数理モデル化と問題解決　32－4
（２０００．１１．２１）

# 二レベル囚人のジレンマゲームの考案と解析

松本 光崇

東京工業大学大学院 社会理工学研究科
価値システム専攻 博士後期課程
E-mail: matumoto@valdes.titech.ac.jp

概要

本稿では「囚人のジレンマ」的状況について考察し，囚人のジレンマを回避するための新しいアプローチとして二レベル囚人のジレンマを考える．これは従来の形で一つのゲームに注目するだけでなく，異なるレベルにある複数のゲームの間の相互関係を考えるものである．例えば，集団の中でのエージェント間のゲームと，集団を単位とした集団同士の間のゲームとが存在し，それらのゲームが相互に関係を持つことが考えられる．このような複数のゲームが相互作用する状況を記述するゲーム論的な枠組みとして「階層ゲーム」を定式化し，その上で本稿で提示する二レベル囚人のジレンマゲームを分析し，そこから得られるインプリケーションについて考察する．

# Formulation and Analysis of Two-level Prisoners' Dilemma

Mitsutaka Matsumoto

Department of Value and Decision Science,
Graduate School of Decision Science and Technology,
Tokyo Institute of Technology

Abstract

In this paper, I would focus on the prisoners' dilemma to consider interactions among agents. An original approach named two-level prisoners' dilemma is proposed to solve or to control such situations. The approach considers games of other levels and interactions among the games. For example, it considers a game among groups as well as games within the groups. To formulate the interactions among games, I would introduce a game theoretical framework called hierarchy games. Under the framework, I would analyze the two-level prisoner's dilemma games and discuss its implications.

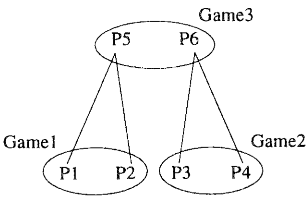


図 1: 二レベル囚人のジレンマゲーム

## 1 はじめに

囚人のジレンマモデルは，複数の主体が各自の合理性を追求する「社会的状況」における個人合理性と全体合理性の不一致を簡明かつ明瞭に表現するモデルであり，囚人のジレンマ状況で主体が協調行動を選択する可能性を探る試みは，マルチエージェント系の研究を含めて様々な分野で今日までになされてきた．

本稿では囚人のジレンマを考える上で「複数のゲームの間の相互作用」という側面に焦点をあて，ゲームが階層状に配置して階層中の上位のゲームと下位のゲームとが影響し合うことによる協力と対立の可能性について考察する．次節でこのような状況の一つの例として二レベル囚人のジレンマゲームを定式化し，第 3 節で，より一般的にゲーム間の相互作用を記述するゲーム理論的枠組みとして「階層ゲーム」の定式化を行う．第 4 節で二レベル囚人のジレンマゲームの分析を行い，第 5 節で結論をまとめる．

## 2 二レベル囚人のジレンマモデル

### モデルの構造

単純な例として，図 1のように，二つの国家 (P5,P6) があるとし，両国共に二人の国民から成っている (国家 P5 は国民 P1,P2 から，国家 P6 は国民 P3,P4 から構成されている) という状況を考える．ここで三つのゲームを考える．すなわち二つの国内ゲーム (Game1 と Game2) と国家間ゲーム (Game3) である．三つのゲームのいずれも囚人のジレンマ型のゲームであると仮定し，その相互関係によってどのような均衡が現れるか，特に Game3 の影響によって P1,P2,P3,P4 に協調が現れる可能性について以下で検証する．

### 利得構造

Game1 と Game2 は同一の利得構造を持つ囚人のジレンマゲームであると仮定する．その利得行列は表 1とする．

| | C | D |
|---|---|---|
| C | $R_1, R_1$ | $S_1, T_1$ |
| D | $T_1, S_1$ | $P_1, P_1$ |

ただし $T_1 > R_1 > P_1 > S_1$，$2R_1 > T_1 + S_1$.

表 1: Game1 と Game2 の利得行列

| | C | M | D |
|---|---|---|---|
| C | $R_3, R_3$ | $\frac{1}{2}(R_3+S_3), \frac{1}{2}(R_3+T_3)$ | $S_3, T_3$ |
| M | $\frac{1}{2}(R_3+S_3)$<br>$\frac{1}{2}(R_3+T_3)$, | $\frac{1}{4}(T_3+P_3+R_3+S_3)$<br>$\frac{1}{4}(T_3+P_3+R_3+S_3)$, | $\frac{1}{2}(T_3+P_3)$<br>$\frac{1}{2}(S_3+P_3)$, |
| D | $T_3, S_3$ | $\frac{1}{2}(T_3+P_3), \frac{1}{2}(S_3+P_3)$ | $P_3, P_3$ |

ただし $T_3 > R_3 > P_3 > S_3$，$2R_3 > T_3 + S_3$.

表 2: Game3 の利得行列

Game3 についてはプレイヤーは通常の協調行動 C と裏切り行動 D に加えて中間の手 M を持つとする．M 行動の利得は C 行動と D 行動の平均としている (表 2).

### ゲーム間の相互関係 (行動制約)

以上で三つの独立なゲームを定義したことになるので，以下本稿の特徴であるゲーム間の相互関係を設定する．ゲーム間の相互作用は二つの要素によって定式化される．

第一の要素である行動制約について，国家 P5,P6 は常に C,D,M の三つの行動選択肢を持つわけではなく，行動選択肢の範囲は国内ゲームの結果によって制約されると仮定する．具体的には，国民エージェントの国内ゲームにおける総利得の大きさによって左右されるとし，Game1 の結果と P5 の行動選択肢 $S_5$ との関係を表 3のように設定する．Game2 と P6 の行動選択肢にも同様の関係が成り立つとする．

### ゲーム間の相互関係 (利得配分)

ゲーム間の相互関係の第二の要素は利得配分である．P5 の Game3 における利得を $x$ とすると，$x$ は P5 自身の利得であるから P5 は $x$ を最大化しようとする．同時に $x$ は P1 と P2 に配分される．P6 の利得についても同様であり P3 と P4 に配分される．よって国民エージェントの利得は，国内ゲームでの利得と国家エージェントの利得からの配分との和である．このことから国民エージェントは国家エージェントが Game3 で優位にゲームが行えるよう協調する誘因が与えられる．ここでは配分

| P1 | P2 | $S_5$ |
|---|---|---|
| C | C | $\{C, M, D\}$ |
| C | D | $\{C, M\}$ |
| D | C | $\{C, M\}$ |
| D | D | $\{C\}$ |

表 3: Game1 と P5 の相互関係 (行動制約)

| P5 | P6 | P1 : P2 |
|---|---|---|
| C | C | 0.5 : 0.5 |
| C | D | 0.5 : 0.5 |
| D | C | 0.5 : 0.5 |
| D | D | 0.5 : 0.5 |

表 4: P5 の利得の P1 と P2 への配分

比については Game3 のゲームの結果に関わりなく国家エージェントの利得は等しく国民エージェントに配分されるとする．

## 3 階層ゲームモデル

本稿で定式化する階層ゲームの枠組みは，上位ゲームと下位ゲームが「行動制約」と「利得配分」の二つの要素によって相互作用することを想定している．この枠組みはアイデア自体は Hausken によって提案されている [Hausken 95]．本稿ではこの Hausken のアイデアを踏襲しているが，Hausken の定式化では曖昧であった部分を厳密なものにして本稿独自の定式化を行なう．

### 3.1 階層ゲームの定式化

$$\Lambda = (J, \{G\}) \tag{1}$$

1. $J$ は階層を表現する木である．
2. $\{G\}$ は戦略型ゲームの集合であり，各ゲームは木 $J$ の節点に対応する．

各要素 $G_x \in \{G\}$ は戦略型ゲームであるが，親ゲームとの相関を記述するために通常の三つの要素に加えて五つの要素を加える．

$$G_x = (N_x, \{S_i\}_{i\in N_x}, \{f_i\}_{i\in N_x}, G_s, p_{sj}, g_x, Y_x, Z_x) \tag{2}$$

1. $N_x$ はプレイヤーの集合．
2. $S_i$ はプレイヤー $i$ の行動選択肢．
3. $f_i : S \rightarrow R$ はプレイヤー $i$ の利得関数．ただし $S = S_1 \times \cdots \times S_{|N_x|}$．(この利得の他に後述する親ゲームプレイヤーからの利得配分が加わる)
4. $G_s$ は $G_x$ の親ゲーム (親節点)． $G_x$ が最上位ゲームであれば $G_s$ は空であり，残りの要素の記述は不要である．
5. $p_{sj}$ は $G_s$ の一プレイヤーであり， $G_x$ と相関を持つ親プレイヤーである．
6. $g_x$ は利得配分関数であり， $S_{p_{s1}} \times \cdots \times S_{p_{sn}}$ (親ゲーム $G_s$ の結果) から $|N_x|$ 次元ベクトルへの関数である．ベクトルは配分比を表すため要素の和は 1 とする．
7. $Y_x$ は $G_x$ から $p_{sj}$ への行動制約を表し， $S_1 \times \cdots \times S_{|N_x|}$ から $2^{S_{sj}}$(親プレイヤーの行動選択肢 $S_{sj}$ の部分集合の全て) への関数．
8. $Z_x$ は $G_x$ の結果を知ることが出来る上位ゲームプレイヤーの集合．階層ゲームを展開型で記述するときには情報分割を決める．

## 4 二レベル囚人のジレンマの解析

### 4.1 ナッシュ均衡点の解析

**P5 と P6 の支配戦略**

P5 と P6 は行動選択肢の中で裏切りに近いものが支配戦略になる．すなわち，

1. 行動選択肢が {D,M,C} であれば，D が支配戦略．
2. 行動選択肢が {M,C} であれば，M が支配戦略．
3. 行動選択肢が {C} であれば，C を選択．

**P1,P2,P3,P4 の行動**

P5 と P6 は支配戦略を選択することを仮定する．

表 5は P1 の利得行列である．利得構造は対称であるため他のプレイヤーの利得行列は省略する．(1) から (6) までの数字は列番号を示している．

4 人の下位プレイヤーが選択する行動の組み合わせとしては 6 つのパターンがある．1)‘CCCC’: 4 人全員が協力する．2)‘DDDD’: 4 人全員が裏切る．3)‘CCCD’: 4 人のうち 3 人が協力する．4)‘CDDD’: 4 人のうち 1 人だけが協力する．5)‘(CC)(DD)’: 同じ国の 2 人が協力する．6)‘(CD)(CD)’: 各国から 1 人ずつ協力を選択する．

| P3,P4→ | (C, C) | |
|---|---|---|
| P1↓ P2→ | C (1) | D (2) |
| C | $R_1+\frac{P_3}{2}$ | $S_1+\frac{P_3+S_3}{4}$ |
| D | $T_1+\frac{P_3+S_3}{4}$ | $P_1+\frac{S_3}{2}$ |

| P3,P4→ | (C,D) or (D,C) | |
|---|---|---|
| P1↓ P2→ | C (3) | D (4) |
| C | $R_1+\frac{T_3+P_3}{4}$ | $S_1+\frac{T_3+P_3+R_3+S_3}{8}$ |
| D | $T_1+\frac{T_3+P_3+R_3+S_3}{8}$ | $P_1+\frac{R_3+S_3}{4}$ |

| P3,P4→ | (D, D) | |
|---|---|---|
| P1↓ P2→ | C (5) | D (6) |
| C | $R_1+\frac{T_3}{2}$ | $S_1+\frac{T_3+R_3}{4}$ |
| D | $T_1+\frac{T_3+R_3}{4}$ | $P_1+\frac{R_3}{2}$ |

表 5: 下位プレイヤーの利得構造

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CCCC | ∨· | * | * | * | * | * |
| DDDD | * | * | * | * | * | ∧· |
| CCCD | ∧· | ∨· | ∨· | * | * | * |
| CDDD | * | * | * | ∧· | ∧· | ∨· |
| (CC)(DD) | * | ∧· | * | * | ∨· | * |
| (CD)(CD) | * | * | ∧· | ∨· | * | * |

表 6: 各パターンがナッシュ均衡になるための必要十分条件

**命題 1** $T_1, R_1, P_1, S_1, T_3, R_3, P_3, S_3$ の与え方によって上の *6* つのパターンのいずれもがナッシュ均衡になり得る.

表 6が各パターンがナッシュ均衡になる必要十分条件を表している. 6 つの列はそれぞれ表 5の 6 列に対応している. 表 6で, '∨·' は表 5での C 行動の利得が D 行動での利得以上であることが必要であることを示している. また '∧·' は逆に C 行動の利得が D 行動の利得以下であることが必要であることを示している. '*' は "don't care" であり大小関係はどちらでも構わない.

例えば, 表 6の 4 列目が意味するのは, 'CDDD' がナッシュ均衡になる必要十分条件が以下であることを表している.

$$S_1 + \frac{T_3+P_3+R_3+S_3}{8} \leq P_1 + \frac{R_3+S_3}{4} \text{ (表 5 第 4 列)}$$
$$\text{and } R_1 + \frac{T_3}{2} \leq T_1 + \frac{T_3+R_3}{4} \text{ (表 5 第 5 列)}$$
$$\text{and } S_1 + \frac{T_3+R_3}{4} \geq P_1 + \frac{R_3}{2} \text{ (表 5 第 6 列).}$$

**命題 2** $T_1, R_1, P_1, S_1, T_3, R_3, P_3, S_3$ の与え方によって上の *6* つのパターンのいずれもが 唯一の ナッシュ均衡になり得る.

| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CCCC | ∨· | ∨ | ∨ | ∨ | * | ∨ |
| DDDD | ∧ | * | ∧ | ∧ | ∧ | ∧· |
| CCCD | ∧· | ∨ | ∨ | ∨ | ∨ | ∨· |
| CDDD | ∧ | ∧ | ∧ | ∧ | ∧ | ∨· |
| (CC)(DD) | ∧ | ∧ | ∨ | ∨ | ∨· | ∨ |
| | ∧ | ∧· | ∧ | ∧ | ∨ | ∨ |
| | ∧ | ∧ | ∨ | ∧ | ∨ | ∨ |
| (CD)(CD) | ∧ | ∨ | ∧ | ∨· | ∨ | ∨ |
| | ∧ | ∧ | ∧· | ∨ | ∧ | ∨ |
| | ∧ | ∨ | ∧ | ∨ | ∧ | ∨ |

表 7: 各パターンが唯一のナッシュ均衡になる必要十分条件

表 7は各パターンが唯一のナッシュ均衡になる必要十分条件を表している. '∨' は表 5での C 行動の利得が D 行動の利得より大きいことが必要であることを示している. '∧' はより小さいが必要であると示している. '(CC)(DD)' と '(CD)(CD)' については, それぞれ唯一のナッシュ均衡になる条件が 3 つある.

## 5 結論

以上から, 上位の階層のゲームとの相互作用を想定した二レベル囚人のジレンマモデルによって囚人のジレンマ的状況が回避される可能性が示された. またそれだけでなく, 対称な利得構造から '(CD)(CD)' や 'CDDD' など非対称な均衡が唯一の均衡として得られるという興味深い結果が得られた.

## 参考文献


[Axelrod 84] Robert Axelrod, "The Evolution of Cooperation," Basic BOoks (1984).

[Hausken 95] Kjell Hausken, "Intra-Level and Inter-Level Interaction," *Rationality and Society*, Vol.7, No.4, pp465-488, 1995.

[伊藤 95] 伊藤昭, 矢野博之, 「取引履歴公開下での最適取引戦略 — 自律的エージェント社会の行動規範」, 人工知能学会誌, Vol.10, No.2, pp107-114.

[松原 97] 松原繁夫, 横尾真, 「繰り返しゲームにおいて協調行動を生成する先読み型行動選択方法」, 人工知能学会誌, Vol.12, No.6, pp881-890.