

セルラ・オートマタによる構造物最適化

北 栄輔、豊田哲也
名古屋大学

本研究では、セルラ・オートマタを用いた構造物最適化手法について述べる。最初に、構造全体の応力解析を有限要素法で行い、設計変数は求めた応力分布とローカル・ルールに従って更新される。ローカル・ルールは注目セルとその近傍セルの間の簡単な関係式として与えられるが、本研究ではルールを導出のために以下のような方法を用いる。まず、計全体の最適化問題をセルごとに分割するために特殊な制約条件を導入する。続いて、通常の最適化問題の定式化により、ローカル・ルールを解析的に導出する。最後に、導かれたローカル・ルールを簡単な解析例に適用し、その妥当性を検討する。

Structural Optimization Using Cellular Automata

Eisuke KITA and Tetsuya TOYODA
Nagoya University

This paper describes the structural optimization scheme based on the concept of the cellular automata. The stress analysis of the whole structure is carried out by finite element method. Then, the design variables are updated according to the local rule and the stress distribution. The rule is derived analytically from the optimization problems by introducing the special constraint condition. The derived rule is applied to a simple numerical example in order to discuss the theoretical validity of the formulation.

1 緒論

セルラ・オートマタ・シミュレーションでは、解析対象領域を小さな正方形セルに、時間軸も単位時間ステップに分割する。各セルは状態量を持ち、状態量は各時間ステップ毎にローカルルールによって更新される。ローカル・ルールは、注目セルとその近傍セルとの間の局所的な関係を表現するように定義されるので、セルラ・オートマタは系全体を支配する方程式の導出が困難な問題に適したシミュレーション手法と考えられており、交通量シミュレーション、流体シミュレーションなどさまざまな問題に適用されている [1]。これに対して、本研究では、セルラ・オートマタを構造物最適化に適用する。

構造物最適化問題へのセルラ・オートマタの適用は、すでに多数の研究者により提案されている [2, 3, 4, 5, 6]。このうち、伊能ら [3] は次のような方法を提案している。まず、設計領域を小さな正方形セルに分割し、セルを要素として有限要素解析を行って得られた応力分布とローカル・ルールによって各セルの目標応力を変更する。そして、目標応力と実応力のずれが小さくなるようにセルのヤング率を更新する。このとき、ローカル・ルールは数値実験により定義されるので、ルールを問題に応じて修正する必要がある。そこで、尾田ら [4] は、骨のリモデリング理論に基づき、ルールをニューラル・ネットワークで学習させる方法を提案している。これに対して、本研究ではローカル・ルールを最適化問題から数学的に導出する方法について述べる。この方法では、最初に CA 制約条件という特殊な制約条件を導入し、構造全体についての最適化問題を、注目セルとその近傍セルに関する最適化問題に分割する。続いて、最適化問題から汎関数を定義し、その停留化よりルールを導く。最後に、簡単な例題に対してルールを適用して妥当性を検討する。

2 ローカル・ルール

(1) **構造物のセルラ・オートマタ表現** 設計領域は多数の正方形領域の集合に分割される。正方形領域は、有限要素解析においては要素として、セルラ・オートマタにおいてはセルとして考える。各セルの状態量(設計変数)として、セル厚をとる。なお、セルラ・オートマタでは離散値の状態量をとるのが一般的であるが、ここでは連続値をとる。注目セルの状態量は、そのセルと近傍セルの状態量からローカル・ルールにより更新される。また、注目セルの隣接8セルを近傍セルとし、注目セルをセル番号0、近傍セルを1から8と番号づける。ただし、解析対象の境界に接するセルに対しては、存在しているセルだけを近傍セルとする。

(2) **最適化問題** 設計変数として注目セルの厚さを、設計目的として重量最小化をとる。また、制約条件としてセルに生じる Mises 相当応力が許容応力に均一化されることを考える。そして、最適化問題をセルごとに独立した問題として扱うために、近傍セルでの応力値の変化が小さいことをとる (CA 制約条件)。

セル面積と材料が一定の場合、目的関数は次式で与えられる。

$$W_1 = \frac{1}{2}h^2 \quad (1)$$

ここで h は初期厚さで無次元化されたセル0の厚さを示す。また、注目セルに生じる Mises 相当応力 $\bar{\sigma}_0$ が材料の許容応力 σ_c に均一化される制約条件は次式となる。

$$g_0 = \frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_c} - 1 = \sigma_0 - 1 = 0 \quad (2)$$

一方、近傍セル i での Mises 相当応力値を $\bar{\sigma}_i$ 、状態が変化する前の同セルでの Mises 相当応力値を $\bar{\sigma}_i^0$ とすれば、CA 制約条件は次式で与えられる。

$$g_i = \frac{\bar{\sigma}_i}{\bar{\sigma}_i^0} - 1 \equiv \sigma_i - 1 = 0 \quad (i = 1, \dots, 8) \quad (3)$$

(3) **汎関数の導出と停留化** ペナルティ係数 p を用いれば、式 (1)、(2)、(3) より次の汎関数が定義できる。

$$W = W_1 + \frac{p}{2} \left(g_0^2 + \sum_{i=1}^8 g_i^2 \right) = \frac{1}{2}h^2 + \frac{p}{2} \sum_{i=0}^8 (\sigma_i - 1)^2 \quad (4)$$

設計変数 h が微小変化した場合 $h + \delta h$ について式 (4) を展開し、汎関数を停留化することで次式を得る。

$$\frac{\partial W}{\partial h} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta h = -\frac{h + p \sum_{i=0}^8 (\sigma_i - 1) \dot{\sigma}_i}{1 + p \sum_{i=0}^8 \dot{\sigma}_i^2} \quad (5)$$

(4) **ローカル・ルールの導出** セルごとに仮想仕事の原理を定義して有限要素法を定式化すると次式を得る。

$$hK'_e U = f$$

境界条件が h の関数でないことを考慮して上式の両辺を h で微分し、整理すると次式を得る。

$$\dot{U}_e = -\frac{1}{h}(K'_e)^{-1}K'_e U_e \equiv -\frac{1}{h}U_e \quad (6)$$

一方、応力と変位の関係式

$$\sigma_e = D\varepsilon = DBU_e \quad (7)$$

の両辺を h で微分することにより次式を得る。

$$\dot{\sigma}_e = DB\dot{U}_e = -\frac{1}{h}DBU_e = -\frac{1}{h}\sigma_e \quad (8)$$

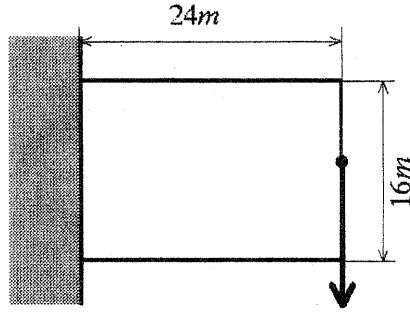


図 1: 解析対象

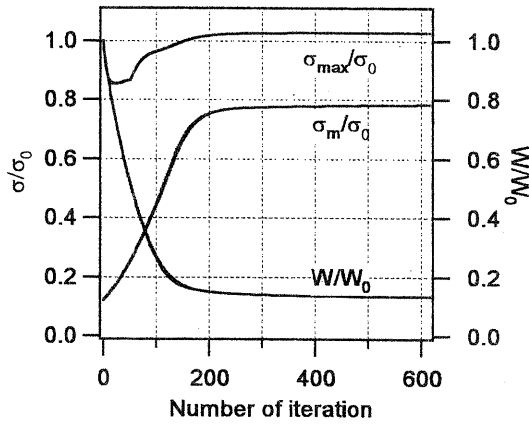


図 2: 収束曲線

上式を式(5)に代入して整理することで次のルールを得る。

$$\delta h = \frac{-h^2 + p \sum_{i=0}^8 (\sigma_i - 1) \sigma_i}{h^2 + p \sum_{i=1}^8 \sigma_i^2} \cdot h \quad (9)$$

上式から設計変数の修正量を求め、次式により設計変数を変更する。

$$h^{k+1} = h^k + \delta h \quad (10)$$

3 解析例

解析対象を図1に示す。長方形の設計領域を考え、左辺を固定し、右辺中央に下向きに加重 $P = 20.0(N)$ を作用させる。解析領域を横方向24列、縦方向16列のセルに分割し、すべてのセルの初期厚 $h_0 = 1.0(m)$ は同一とする。初期形状でセルに生じる最大応力 σ_0 に対して、許容応力 $\sigma_c = 0.8 \times \sigma_0$ とする。また、ペナルティ関数は $p = 10$ 、ヤング率 $E = 1.0 \times 10^5 (Pa)$ 、ポアソン比 $\nu = 0.2$ とする。

構造物全体の重量と応力の収束特性を図2に示す。解析対象の重量は急速に減少し、300回で初期重量の15%程度に収束していることが分かる。また、最大応力 σ_{max} は繰り返し回数60回程度までに急速に低下し、

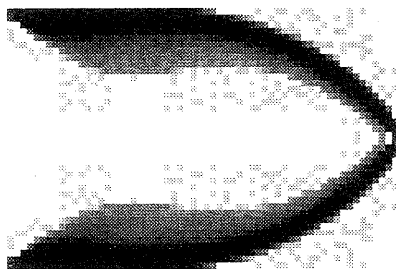


図 3: セル厚分布

そのあと目標応力 $\sigma_c = 0.8 \times \sigma_0$ よりも大きい応力値 $1.1 \times \sigma_0$ 程度に漸近している。一方、平均応力 σ_m は徐々に増加して、目標応力に漸近している。このことより、全体応力分布は目標応力に均一化しようとしているにもかかわらず、最大応力はほぼ初期最大応力のままで、減少していないことがわかる。この原因として、ペナルティ係数 p の値の大きさが考えられる。そこで、 $p = 5, 10, 100, 300$ として繰り返し計算を300回ずつ行い、最終形状での最大応力値を比較した結果、 p の値が大きくなるに従って、最終形状における最大応力値は目標応力 $\sigma_c = 0.8 \times \sigma_0$ に近づいていることが確認できた。

300回の反復計算の結果得られたセル厚の分布を図3に示す。ここで、厚いセルほど黒く表示されており、白色セルは存在しないセルである。最終形状は、2部材からなるトラス構造によく似ている。

4 結論

本研究では、セルラ・オートマトンを用いたシミュレーション手法を2次元構造物の位相・形状最適化問題に適用した。最初に、特殊な制約条件を導入して構造物全体についての最適化問題を、近傍セルについての局所的な問題に分割した。この変換された最適化問題から汎関数を導出し、それを停留化することでローカル・ルールを導出した。最後に、提案手法を簡単な問題に適用し、妥当な結果を得ることができた。

参考文献

- [1] R. Gaylord and K. Nishidate. *Modeling Nature: Cellular Automata Simulations with Mathematica*. Springer Verlag, 1 edition, 1996.
- [2] Y. M. Xie and G. P. Steven. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Comp. & Struct.*, Vol. 49, pp. 885–896, 1993.
- [3] N. Inou, N. Shimotai, and T. Uesugi. A cellular automaton generating topological structures. *Proc. 2nd Europ. Conf. Smart Structures and Materials*, Vol. 2361, pp. 47–50, 1994.
- [4] J. Sakamoto and J. Oda. Simulation of adaptive bone remodeling by using cellular automata. *Structural Optimization*, pp. 93–100. Comp. Mech. Pub., 1995.
- [5] W. M. Payten, B. Ben-Nissan, and D. J. Mercer. Optimal topology design using a global self-organisational approach. *Int. J. Solid Struc.*, Vol. 35, No. 3-4, pp. 219–237, 1998.
- [6] E. Kita and T. Toyoda. Structural design using cellular automata. *Struct. Opt.* (in Press).