数理モデル化と問題解決　32－15
（2000．11．22）

GA による係数のペアリングに基づく 誤差フィードバック回路の設計法

中本 昌由† 雛元 孝夫††

†広島大学大学院 ††広島大学工学部

誤差フィードバック回路の設計では，実現コストの削減を図るために係数に対称・奇対称といった制約を加えている．これは，あらかじめ決められた 2 つの係数の絶対値を互いに同じ値にすること (係数のペアリング) により，無制約の場合の約半分のパラメータ数で回路を設計する方法である．しかしながら，この対称・奇対称といった制約条件が必ずしも最適であるとは限らない．本論文ではこの点に着目し，回路の設計・評価を様々なペアリング制約の条件下で繰り返し，その中から遺伝的アルゴリズム (GA) によって最適な係数のペアリングを見つける．本設計法を用いれば，従来 (対称・奇対称条件) と同じパラメータ数で，従来よりも優れた特性を有する誤差フィードバック回路が設計できる．

Design of Error Feedback Network Based on Coefficient's Pairing by Genetic Algorithm

Masayoshi NAKAMOTO† and Takao HINAMOTO††

†Graduate School of Engineering, Hiroshima University
††Faculty of Engineering, Hiroshima University

For low-cost realization, error feedback coefficients are normally designed by using some constraints such as symmetry or anti-symmetry. In these design methods, two coefficients, which are chosen in advance, are required to have the same absolute values (coefficient's pairing). However, these constraints (symmetry or anti-symmetry) are not always optimal. This reason motivated us to consider a novel design technique in which we repeat network design and its evaluation on all sorts of coefficient's pairing conditions and find the optimal coefficient's pairing using genetic algorithm (GA). Using the proposed method, we can realize better networks than previous methods with same number of parameters.

1. はじめに

ディジタルフィルタにおける積和演算結果の丸め誤差に起因したフィルタ出力雑音の低減化に対しては，誤差フィードバック (FB) が有効である．誤差 FB 回路の設計に関する研究は，雑音低減化特性の向上と制約条件を付加した準最適誤差 FB 係数の設計によるコスト削減の工夫が同時に行われてきた．誤差 FB 係数の制約条件とは，2 つの係数を同符号または異符号で同じ値とするものであり，この条件下では乗算回数を制約が無い場合の約半分に減らすことができる．しかしながら，FB 回路の性能と低コスト実現との間にはトレードオフの関係があり，これらを両立させることが回路設計の重要な問題となっている．文献 1) では，1 次元巡回形ディジタルフィルタに対して，最適誤差 FB 回路と共に対称・奇対称の制約を加えた準最適誤差 FB 回路の設計法が示されている．また，文献 2) では，伝達関数または局所状態空間モデルで記述された 2 次元巡回形ディジタルフィルタの誤差 FB 回路に対して，係数に対称・4 分対称等の制約を加えることによって実現コストの削減を図っている．

本論文では，対称・奇対称といった決まった形の係数のペアリング (制約条件) ではなく，実現可能な全ペアリングの中から最も望ましい係数の制約条件の決定法について論じる．ここでは，大域的探索に優れ，かつ様々な問題に容易に応用できるという特長をもつ遺伝的アルゴリズム3)(以下，GA と略す) によって係数の最適制約条件を探索し，無制約の場合の半分の (対称・奇対称と同じ) 乗算回数で最大効率 (雑音の最大低減化特性) を有する誤差 FB 回路を設計する．

2. 問題の定式化

ディジタルフィルタの積和演算の丸め (量子化) によって発生した誤差信号は，フィルタ内部を巡回してフィルタ出力で雑音となって現われる．誤差信号を一様分布に従う定常白色雑音でモデル化

すると，フィルタ出力における正規化雑音利得は次のように定式化される[2)]．

量子化点からフィルタ出力へのインパルス(単位サンプル)応答を $h_Q(i,j)$ としたとき，誤差信号の自己相関係数は

$$q_{rs} \;=\; \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_Q(i,j)h_Q(i+r,j+s) \qquad (1)$$

と計算される．ここで，対称性 $q_{rs}=q_{-r,-s}$ および $q_{-r,s}=q_{r,-s}$ が成立する．誤差FB回路が無い場合，雑音利得 G は q_{00} に等しい．

次に，伝達関数

$$B(z_1,z_2) \;=\; \sum_{r=0}^{M_1}\sum_{s=0}^{M_2} \beta_{rs} z_1^{-r} z_2^{-s},\ \beta_{00}=1 \qquad (2)$$

で表される誤差FB回路を量子化器に組み込むと，フィルタ出力における雑音利得は，次の2次形式で表される．

$$G \;=\; \boldsymbol{w}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \qquad (3)$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}_i &= (\beta_{0i},\beta_{1i},\cdots\beta_{M_1 i})^T\\
\boldsymbol{R}_i &= \begin{bmatrix} q_{0i} & q_{-1,i} & \cdots & q_{-M_1,i}\\ q_{1i} & q_{0i} & \cdots & q_{-M_1+1,i}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q_{M_1,i} & q_{M_1-1,i} & \cdots & q_{0i}\end{bmatrix}\\
\boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{w}_0^T,\boldsymbol{w}_1^T,\cdots\boldsymbol{w}_{M_2}^T)\\
\boldsymbol{R} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0 & \boldsymbol{R}_{-1} & \cdots & \boldsymbol{R}_{-M_2}\\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_0 & \cdots & \boldsymbol{R}_{-M_2+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{R}_{M_2} & \boldsymbol{R}_{M_2-1} & \cdots & \boldsymbol{R}_0\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

なお，$\boldsymbol{R}$ は正定対称行列であることが知られている．誤差FB回路の設計とは，雑音利得 G を最小にするような誤差FB係数 $\beta_{rs}(r=0,1,\cdots M_1;\ s=0,1,\cdots M_2)$ を決定することである．最適な誤差FB係数は，制約条件の有無に関わらず，解析的に閉じた形で求めることができる．

誤差FB回路の設計において，文献2)では実現コストの削減のため，対称

$$\beta_{rs} \;=\; \beta_{M_1-r,M_2-s} \qquad (4)$$

または，奇対称

$$\beta_{rs} \;=\; -\beta_{M_1-r,M_2-s} \qquad (5)$$

の条件下での設計法が示されている．この設計法を用いると，無制約の場合と比較してパラメータ数を約半分に減らすことができる．このように2つの係数を同符号または異符号で同値とすることを**係数のペアリング**と呼ぶことにする．

本論文では，このような定形の係数の制約(ペアリング)ではなく，実現可能な全ペアリングから最適な(最も雑音利得を小さくする)制約条件を探索する．言いかえると，ある係数のペアリングに対して，その条件下で誤差FB回路を設計し，雑音利得を指標としてその回路の評価を行う．これを1回の試行として回路の設計と評価を繰り返し，評価値が高い回路を探索アルゴリズムによって見つける．この問題は，次のような「係数のペアリング問題」として定式化できる．

[係数のペアリング問題]

N (偶数)個の係数から2個1組として同符号または異符号のペアを $N/2$ 組をつくり，係数のペアのつくり方に対して評価値が与えられる組み合わせ最適化問題．

なお，ペアリングの組み合わせ総数は

$$P(N) \;=\; \frac{N!}{(N/2)!} \qquad (6)$$

である．ただし

$$N! = N\cdot(N-1)\cdots 2\cdot 1 \qquad (7)$$

3. 誤差FB回路の設計

ここでは，係数がペアリングされた条件下での誤差FB回路の設計法について述べる．

3.1 Lagrangeの未定乗数法

2次形式

$$G=\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{w} \qquad (8)$$

を制約条件

$$\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}=\boldsymbol{p}^T \qquad (9)$$

のもとで最小化するベクトル $\boldsymbol{w}^*$ を求める．誤差FB係数が N 個の場合を考えると $\boldsymbol{w}$ のサイズは $N\times 1$，$\boldsymbol{R}$ のサイズは $N\times N$ である．また，$\boldsymbol{C}$ は $N\times(N/2+1)$ 行列，$\boldsymbol{p}$ は $(N/2+1)\times 1$ ベクトルである．この問題をLagrangeの未定乗数法に適用し，Lagrange関数を

$$L(\boldsymbol{w},\lambda)=\frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{w}-(\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{C}-\boldsymbol{p}^T)\boldsymbol{\lambda} \qquad (10)$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{\lambda}$ は $(N/2+1)\times 1$ ベクトルで要素数は制約条件の数に等しい．このとき最適ベクトル $\boldsymbol{w}^*$ は，次の関係式を満たす．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{w}} &= \boldsymbol{R}\boldsymbol{w}^*-\boldsymbol{C}\boldsymbol{\lambda}^*=0 && (11)\\
\frac{\partial L(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \boldsymbol{\lambda}} &= \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{w}^*-\boldsymbol{p}=0 && (12)
\end{aligned}$$

したがって，$\boldsymbol{\lambda}$ を消去すると，$\boldsymbol{w}^*$ は

$$\boldsymbol{w}^*=\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{p} \qquad (13)$$

と求まる[2)]．なお，ここでは $\boldsymbol{C}$ を制約行列と呼び，$\boldsymbol{p}=(1,0,\cdots,0)^T$ とする．与えれた係数のペアリングに基づいて $\boldsymbol{C}$ を生成すれば，式(13)から誤差FB係数が設計される．

3.2 制約行列の生成手順

制約行列 $\boldsymbol{C}$ の生成アルゴリズムを以下に示す．$N \times (N/2+1)$ の制約行列 $\boldsymbol{C}$ の (i,j) 要素を c_{ij} とおく．

STEP 1: $x_1 = 1$ を満たすために，$c_{11} = 1$, $c_{21} = c_{31} = \cdots = c_{N1} = 0$ とおく．$j = 2$ として，**STEP 2**へ．

STEP 2: N 個の係数の中からまだ選択されていない最も若い番号の係数 x_i を選択し，$c_{ij} = 1$ とおく．

STEP 3: N 個の係数の中から x_i とペアを組む係数 $x_{i'}$ を選択し，同符号ならば $c_{i'j} = -1$ とおき，異符号ならば $c_{i'j} = 1$ とおく．

STEP 4: $k = i$, $k = i'$ 以外の kに対し，$c_{kj} = 0$ とおく．**STEP 2〜4** によって行列の第 j 列が生成される．

STEP 5: すべての係数がペアリングされていれば，終了する．そうでなければ，j をインクリメント $(j \leftarrow j+1)$ して，**STEP 2**へ．

4. 遺伝的アルゴリズム

今回用いる GA は，Fig. 1 に示されるように，選択，交差，突然変異オペレーションからなる単純 GA である．本論文では，個体は**遺伝子形**と呼ばれる整数列で表現されており，その中の 1 つの整数を**遺伝子**と呼ぶ．GA と探索問題は個体の遺伝子形と適応度と呼ばれる評価値によって結び付けれる．ここでは，係数のペアリング情報を遺伝子形で表し，設計された誤差 FB 回路の性能 (雑音利得 G) によって適応度が計算される．

なお，2 つの係数 x_r, x_s のペアリングは，同符号で同値 $x_r = x_s$ のときは (x_r, x_s) と書き，異符号で同値 $x_r = -x_s$ の場合は $(x_r, -x_s)$ と書く．これらを**表現形**と呼ぶ．

- **初期集団の生成**

  ⇓
- **選択 (selection)**

  ⇓
- **交差 (crossover)**

  ⇓
- **突然変異 (mutation)**

  ⇓
- **次世代の形成**

  ⇓
- **終了判定**　Yes: **終了**, No: **選択へ**

Fig. 1 The process of simple genetic algorithm

4.1 各オペレータの設定

初期集団の生成: N_P 個体をランダムに発生させる．

選択: 個体 I_k $(k = 1, 2, \cdots, N_P)$ の選択確率 $P_S(I_k)$ は

$$P_S(I_k) = \frac{F(I_k)}{\sum_{l=1}^{N_P} F(I_l)} \tag{14}$$

と計算する．ただし，$F(I_k)$ は I_k の適応度．このような選択方法をルーレット選択という．

交差: ある遺伝子 l_C から最後の (一番右の) 遺伝子までを確率 P_C で交換する．l_C は等確率で決定される．このような交差手法を一点交差という．

突然変異: ある遺伝子 l_M を確率 P_M で等確率で別の遺伝子に変換する．ただし，l_M は等確率で決定される．

終了判定: (a) すべての染色体が一致した場合，(b) 50 世代解の向上がない場合，(c) 400 世代まで到達した場合，終了する．

4.2 遺伝子形へのコーディング方法

係数のペアリングを遺伝子形へ変換する手順を次に示す．

STEP 1: N 個の係数 x_1, x_2, $\cdots$ x_N に対して，相対番号 $x_1^{(1)}$, $x_2^{(2)}$, $\cdots$ $x_N^{(N)}$ を付ける．

STEP 2: 相対番号「1」の係数をとり除き，残った係数に対して再番号付けを行う．

STEP 3: **STEP 2** で選ばれた係数とペアを組む係数 (相対番号 k) を選択し，同符号のペアならば遺伝子「k」とし，異符号ならば遺伝子「$-k$」とする．選択された係数を取り除き，残った係数に対して再番号付けを行う．

STEP 4: すべての係数がペアリングされているならば，**STEP 5**へ．そうでなければ，**STEP 2**へ．

STEP 5: 得られた遺伝子を得られた順に左から並べて「遺伝子形」を生成する．

4.3 適応度の計算

誤差 FB 回路の設計と GA による係数のペアリング問題の解法は，適応度の計算によって結び付けられている．適応度計算ルーチンでは，ペアリング情報は制約行列 $\boldsymbol{C}$ で表現されている．次の **STEP 1〜6** により，係数のペアリング情報 (個体に相当する) に適応度が与えられる．

STEP 1: GA ルーチンから係数のペアリング情報を得る．

STEP 2: **3.2** の手順に従って，ペアリング情報から制約行列 $\boldsymbol{C}$ を生成する．

STEP 3: 制約行列 $\boldsymbol{C}$ に基づいて，与えれた制約条件下での最適誤差 FB 係数を式 (13) より設計する．

STEP 4: 設計された誤差 FB 係数を式 (3) に代入して，雑音利得 G を計算する．

STEP 5: 雑音利得 G を用いて，適応度

$$F = -G + G_{max} \tag{15}$$

を計算する．ただし，G_{max} は雑音利得の最大値である．

STEP 6: GA ルーチンへ適応度 F を返す．

以上の操作を必要な個体数だけ繰り返す．

5. 設計例

誤差信号の自己相関係数が次のように与えれる 2 次元巡回形ディジタルフィルタを考える．

$$\begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} q_{00} & q_{0,-1} & q_{0,-2} & q_{0,-3} \\ q_{-1,0} & q_{-1,-1} & q_{-1,-2} & q_{-1,-3} \\ q_{-2,0} & q_{-2,-1} & q_{-2,-2} & q_{-2,-3} \\ q_{-3,0} & q_{-3,-1} & q_{-3,-2} & q_{-3,-3} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 100.1580 & 94.4936 & 80.1316 & 60.7896 \\ 94.9081 & 89.6575 & 76.1359 & 57.6909 \\ 80.9028 & 76.4129 & 64.9520 & 49.1618 \\ 61.7975 & 58.3034 & 49.6501 & 37.6083 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} q_{1,-1} & q_{1,-2} & q_{1,-3} \\ q_{2,-1} & q_{2,-2} & q_{2,-3} \\ q_{3,-1} & q_{3,-2} & q_{3,-3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q_{-1,1} & q_{-1,2} & q_{-1,3} \\ q_{-2,1} & q_{-2,2} & q_{-2,3} \\ q_{-3,1} & q_{-3,2} & q_{-3,3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 89.4680 & 75.8372 & 57.6412 \\ 76.2693 & 64.6599 & 49.2631 \\ 58.2742 & 49.4352 & 37.8021 \end{bmatrix}$$

ここでは，誤差 FB 回路の次数を $(M_1, M_2) = (3, 3)$ として設計を行った．無制約の (係数のペアリングを行わない) 場合と対称・奇対称のペアリングの雑音利得 G が Table 1 に示されている．

Table 1 Design results in ref.2) .

	無制約	対称	奇対称
G	0.2457	0.4305	0.5720

次に提案手法を用いて，対称・奇対称と同じパラメータ数 (同じ次数) で回路設計を行う．$P_C = 0.8$ とした場合の結果を Table 2 に示す．最も雑音利得が小さいのは，$N_P = 800, P_C = 0.8, P_M = 0.05$ で設計された回路である．この回路は，従来の対称・奇対称と比べてかなり雑音利得が小さくなっており，無制約の場合と比べても大きな差がない程の極めて優れた特性をもっている．このとき，誤差 FB 係数は次のように設計された．

Table 2 Design results using proposed method.

N_P	$P_M = 0$		$P_M = 0.05$	
	G	計算時間	G	計算時間
50	0.4294	7.20 [s]	0.4374	9.89 [s]
100	0.3696	25.37 [s]	0.3577	27.13 [s]
200	0.4264	85.74 [s]	0.2784	127.81 [s]
400	0.3882	82.99 [s]	0.3497	94.42 [s]
800	0.2794	316.93 [s]	0.2603	508.66 [s]

$$\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -1.2593 & 0.3985 & 0.0549 \\ -1.2593 & 1.0000 & -0.0247 & -0.1064 \\ 0.3985 & 0.1813 & -0.1813 & -0.1064 \\ -0.0247 & -0.0549 & -0.2175 & 0.2175 \end{bmatrix}$$

6. むすび

誤差 FB 回路のパラメータ数を効率的に削減するために GA による係数のペアリング方法について検討し，ペアリング情報の遺伝子形へのコーディング方法を示した．また，Lagrange の未定乗数法による回路設計を行うためにペアリング情報を行列表現し，その生成アルゴリズムを示した．提案手法では雑音利得を評価値として最適化を行い，無制約の場合と比較して約半分のパラメータ数で従来 (対称・奇対称のペアリング) よりも優れた誤差 FB 回路が設計できることを確認した．

参考文献

1) T. I. Laakso and I. O. Hartimo, "Noise Reduction in Recursive Digital Filters Using High-order Error Feedback", IEEE Trans, Signal Processing, vol.40, no.5, pp.1096-1107, May 1992.

2) T. Hinamoto, S. Karino, N. Kuroda and T. Kuma, "Error Spectrum Shaping in Two-Dimensional Recursive Digital Filters", IEEE Trans, Circuits Syst. , vol.46, no.10, pp.1203-1215, Oct. 1999.

3) D. E. Goldberg, "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", Addison Wesley, 1989.