

断面ボロノイ図あてはめ問題

神田 毅

東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻

概要

平面を多角形で分割した図形を近似するボロノイ図を得る「ボロノイ図あてはめ問題」があるが、その拡張として、平面を多角形で分割した図形を近似する断面ボロノイ図(3次元ボロノイ図の平面による断面)を得るといふ「断面ボロノイ図あてはめ問題」を考える。まず、この問題の解空間の性質を考察する。そして、何らかの解らしき解を得るための反復解法を提案する。3次元のボロノイ図に近い構造を持ったものの断面から、元の構造の性質を探るといふ応用例を想定しており、まだ想像の範囲であるが、その後の考えられる応用例について紹介する。

Sectional Voronoi Fitting Problem

Takeshi Kanda

*Department of Mathematical Engineering and Information Physics,
Graduate School of Engineering, University of Tokyo*

Abstract

A problem called "Voronoi fitting problem", which finds a Voronoi Diagram approximating a given planar subdivision, is known. As an extension of the problem, we consider "sectional Voronoi fitting problem", which finds a sectional Voronoi Diagram approximating a given planar subdivision. The sectional Voronoi Diagram is the cross-section of a 3-dimensional Voronoi Diagram. The solution space of the problem is investigated, and hence an iterative method of solving this problem is proposed. Lastly, some imaginary applications are introduced.

1 はじめに

平面を多角形で分割した図形に最も近いボロノイ図を求めるといふ、ボロノイ図あてはめ問題に対して、数種類の解法と応用例が知られている [2] [4] [5] [6]。ここでは、あてはめるものとして、2次元ボロノイ図ではなく、3次元のボロノイ図の断面を考える。この問題を断面ボロノイ図あてはめ問題と呼ぶことにし、その性質を探る。具体的には、まずこの問題の解空間の性質を考察する。そして、何らかの解らしき解を得るための反復解法を提案する。3次元ボロノイ図に似ているとされているものとして、細胞の集まりや、複数の凝結核から同時に成長してできる結晶の集まりがあるが、これらの実物を観察する場合に直接観察できるのはその断面だけになる

ので、そこから元の立体的な構造を推定することが応用例として考えられる。

2 予備知識

2.1 ボロノイ図

2次元のボロノイ図(Voronoi diagram) [1]とは、平面上に与えられた点集合 $\{P_i(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ の中で、どの点に最も近いかによって平面を分割して作った図形で、図1がその例である。式で表すなら、

$$V(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P(x, y) \mid d_i(P) \leq d_j(P)\}, \quad (1)$$

$$d_i(P) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (2)$$

で定義される勢力圏の集合 $\{V(P_i) \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ によって、平面を分割した図形ということになる。なお、ボロノイ図を作る時に与える点 $P_i(x_i, y_i)$ を母点と呼び、ボロノイ図に現れる頂点をボロノイ頂点、ボロノイ図に現れる辺をボロノイ辺、領域 $V(P_i)$ を母点 P_i に対応するボロノイ領域と呼ぶ。一般次元でも同様に定義される。

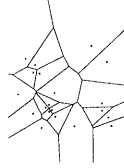


図 1: ボロノイ図の例

2.2 ラゲールボロノイ図

2次元のラゲールボロノイ図 (Laguarre Voronoi diagram) [1] [8] [10] とは、平面上に与えられた円集合 $\{C_i \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ (C_i は、中心が $P_i(x_i, y_i)$ 、半径が r_i の円である) の中で、どの円に最も近いかによって平面を分割して作った図形である。ただし、ここでの「近い」の意味は通常とは異なる。式で表すなら、

$$V_L(C_i) = \bigcap_{j \neq i} \{C(x, y) \mid d_{Li}(P) \leq d_{Lj}(P)\}, \quad (3)$$

$$d_{Li}(P) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 - r_i^2 \quad (4)$$

で定義される勢力圏の集合 $\{V(P_i) \mid i = 1, 2, \dots, N\}$ によって、平面を分割した図形ということになる。与えられた円 C_i と平面上の任意の点 $P(x, y)$ との間の距離を式 (4) の $d_{Li}(P)$ とみなしており、これはラゲール距離 (Laguarre Distance) と呼ばれる。点 $P(x, y)$ が円 C_i の外にあれば $P(x, y)$ から円 C_i への接線の長さの2乗という意味を持つ。なお、ラゲールボロノイ図を作る時に与える円 C_i ($i = 1, 2, \dots, N$) を母円と呼ぶ。例を図2に示す。

2.3 断面ボロノイ図

3次元空間内の N 個の点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) に対する3次元ボロノイ図の、 $x-y$ 平面 $z = 0$ による断面に表れる図形を断面ボロノイ図 (sectional Voronoi diagram) [1] [7] [8]

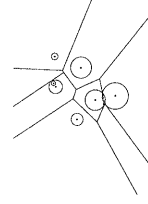


図 2: ラゲールボロノイ図の例

[9] という。これは、 $x-y$ 平面内での点 $\bar{P}_i(x_i, y_i, 0)$ の勢力圏 $V_S(\bar{P}_i)$ を

$$V_S(\bar{P}_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P(x, y) \mid d_{Si}(P) \leq d_{Sj}(P)\}, \quad (5)$$

$$d_{Si}(P) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2 \quad (6)$$

で定めていることになる。式 (6) の $d_{Si}(P)$ は点 $P(x, y, 0)$ と点 $P_i(x_i, y_i, z_i)$ の距離の2乗である。

2.4 ラゲールボロノイ図と断面ボロノイ図との関係

断面ボロノイ図を作るときの母点 P_i の z 座標 z_i に対して

$$z_i^2 - R \leq 0, \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n) \quad (7)$$

となるような十分大きい正定数 R を定めておく。式 (6) を

$$d_{si}(P) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z_i^2 - R \quad (8)$$

と定めなおしても、できる断面ボロノイ図は明らかに同じものである。ここで、ラゲールボロノイ図を作るときの半径 r_i が

$$-r_i^2 \equiv z_i^2 - R \quad (9)$$

で与えられるとみなせば、式 (8) は式 (4) と同じになる。つまり、断面ボロノイ図はある母円に対するラゲールボロノイ図である [8]。

3 断面ボロノイ図の性質

ここでは断面ボロノイ図の性質を紹介する。はじめに定義を1つ行なう。

定義: 相反図形

平面がいくつかの多角形に分割されているとする。これをグラフとみなしたとき、その双対グラフの中で、対応する辺(またはその延長)どうしが必ず直交する双対グラフを相反図形 (reciprocal figure) [3] [9] という。

そして、以下の定理が成り立つ [9]。

定理: 断面ボロノイ図となる必要十分条件

平面がいくつかの多角形に分割されているとき、それがある母点集合 $\{P_i(x_i, y_i, z_i)\} (i = 1, 2, \dots, n)$ にたいする断面ボロノイ図 (ある母点集合 $\{C_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ に対するラゲールボロノイ図) であるための必要十分条件は、その与えられた図形が相反図形を持つことである。

定理の補足

断面ボロノイ図の母点は、相反図形を1つ定めた後にその頂点を z 軸にそって移動した点、つまり真上や真下となるように選べる。

4 断面ボロノイ図あてはめ問題

本発表の目的は

断面ボロノイ図あてはめ問題 平面が N 個の多角形に分割されているとき、それに近い断面ボロノイ図を作る母点の3次元座標 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, \dots, N)$ を求めよ。

という問題について考えることである。この問題の「近い」の意味は不明なので、この点について考えるのは保留しておいて、反復解法を用いて得た解を本問題の解とみなしておく。解を1つ得れば、簡単に全ての解を記述できる。

5 解の自由度

与えられた多角形分割図形が完全にある断面ボロノイ図と同じものになっている特別な場合に、その断面ボロノイ図を作る母点の3次元座標を求める問題の解が、どのくらい多く存在するのを知っておく必要がある。

5.1 相反図形決定の自由度

まず、与えられた多角形分割図形が相反図形を持つような特別な場合に、そのような相反図形をみつける問題の解が、どのくらい多く存在するのを考え、その自由度を求める。ある多角形分割図形が相反図形を持つなら、この相反図形を

- e 倍に拡大 ($e > 0$)
- x 軸方向に d_x の平行移動
- y 軸方向に d_y の平行移動

した図形も相反図形だから、無数の相反図形を持つことになる。逆に、こうして得られる相反図形以外は相反図形になりえない。つまり、相反図形の作り方には3の自由度の任意性がある。

5.2 断面ボロノイ図母点決定の自由度

与えられた多角形分割図形が相反図形を持つような特別な場合に、断面ボロノイ図あてはめ問題の解の自由度は、前述の定理、定理の補足より

- 相反図形の自由度
- 相反図形を1つ定めた後に、各母点を、その母点の真上または真下のどちらに置くかを選択する自由度

の合計である。前者は前節で述べた通りで3自由度あり、後者は以下の通りである。1つの相反図形を決めて考えれば、断面ボロノイ図の母点をこの相反図形の頂点の真上、真下のどちらに置くかで 2^N 個の選択肢があり、 N 個の母点を全体的に断面からどの程度離すかで1の自由度の任意性がある。

6 断面ボロノイ図あてはめ問題の反復解法

以上の考察や実験結果から、母点 P_i の x 、 y 座標 (x_i, y_i) を決めるのに用いる相反図形は3自由度の中から自由を選べることになるのだが、その中で1つを選択する基準として、例えば、後から求まる「母点 P_i の断面からの距離の平均」などが最も小さくなり得るものが現実的であると仮定する。ある初期母点集合を決めた後、その射影から得られる双対グラフが相反図形に近くなっていくと同時に、上記の条件もなるべく満たすように母点を少しずつ移動させていくことにより、よほど特殊な問題例を除けば、経験的にはある母点集合に収束することがわかった。

7 応用例

ある3次元セル構造の断面が与えられた時、そのセル構造が一般的に3次元ポロノイ図に近いとされているなら、その断面付近での3次元構造を予想したり、そもそもこの構造がどのくらいポロノイ図に近いかを測ったりすることができると考えられる。さらに、以下のことができると期待している。

- 元の立体構造がポロノイ図に近いとした場合で、断面を見て、セルが細長いこと、つまりセルを細長くさせるような母点配置になっていることを推定することが(長さ方向に垂直な断面を見ていたとしても)できるのではないか。
- 自然界の現象をまねてみる。例えば細胞の構造がとりあえずポロノイ図であるとみなし、細胞の分裂および、各細胞がその周りの細胞に押されることによる配置の平均化の動きを繰り返しシミュレートした後に、断面ポロノイ図あてはめ問題を解くことで、その解の一致の度合と分裂の激しさとの間に相関をみつけられるのではないか。

8 まとめと課題

得られた結果は

- 断面ポロノイ図あてはめ問題の解に、どれだけの任意性があるかを考察した。
- 断面ポロノイ図あてはめ問題の解を、解を限定するための最適性の基準を設けた上で、単純に母点を移動させていく反復解法を用いることにより得られる解であるとみなし、それを得た。

であり、課題としては

- 解についての勝手な仮定は置かず、断面が複数用意された場合の断面ポロノイ図あてはめ問題について考える
- 上記の応用例の検証: 実データによる実験及び、これらの問題を解くことに本当に意味があるかどうかの考察

が挙げられる。

参考文献

- [1] Atsuyuki Okabe, Barry Boots, Kokichi Sugihara: Spatial Tessellations - Concepts and Applications of Voronoi Diagrams, John Wiley & Sons, 1992.
- [2] Peter F. Ash, Ethan D. Bolker: Recognizing Dirichlet Tessellations, *Geometriae Dedicata*, Vol. 19, pp. 175-206, 1985.
- [3] F. Aurenhammer: Recognising Polytopical Cell Complexes and Constructing Projection Polyhedra, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 3, pp. 249-255, 1987.
- [4] Atsuo Suzuki, Masao Iri: Approximation of a Tessellation of the Plane by a Voronoi Diagram, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 29, No. 1, 1986.
- [5] David G. Evans, Steven M. Jones: Detecting Voronoi (Area-of-Influence) Polygons, *Mathematical Geology*, Vol. 19, No. 6, 1987.
- [6] David Hartvigsen: Recognizing Voronoi Diagrams with Linear Programming, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 4, No. 4, pp. 369-437, 1992.
- [7] R. E. Miles: Sectional Voronoi Tessellations, *Revista de la Union Mathematica Argentina*, Volumen 29, 1984.
- [8] Hiroshi Imai, Masao Iri and Kazuo Murota: Voronoi Diagram in the Laguerre Geometry and Its Applications, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 14, No. 1, pp. 93-105, February 1985.
- [9] Peter F. Ash and Ethan D. Bolker: Generalized Dirichlet Tessellations, *Geometriae Dedicata*, Vol. 20, pp. 209-243, 1986.
- [10] F. Aurenhammer: Power Diagrams - Properties, Algorithms And Applications, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 16, No. 1, pp. 78-96, February 1987.