(i = 0, 1, \cdots, m)$, z_{ik} $(i = 0, 1, \cdots, m;\ k = 1, 2, \cdots, l)$ を次のように定義する．

☆ 任意の論理式は，その長さに対して多項式オーダの手間で，この論理式構成規則に従った論理式に変換可能である．

$$l = \left\lfloor \log_2 \left\{ \max_{i \in E} \{ |L_i| + |\overline{L}_i| + |C_i| + |\overline{C}_i| \} \right\} \right\rfloor + 1$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{論理変数 } \xi_j \text{ を真とするとき} \\ 0 & \text{論理変数 } \xi_j \text{ を偽とするとき} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{第 } i \text{ 任意節を真とするとき} \\ 0 & \text{第 } i \text{ 任意節を偽とするとき} \end{cases}$$

$$z_{ik} = \begin{cases} & \text{第 } i \text{ 任意節内において真になる} \\ 1 & \text{任意節の数を 2 進数表現した場合の} \\ & \text{第 } k \text{ ビットが 1 のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

ただし，$\lfloor x \rfloor$ は x を越えない最大の整数である．

2.2 双線形計画問題との関係

ここでは，SATをBLPとしてモデル化する際に用いる基本的かつ重要なSATとBLPとの関係について述べる．

一般に，n 種類の論理変数 ξ_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ からなる論理式に対するSATは，同じく n 種類の 0–1 変数 θ_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ からなる 0–1 整数計画問題 (*0–1 integer programming problem.* 以後，0–1 IP と記す) における判定問題として記述される．この0–1 IP においては，論理式の構成によって制約条件が決定され，すべての制約条件を満たす可能解が存在するとき論理式は充足可能であることになる．そこで，あるSATを0–1 IP として記述した際の制約条件式が $f_i(\theta_j) \geq a_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n)$ であるとすると，このSATは次のに示す連続変数に対するBLPとして記述される．

minimize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \{ x_j(1 - u_j) + (1 - x_j)u_j \}, \qquad (1)$$

subject to

$$f_i(x_j) \geq a_i$$
$$(i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, n), \qquad (2)$$
$$0 \leq x_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n),$$
$$0 \leq u_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

ここで，(2) は0–1 IP の制約条件式における 0–1 変数 θ_j を連続変数 x_j で置き換えたものであり，与えられた論理式が充足可能であるための条件を表している．また，(1) の目的関数 φ は，$0 \leq x_j \leq 1$, $0 \leq u_j \leq 1$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を満たすいかなる x_j および u_j に対しても $0 \leq \varphi$ であり，φ が最小値 0 を取るのはすべての j において

$$(x_j, u_j) = (0, 0) \ or \ (1, 1)$$

が成り立つ場合に限られる．

したがって，最適解において，目的関数 φ の値が 0 であれば，すべての連続変数 x_j が 0 あるいは 1 の整

数値をとることになる．これはつまり，もとの0–1 IPに可能解が存在することであり，論理式が充足可能であることを意味する．

2.3 双線形計画問題としてのモデル化

前述の論理式構成規則に従う論理式に対するSATは，次に示す連続変数からなるBLPとしてモデル化される．

<u>**問題 I**</u>

minimize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \{x_j(1-u_j)+(1-x_j)u_j\} + \sum_{i=0}^{m} \{y_i(1-v_i)+(1-y_i)v_i\} + \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=1}^{l} \{z_{ik}(1-w_{ik})+(1-z_{ik})w_{ik}\},$$

subject to

$$\frac{1}{\alpha_i}\Big\{\sum_{j\in L_i} x_j + \sum_{j\in \overline{L}_i}(1-x_j) + \sum_{h\in C_i} y_h + \sum_{h\in \overline{C}_i}(1-y_h)\Big\} \le y_i \le \sum_{j\in L_i} x_j + \sum_{j\in \overline{L}_i}(1-x_j) + \sum_{h\in C_i} y_h + \sum_{h\in \overline{C}_i}(1-y_h) \quad (\forall i\in O), \tag{3}$$

$$x_j - \frac{1}{2} \le y_i \le x_j \quad (\forall i\in A,\ \forall j\in L_i), \tag{4}$$

$$(1-x_j) - \frac{1}{2} \le y_i \le 1-x_j \quad (\forall i\in A,\ \forall j\in \overline{L}_i), \tag{5}$$

$$y_h - \frac{1}{2} \le y_i \le y_h \quad (\forall i\in A,\ \forall h\in C_i), \tag{6}$$

$$(1-y_h) - \frac{1}{2} \le y_i \le 1-y_h \quad (\forall i\in A,\ \forall h\in \overline{C}_i), \tag{7}$$

$$\sum_{j\in L_i} x_j + \sum_{j\in \overline{L}_i}(1-x_j) + \sum_{h\in C_i} y_h + \sum_{h\in \overline{C}_i}(1-y_h) = \sum_{k=1}^{l}(2^{k-1}z_{ik}) \quad (\forall i\in E), \tag{8}$$

$$z_{i1} - \frac{1}{2} \le y_i \le z_{i1} \quad (\forall i\in E), \tag{9}$$

$$1 \le y_0, \tag{10}$$

$$0 \le x_j \le 1 \quad (j=1,2,\cdots,n),$$
$$0 \le u_j \le 1 \quad (j=1,2,\cdots,n),$$
$$0 \le y_i \le 1 \quad (i=0,1,\cdots,m),$$
$$0 \le v_i \le 1 \quad (i=0,1,\cdots,m),$$
$$0 \le z_{ik} \le 1 \quad (i=0,1,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,l),$$
$$0 \le w_{ik} \le 1 \quad (i=0,1,\cdots,m;\ k=1,2,\cdots,l).$$

問題 I の最適解において，目的関数 φ が最小大値 0 をとるとき，すべての連続変数 x_j, y_i, z_{ik} は 0 あるいは 1 の整数値をとる．このとき，対象の論理式は充足可能である．

なお，各制約条件式が持つ意味は次のとおりである．

(3)：or 節内の少なくとも 1 つのリテラルが真になればその or 節は充足可能である．

(4)〜(7)：and 節内のすべてのリテラルおよび任意節が真になるときに限りその and 節は充足可能である．

(8),(9)：ex-or 節内において真になるリテラルおよび任意節の数が奇数個の場合に限りその ex-or 節は充足可能である．

(10)：与えられた論理式は充足可能でなければならない．

上記モデル化における，変数の個数，制約条件式の個数，係数行列の非零要素の個数を次に示す☆．ただし，$|O|+|A|+|E| = m+1, l = O(\log m)$ である．

変数　$2\{n+(m+1)+(m+1)l\}$

制約条件式　$2|O|+2(n+m)|A|+3|E|+1$

非零要素　$2(n+1)|O|+2(n+m)|A|+(n+m+l+2)|E|+2m+1$

3. 大きさ K のカバーの存在判定問題

ある単純無向グラフ $G=(V,E)$ において，すべての枝 $e\in E$ の少なくとも一方の端点が属する集合 V' $(V'\subseteq V)$ をグラフ G に対する大きさ $|V'|$ のカバーとよぶ．

本節では，与えられたグラフ G に対して，大きさ K $(K\le|V|)$ のカバーが存在するか否かの判定問題をBLPとしてモデル化する方法を示す．

3.1 諸　定　義

$v=|V|$ および $e=|E|$ とし，次に示す接続行列 $\mathcal{G}=\{g_{ij}\}$ $(i=1,2,\cdots,e;\ j=1,2,\cdots,v)$ によりグラフ G を表現する．

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } j \text{ が枝 } i \text{ の端点であるとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

また，連続変数 x_j $(j=1,2,\cdots,v)$ を次のように定義する．

☆ 本論文では，制約条件式の個数および非零要素の個数の考察に際して，変数の値域を表す制約条件式を対象外としている．

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{節点 } j \text{ をカバーに含めるとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

3.2 双線形計画問題としてのモデル化

大きさ K のカバー存在判定問題は，次に示す問題 II のBLP としてモデル化される．

問題 II

minimize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{v} \{x_j(1-u_j) + (1-x_j)u_j\},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{v} x_j = K, \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{v} g_{ij}x_j \geq 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, e), \tag{12}$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, v),$$

$$0 \leq u_j \leq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, v).$$

なお，各制約条件式が持つ意味は次のとおりである．

(11)：カバーに含める節点数は K でなければならない．

(12)：節点間に枝が存在する 2 節点のうち少なくとも一方をカバーに含めなければならない．

上記モデル化における，変数の個数，制約条件式の個数，係数行列の非零要素の個数を次に示す．ただし，$e = O(v^2)$ である．

変数　$2v$

制約条件式　$e + 1$

非零要素　$3e + v + 1$

4. グラフ K 色彩色可能性の判定問題

ある単純無向グラフ $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ のすべての節点 $v \in \boldsymbol{V}$ を，どの隣接する 2 節点も同色にならないように K $(K \leq |\boldsymbol{V}|)$ 色で塗り分けられるとき，グラフ $\boldsymbol{G}$ は K 色で彩色可能であるという．

本節では，与えられたグラフ $\boldsymbol{G}$ を K 色で彩色可能か否かの判定問題をBLP としてモデル化する方法を示す．

4.1 諸　定　義

第 3.1 節と同様に，v, e および接続行列 $\mathcal{G}$ を定義する．

また，連続変数 x_{jk} $(j = 1, 2, \cdots, v;\ k = 1, 2, \cdots, K)$ を次のように定義する．

$$x_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } j \text{ を色 } k \text{ で塗るとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

4.2 双線形計画問題としてのモデル化

K 色での彩色可能性判定問題は，次に示す問題 III のBLP としてモデル化される．

問題 III

minimize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{K} \{x_{jk}(1-u_{jk}) + (1-x_{jk})u_{jk}\},$$

subject to

$$\sum_{k=1}^{K} x_{jk} = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, v), \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{v} g_{ij}x_{jk} \leq 1$$

$$(i = 1, 2, \cdots, e;\ k = 1, 2, \cdots, K), \tag{14}$$

$$0 \leq x_{jk} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, v;\ k = 1, 2, \cdots, K),$$

$$0 \leq u_{jk} \leq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, v;\ k = 1, 2, \cdots, K).$$

なお，各制約条件式が持つ意味は次のとおりである．

(13)：各節点はただ 1 色で塗られなければならない．

(14)：すべての枝の両端点を同じ色で塗ってはならない．

上記モデル化における，変数の個数，制約条件式の個数，係数行列の非零要素の個数を次に示す．ただし，$e = O(v^2), K = O(v)$ である．

変数　$2Kv$

制約条件式　$Ke + v$

非零要素　$Ke + 2e + K + v$

5. 相互結合を含む回路問題によるモデル化

ここまでに，問題をBLP としてモデル化する例を示した．これらのモデル化例は，相互結合を有する電気回路の問題として解釈することも可能である．以下にその例を示す．

BLP としてのモデル化において，目的関数は必ず $x(1-u) + (1-x)u$ の形となっている．これを，“相互結合” のある素子を含む回路において，電流 x が流れる素子と電流 $1-u$ が流れる素子との間の相互作用により $x(1-u)$ の発熱があり，かつ，電流 $1-x$ が流れる素子と電流 u が流れる素子との間の相互作用により $(1-x)u$ の発熱があると解釈する．もちろん，発熱には x^2 や u^2 の項も一般にはあるはずであるが，相互結合による部分の方が大きい場合の極限を想定したモデルである．これは，図 2 中の斜線部の素子であり，内部の構造は図 3 に示すとおりである．本論文では，図 3 の素子を相互干渉器とよぶことにする．一般に，電気回路では，発熱量が最小の状態が実現するので，相互結合のある電気回路のモデルでは，上記の目的関数が 0 となる状態が実現し，それがBLP の最適解となる．

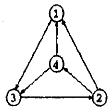
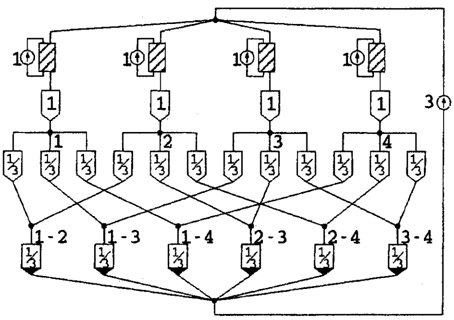


図 1　例題（大きさ 3 のカバーの存在判定問題）
Fig. 1　Sample graph(Vertex cover of size 3)



（図 3 および図 4 参照）
図 2　カバーの存在判定問題の相互結合モデル
Fig. 2　A coupling model of the vertex cover problem

図 3　図 2 における電流制限器の構造
Fig. 3　The structure of current limiter in Fig. 2

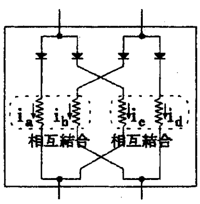


図 4　図 2 における相互干渉器の構造
Fig. 4　The structure of mutual resister in Fig. 2

この電気回路モデルとして，図 1 のグラフに大きさ 3 のカバーが存在するか否かを判定する問題をモデル化した例が図 2 である．また，図 2 における「電流制限器（*current limiter*）」[13] の個数が，BLP としてモデル化した問題 II における非零要素の個数に相当する．

6. まとめ

本論文では，論理式充足可能性問題およびグラフに関するいくつかの問題をBLP としてモデル化する手法を示した．また，BLP としてモデル化した問題を相互結合を有する電気回路の問題として解釈する方法も示した．

本論文において示した各問題をBLP としてモデル化した結果における変数の個数，制約条件式の個数，係数行列の非零要素の個数は，各問題の複雑さを特徴付ける量になり得ると考えらる．なぜならば，これらの数は，計算機械モデルやアルゴリズムに依存しない問題そのものが持つ不変量と考えられるからである．ただし，一般に変数の個数と制約条件式の個数には，一方を減らせば一方が増えるといったトレード・オフの関係がある．そこで，今後は，このトレード・オフにおいて変数の個数と制約条件式の個数がどのような関係をもって増減するのかを調べたい．また，同様にこのトレード・オフにおいて，係数行列の非零要素はどのような影響を受けるのかについても調べたい．

参考文献

1) OR 事典編集委員会 (編): OR 事典, 日科技連出版社 (1975). 特殊な型の数理計画, 双線形計画の項.
2) 宮野悟: 並列アルゴリズム –理論と設計–, 近代科学社 (1993).
3) 岩間一雄: 並列計算の理論, 信学誌, Vol.75, No.1, pp. 56–65 (1992).
4) 亀田恒彦, 山下雅史: 分散アルゴリズム, 近代科学社 (1994).
5) 六沢一昭, 市吉伸行: ブロードキャストと WTC 方式を用いた分散プロセス制御方式, 情処学論, Vol. 33, No. 3, pp. 320–329 (1992).
6) 佐藤和寿, 澤村浩, 篠崎明, 伊與田光宏: 信学秋大 (1994). D-55.
7) Stearns, R. E. and III, H. B. H.: Power Indices and Easier Hard Problems, *Mathematical Systems Theory*, Vol. 23, pp. 209–225 (1990).
8) Iwama, K. and Miyazaki, S.: SAT-variable complexity of hard combinatorial problems, *Proc. 13th IFIP World Computer Congress*, Hamburg, pp. 253–258 (1994).
9) 静谷啓樹, 伊東利哉, 桜井幸一: ゼロ知識証明モデルと計算量理論, 情報処理, Vol. 32, No. 6, pp. 673–681 (1991).
10) Arora, S., Lund, C., Motwani, R., Sudan, M. and Szegedy, M.: Proof Verification and Hardness of Approximation Problems, *Proc. 33rd FOCS*, pp. 14–23 (1992).
11) 太田和夫, 岡本龍明: クラス NP の新しい特徴づけ–確率的検査可能証明と近似問題–, 情報処理, Vol. 35, No. 1, pp. 55–68 (1994).
12) 長尾真, 石田晴久, 稲垣康善, 田中英彦, 辻井潤一, 所真理雄, 田中育男, 米澤明憲 (編): 岩波 情報科学辞典, 岩波書店 (1990).
13) Iri, M.: *Network Flow, Transportation and Scheduling*, Academic Press (1969).