

# 最適時間一斉射撃アルゴリズムの 1ビット・セルラ・オートマトン上での実現

西村 順<sup>†</sup>

曾我部 崇<sup>††</sup>

梅尾 博司<sup>†††</sup>

<sup>†</sup> 株式会社 メガチップス

<sup>††</sup> 大阪電気通信大学 大学院 情報工学専攻

<sup>†††</sup> 大阪電気通信大学 総合情報学部 情報工学科  
大阪電気通信大学 大学院 情報工学専攻

**概要**  $n$  個のセルからなるセル空間の同期を  $2n-2$  ステップの最適時間で実現するセルラ・オートマトン (CA) は従来から数多く提案されている。これらのセルラ・オートマトンにおいて、隣接するセル間の1ステップ当たりの通信量は  $O(1)$  ビットであるが、セル間通信量は有限状態記述というオートマトンの定義には明示的に現れず、セル間通信量に関する研究はこれまであまりなされていない。本稿では、1ステップあたりのセル間通信量を1ビットに制限したセルラ・オートマトン・モデル CA<sub>1-bit</sub> を定義し、CA<sub>1-bit</sub> 上で最適時間で動作する一斉射撃アルゴリズムを提案する。セルの内部状態数は78である。すでに正当性が示されている Waksman のアルゴリズム [7,8] (セル間通信量は  $O(1)$  ビットである) をベースとしたもので、その正当性は明らかである。

## A Design of Optimum-Time Firing Squad Synchronization Algorithm on 1-Bit Cellular Automaton

Jun NISHIMURA<sup>†</sup>, Takashi SOGABE<sup>††</sup>, and Hiroshi UMEO<sup>†††</sup>

<sup>†</sup> Mega Chips Co., LTD.

<sup>††</sup> Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering

<sup>†††</sup> Osaka Electro-Communication Univ., Faculty of Information Science and Technology

**Abstract** In the long history of the study of cellular automata, the amounts of bit-information exchanged at one step between neighboring cells have been assumed to be  $O(1)$ -bit. In this paper we introduce a new class of cellular automata, CA<sub>1-bit</sub>, whose inter-cell communication is restricted to 1-bit and propose an optimum-time ( $2n-2$ )-step firing squad synchronization algorithms for  $n$  cells on CA<sub>1-bit</sub>. The number of internal states in each cell is 78 and the total number of transition rules is 208. The algorithm we propose is based on Waksman's optimum-time algorithm which has been shown valid for any  $n$ .

### 1 はじめに

一斉射撃問題 [1]-[8] とは以下のように定義される。 $n$  個のセルからなるセル列を考え、左端のセルを将軍、残りのセルを兵士と呼ぶ。時刻  $t=0$  に将軍が「準備が出来たら射撃せよ」という命令を出した後、未来のある時刻に全てのセルが一斉にひとつの状態へ遷移するまでの遷移規則を定める問題である。

この問題は、1957年 J. Myhill によって提案され、1964年、E. F. Moore[4] によって広く知らされた。最初にこの問題の解を示したのは、J. McCarthy と M. Minsky[3] で、彼らのアルゴリズムは  $n$  個のセル列を約  $3n$  ステップ、13個の内部状態を用いて同期させるものであった。それ以降の研究は所要時間と内部状態数を減らす方向に進み、1966年、A. Waksman[8] によって内部状態数 16、 $2n-2$  ステップの最適時間で同期させるアルゴリズムが発表された。彼のアルゴリズムは、E. Goto のアルゴリズムと並び世界で最初に発表された最適時間一斉射撃アルゴリズムであったが、誤りを含んでいたためセル数  $n$  の値によって正しく同期がとられなかった。後に H. Umeo, T. Sogabe, Y. Nomura ら [7] によって遷移規則に含まれる全ての誤りが修正され、その正当性を証明されている。

さらに、状態数を削減したアルゴリズムの設計は続けられ、1967年 R. Balzer[3] によって、状態数 8 のアルゴリズム、1987年

J. Mazoyer によって状態数 6 のアルゴリズムが提案されて現在に至っている。

また、セルラ・オートマトン (Cellular Automaton 以下 CA) の機能に制限を加えた計算モデル上での一斉射撃アルゴリズムの研究も行われている。Mazoyer[2], Umeo[6] は、従来の研究では考えられていなかったセル間通信量に着目し、隣接する2つのセル間の通信量を双方向1ビットに制限する CA モデル CA<sub>1-bit</sub> を提案した。そして Mazoyer[2] は、CA<sub>1-bit</sub> 上で一斉射撃問題を考察し、セル間通信量を1ビットに制限しても最適時間で動作する状態数 56 の一斉射撃アルゴリズムを示した。しかし、このアルゴリズムの正当性は論文において示されず、ある自然数  $n_0$  以下の自然数について正しく同期することをコンピュータシミュレーションによって確認されているに過ぎない。現在 CA<sub>1-bit</sub> 上でその正当性が明らかである一斉射撃アルゴリズムは存在しない。

本稿では、1ステップあたりのセル間通信量を1ビットに制限したセルラ・オートマトン・モデル CA<sub>1-bit</sub> を定義し、CA<sub>1-bit</sub> 上で最適時間で動作する一斉射撃アルゴリズムを提案する。セルの内部状態数は78である。すでに正当性が示されている Waksman のアルゴリズム [7,8] (セル間通信量は  $O(1)$  ビットである) をベースとしたもので、その正当性は明らかである。

## 2 CA および CA<sub>1-bit</sub> の定義

CA は、セルと呼ばれる有限オートマトンを通信線によって一次元アレイ状に多数接続したものである。CA を構成するセルは両端を除き全て同一構造を持つ有限オートマトンである。時刻  $t$  における任意のセルは、隣接セルの状態と自身の状態を参照し、あらかじめ定められた規則に従って次の自身の状態を決定する。このセルの動作を状態遷移と呼び、全てのセルの状態遷移は同期して行われる。ここで、1 回の状態遷移にかかる単位時間を 1 ステップと定める。セル間通信量を双方向 1 ビットに制限した CA<sub>1-bit</sub> 上でのセルは、隣接セルから 1 ステップごとに 0 または 1 の 2 種類の情報しか受け取れない。内部状態についても上記の CA と同様に有限個である。

## 3 Waksman のアルゴリズム

図 1 に Waksman の解を示す。この図は 1 次元 CA の内部状態の遷移を時系列順に並べたもので、水平方向はセル空間、垂直方向は時間軸を表す。時刻  $t=0$  時の横線は初期状態、時刻  $t=2n-2$  時の横線は射撃状態を意味する。図中の線分は信号もしくは波と呼ばれ、着目したい内部状態の遷移状況を示したものである。ここではそれらの伝達の速さを傾きと呼び、例えば 3 ステップごとに 1 セル進む信号の傾きは  $\frac{1}{3}$  となる。

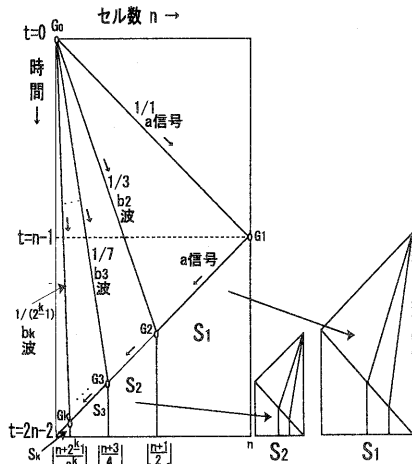


図 1 Waksman のアルゴリズム

$n$  個のセルを  $C_1, C_2, \dots, C_n$  と表す。このとき、 $C_1$  は将軍状態、 $C_2, C_3, \dots, C_n$  は静止状態である。ここで、 $C_1$  に配置される将軍を  $G_0$ 、 $G_0$  が管理するセル列を  $S_0$ 、 $S_0$  上のセル数を  $|S_0|$  と表記する。 $G_0$  は、時刻  $t=0$  時に傾き  $\frac{1}{1}$  の a 信号、傾き  $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{2^k-1}, \dots$  ( $k$  は  $2 \leq k \leq \lfloor \log_2(2n-2) \rfloor$  を満たす自然数) の b 波群  $\{b_2, b_3, b_4, \dots, b_k, \dots\}$  を右向きに送出する。a 信号は右方向へ 2 セル分進むたび左方向に進む傾き  $\frac{1}{2}$  の r 信号を送出する。 $G_0$  より送出された任意の  $b_h$  ( $h$  は  $2 \leq h \leq k$  を満たす自然数) 波はこの r 信号と交差するたびに右方向に進行する。この  $b_k$  波の生成機構は後述する。

そして、a 信号は時刻  $t=n-1$  時に  $C_n$  上で将軍  $G_1$  を出現させた後、左向きに同じ傾きそのまま反射する。この後、a 信号は、 $b_2, b_3, b_4, \dots, b_k$  と交差し、その交差点に将軍  $G_2, G_3, G_4, \dots, G_k$  を出現させる。ここで  $G_0$  と同様に、a 信号の軌跡上に出現した将軍  $G_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) の管理する部分セル列を  $S_i$ 、 $S_i$  上のセル数を  $|S_i|$  と表記する。これらの部分セル列の個数はそれぞれ  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n+3}{4} \rfloor, \lfloor \frac{n+7}{8} \rfloor, \dots, \lfloor \frac{n+2^k-1}{2^k} \rfloor$  となる。 $k$  は  $k = \lfloor \log_2(2n-2) \rfloor$  なる自然数である。

ここで任意の  $i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) について次のことが言える。将軍  $G_i$  は、部分セル列  $S_i$  を独立して同期させる。

Waksman のアルゴリズムには次の 2 つの機構が重要な役割を果たす。

- (i) 無限個の b 波群  $b_2, b_3, \dots, b_k, \dots$  の生成
- (ii) セル空間上での二分分割  $G_2, G_3, \dots, G_k$  の探索、マーキング

まず、この Waksman の一斉射撃アルゴリズムを実現するために、各セルは次の 16 個の内部状態からなる状態集合  $D$  を持つ。すなわち、

$$D = \{Q, T, P_0, P_1, B_0, B_1, R_0, R_1, A_{000}, A_{001}, A_{010}, A_{011}, A_{100}, A_{101}, A_{110}, A_{111}\}$$

$Q$  は静止状態、 $T$  は射撃状態、 $P_0, P_1$  は将軍ならびに射撃準備状態、 $B_0, B_1$  は b 波群を表す状態、 $R_0, R_1$  は r 信号を表す状態、 $A_{xyz}, x, y, z \in \{0, 1\}$  は a 信号を表す状態である。

### ・ b 波群の生成機構

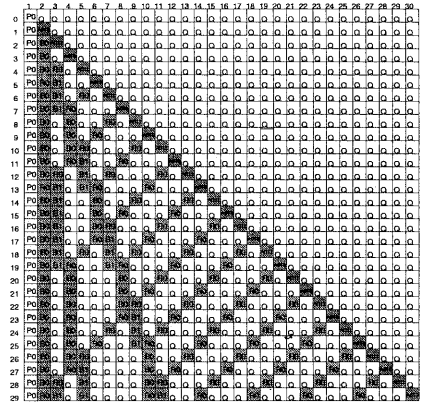


図 2 b 波群の生成

図 2 は Waksman のアルゴリズムを内部状態を用いて表現したものである。この図を用いて b 波群の生成機構を明らかにする。

まず、時刻  $t=0$  時にセル 1 上の  $P_0$  より送出された右向きに進む傾き  $\frac{1}{2}$  の a 信号に着目する。この信号は、状態  $A_{011}, A_{010}$  の 2 つの状態を用いて表現される。そのうち状態  $A_{010}$  で表現される a 信号は左方向に進む傾き  $\frac{1}{2}$  の r 信号を送出する。図中でこの r 信号は状態  $R_0$  で表現される。こうして、a 信号より次々に出される r 信号は、任意の  $C_p$  ( $p$  は  $1 \leq p \leq n$  を満たす自然数) 上を 4 ステップ周期で通過して  $b_2$  波と交差する。その結果  $b_2$  波は、ひとつのセル上に 3 ステップづつ滞在しながら移動するので、 $b_2$  波の傾きは  $\frac{1}{3}$  となる。

次に、 $b_2$  波に着目する。この波は状態  $B_0, B_1$  の 2 状態で表現される。図 2 のように、状態  $B_0, B_1$  は、 $b_2$  波が r 信号と交差するたびに、交互に出現する。このとき  $b_2$  波は、 $B_0$  によって表現される時に r 信号を通し、 $B_1$  によって表現される時に r 信号を遮る。従って、 $b_2$  波を通過した r 信号は周期 8 ステップで  $b_3$  と交差する。その結果、 $b_3$  波は 7 ステップづつ滞在しながら移動するように見えるので、 $b_3$  波の傾きは  $\frac{1}{7}$  となる。

よって、任意の  $b_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) と r 信号の交差周期を  $d_i$  ステップ ( $d_i$  は正の整数値) と表した場合、後続の  $b_{i+1}$  波と r 信号の交差周期  $d_{i+1}$  は以下の式で表される。

$$d_{i+1} = 2d_i \quad (1)$$

さらに、式 (1) を変形して、式 (2) を得る。ここで、 $d_2$  は、 $b_2$  波と r 信号の交差周期を意味する。

$$d_{i+1} = d_2 \cdot 2^{i-1} \quad (2)$$

ここで、 $d_2 = 4$  なので、式 (3) となる。

$$d_{i+1} = 4 \cdot 2^{i-1} = 2^{i+1} \quad (3)$$

式 (3) より,  $b_{i+1}$  波は  $r$  信号と  $2^{i+1}$  ステップ周期で交差するので,  $b_{i+1}$  波の傾きは  $\frac{1}{2^{i+1}-1}$  となる。以上の機構によって,  $b$  波群を生成し続けることが可能となる。

#### ・二分割点の探索, マーキング

任意の将軍  $G_i$  が  $a$  信号と  $b_i$  波の交差点に出現する場合を考える。  $G_i$  は,  $S_{i-2}$  の中央に出現し,  $S_{i-2}$  を  $|S_{i-1}|$  個のセルで構成される 2 つの部分セル列  $S_{i-1}$  に等分割する。このとき,  $G_i$  は,  $|S_{i-2}|$  が奇数値ならば 1 個のセルで,  $|S_{i-2}|$  が偶数値ならば 2 個のセルで表現される。以上より,  $G_i$  を表現するセル数を決定するため,  $|S_{i-2}|$  の 1 ビットの奇偶情報を用いる。この情報は  $a$  信号の添字  $x$  に格納されて  $G_i$  群の出現地点まで伝達される。

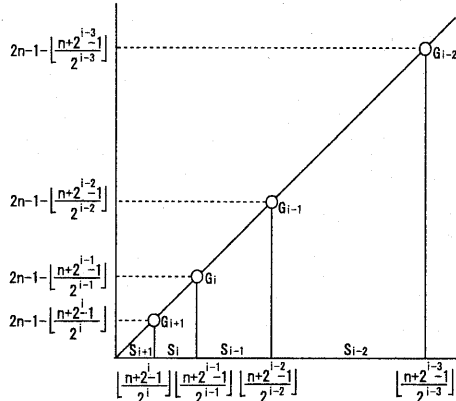


図 3 将軍の探索, マーキング

次に, 図 (3) より,  $S_i$  の射撃時間を計算する。まず,  $|S_i| = \lfloor \frac{n+2^i-1}{2^i} \rfloor$  なので,  $S_i$  の射撃時間  $\Delta t$  は式 (4) となる。

$$\Delta t = 2 \lfloor \frac{n+2^i-1}{2^i} \rfloor - 2 \quad (4)$$

さらに,  $G_i$  の出現時刻  $t_{G_i}$  は,

$$t_{G_i} = 2n - 1 - \lfloor \frac{n+2^{i-1}-1}{2^{i-1}} \rfloor \quad (5)$$

なので,  $X = \lfloor \frac{n+2^{i-1}-1}{2^{i-1}} \rfloor$  とおくと, 時刻  $t=0$  時から  $S_i$  の射撃時刻までの時間  $t_{S_i}$  は式 (6) となる。

$$t_{S_i} = 2n - 3 - X + 2 \lfloor \frac{X+1}{2} \rfloor \quad (6)$$

ここで,  $X$  が奇数のとき  $t_{S_i} = 2n - 2$ ,  $X$  が偶数のとき,  $t_{S_i} = 2n - 3$  となる。以上より,  $|S_{i-1}|$  が偶数である場合,  $S_{i-1}$  は, 全体の射撃時間よりも 1 ステップ早く射撃を終えてしまうことがわかる。そのため, Waksman のアルゴリズムでは,  $S_i$  の同期の開始を 1 ステップ遅らせてこの問題を解決している。このような遅延処理を行うことで, すべての  $S_i$  の射撃時刻を  $t = 2n - 2$  時に合わせることができる。このとき, 遅延処理をしない将軍は  $P_0$ , 遅延処理をする将軍は  $P_1$  を用いてそれぞれ表現する。そして, ここで用いられる  $|S_{i-1}|$  の奇偶性を示す 1 ビットの情報は,  $a$  信号の添字  $z$  に格納されて  $G_i$  の出現地点まで伝達される。

以上より, Waksman のアルゴリズムにおいて, 任意の将軍  $G_i$  を生成するためには,  $|S_{i-2}|, |S_{i-1}|$  の奇偶情報を必要とすることがわかる。

#### 4 CA<sub>1</sub>-bit 上のアルゴリズム

Waksman のアルゴリズムは, 16 種類の状態を識別するため 4 ビットのセル間通信量を必要とする。従って, CA<sub>1</sub>-bit 上

でこのアルゴリズムを実装する場合, セル間通信量を 1 ビットに抑える工夫が必要になる。ここでは, Waksman のアルゴリズムと同様の機構を実現するための手法を述べる。

#### ・ $|S_{i-1}|$ の奇偶情報の伝達機構

Waksman のアルゴリズムにおいて,  $b_i$  波は 2 回に 1 回の割合で  $r$  信号を通過させる機構を持つ。この機構はまた,  $b_i$  波が  $S_{i-1}$  の奇偶情報を数えながら伝達しているという見方も出来る。

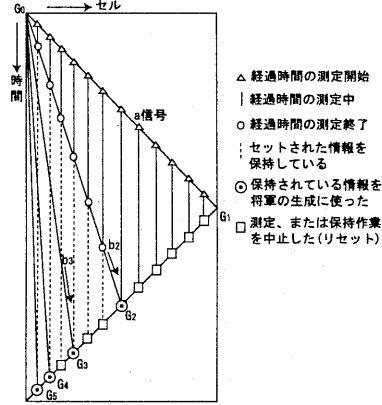


図 4  $b_i$  波による奇偶情報の取得, およびその保持

そのため, CA<sub>1</sub>-bit 上でこの機構を実現すれば, 将軍を生成するのに必要な 1 ビットの情報を伝達できるようになる。

では,  $|S_{i-1}|$  の奇偶情報を伝達する方法を示す。この情報を取得するために,  $a$  信号と  $b_2$  波の傾きに着目する。  $a$  信号と  $b_2$  波の傾きの差は 2 なので, 任意のセル  $C_p$  上で  $a$  信号が通過してから,  $b_2$  波が来るまでの時間  $\Delta t$  は,

$$\Delta t = 2p + s \quad (s \text{ は, 正の整数値をとる定数である}) \quad (7)$$

となる。このとき,  $\Delta t$  を 4 で割った余りは,

$$s \text{ が奇数のとき } \Delta t \bmod 4 = 1 \text{ または } 3 \quad (8)$$

$$s \text{ が偶数のとき } \Delta t \bmod 4 = 0 \text{ または } 2 \quad (9)$$

となる。よってセル  $C_p$  は,  $a$  信号の通過後に 4 種類の内部状態を逐次的に繰り返し遷移させると,  $b_2$  が到着した時に部分セル列内の  $p$  の奇偶性を判断することができる。そして  $C_p$  は一度設定された奇偶情報を図 4 に示すように保持しつづける。その後,  $b_i$  波がそのセル上で  $G_i$  を出現させる場合にその情報を使用する。以上のようにして,  $|S_{i-1}|$  の奇偶情報を伝達することが可能となる。

#### ・ $|S_{i-2}|$ の奇偶情報の伝達機構

次の命題が成立する。

- (i)  $b_i$  波が  $C_p$  上に滞在する時間の前半で  $a$  信号と交差すると,  $G_i$  を表現するセルは一列である。
- (ii)  $b_i$  波が  $C_p$  上に滞在する時間の後半で  $a$  信号と交差すると,  $G_i$  を表現するセルは二列である。

この命題の正当性を示す。まず,  $b_i$  波と  $a$  信号の交差を考える。 $b_i$  波は  $C_i$  上に, 時刻  $t = (2^i - 1)i - 2^i$  時  $\sim t = (2^i - 1)i - 2$  時の間滞在する。そして,  $a$  信号は,  $C_{i+1}$  上に時刻  $t = 2n - 2 - i$  時に出現する。

ここで,

$$X = \lfloor \frac{n+2^{i-2}-1}{2^{i-2}} \rfloor \quad (10)$$

$$i = \lfloor \frac{X+1}{2} \rfloor \quad (11)$$

とおく。  $X$  は,  $|S_{i-1}|$  上のセル数を表す。また,  $b_i$  波の滞在時間のちょうど中間である時刻  $t = (2^i - 1)i - 2^i + 2^{i-1} - 1$  時

と a 信号の  $C_{i+1}$  上への到着時刻  $t = 2n - 2 - i$  時の差を  $D$  と置いて以下のように表す.

$$D = 2n - 2^i p + 2^{i-1} - 1 \quad (12)$$

まず  $X$  が奇数の場合,  $X = 2p + 1$  とおくと,

$$\left\lfloor \frac{n + 2^{i-2} - 1}{2^{i-2}} \right\rfloor = 2p + 1 \quad (13)$$

以下のように変形する

$$\frac{n + 2^{i-2} - 1}{2^{i-2}} = 2p + 1 + \alpha \quad (14)$$

( $\because 0 \leq \alpha < 1$ )

$$\therefore 2n = 2^i p + 2^{i-1} \alpha + 2 \quad (15)$$

式 (15) を式 (12) に代入して, 式 (16) を得る.

$$D = 2^{i-1} \alpha - 2^{i-1} + 1 \quad (16)$$

式 (16) において  $D$  は常に負の値ではない. しかし, 式 (16) の成立する  $b_i$  の滞在時間の範囲には, 実際には a 信号の来ないタイミングである時刻  $t = (2^i - 1)i - 2^i + 2^{i-1} - 1$  時を含む. 従って, 命題 (i) は成立する.

また,  $X$  が偶数の場合,  $X = 2p$  とおくと,

$$\left\lfloor \frac{n + 2^{i-2} - 1}{2^{i-2}} \right\rfloor = 2p \quad (17)$$

以下のように変形する

$$\frac{n + 2^{i-2} - 1}{2^{i-2}} = 2p + \alpha \quad (18)$$

( $\because 0 \leq \alpha < 1$ )

$$\therefore 2n = 2^i p + 2^{i-1} \alpha - 2^{i-1} + 2 \quad (19)$$

式 (19) を式 (12) に代入して, 式 (20) を得る.

$$D = 2^{i-1} \alpha + 3 \quad (20)$$

式 (20) において  $D$  は常に正の値をとる. よって命題 (ii) も成立する. 以上より,  $CA_{1\text{-bit}}$  上においても, 将軍  $G_i$  の生成に必要な 2 ビットの奇偶情報を  $b_i$  に伝達させることができる.

以上の結果を次の補題, 定理としてまとめる.

**[補題 1]**  $CA_{1\text{-bit}}$  上で  $b$  波群  $\{b_2, b_3, b_4, \dots\}$  を生成することが可能である. 必要な内部状態数は 35 である.

**[補題 2]**  $CA_{1\text{-bit}}$  上で Waksman のアルゴリズムと同じタイミングで将軍  $G_1, G_2, \dots, G_k$  を生成することが可能である.

**[定理]** 任意の自然数  $n$  に対して,  $n$  個のセルからなるセル空間を  $2n - 2$  ステップで一斉射撃する  $CA_{1\text{-bit}}$  が存在する. 必要な内部状態数は 78 である.

図 5 は Waksman のアルゴリズムの実行結果, 図 6 は本アルゴリズムの実行結果である.

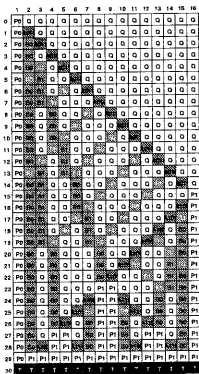


図 5 Waksman のアルゴリズム (セル数 16)

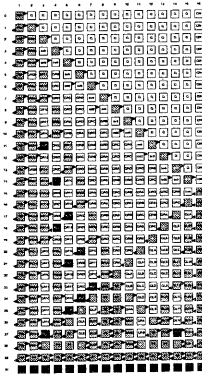


図 6 本アルゴリズム (セル数 16)

図 6 から,  $CA_{1\text{-bit}}$  上でも,  $b$  波群および各将軍状態が, 図 5 と同じタイミングで生成されている様子が伺える.

## 5 おわりに

本稿では,  $CA_{1\text{-bit}}$  上で一斉射撃問題を考察し, セル間通信量を 1 ビットに制限したモデル上でも  $n$  個のセルからなるセル空間の同期を  $2n - 2$  ステップの最適時間で実現できることを明らかにした. セルの内部状態数は 78 である. 我々のアルゴリズムは, すでに正当性が示されている Waksman のアルゴリズムをベースとしたもので, その正当性は明らかである. さらに, シミュレータを用いて,  $n=2 \sim 10000$  まで最適時間で一斉射撃が正しくなされることを確認した.

## 参考文献

- [1] R. Balzer, "An 8-state minimal time solution to the firing squad synchronization problem", *Information and Control*, 10, pp. 22-42, (1967).
- [2] J. Mazoyer, "On optimal solution to the firing squad synchronization problem", *Theoretical Computer Science*, 168, pp. 367-404, (1996).
- [3] M. Minsky, "Computation: Finite and infinite machines", Prentice Hall, pp. 28-29, (1967).
- [4] E. F. Moore, "The firing squad synchronization problem", *Sequential Machines (E. F. Moore), Selected Papers*, Addison-Wesley Reading, MA., pp. 213-214, (1964).
- [5] 西村, 曾我部, 梅尾, "1 ビット・セルオートマトン上での最適時間一斉射撃アルゴリズムの設計", *情報処理学会第 60 回 (平成 12 年前期) 全国大会講演論文集 (1)* pp. 189-190, (2000).
- [6] H. Umeo, "A design of cellular algorithms for 1-bit inter-cell communications and related cellular algorithms", *Proc. of MCU'98*, Vol. 1, pp. 210-227, (1998).
- [7] H. Umeo, T. Sogabe, and Y. Nomura, "Correction, Optimization and Verification of Transition Rule Set for Waksman's Firing Squad Synchronization Algorithm", *Proc. of Fourth International Conference on Cellular Automata for Research and Industry*, Karlsruhe, 4-6, October, (2000).
- [8] A. Waksman, "An optimum solution to the firing squad synchronization problem", *Information and Control*, 9, pp. 66-78, (1966).