数理モデル化と問題解決　34－10
（２００１．５．１１）

非対称型ファジィ回帰モデルの研究

田島 博之，古川 長太
創価大学大学院工学研究科

従来から提案されているファジィ回帰モデルは、区間回帰モデルの発展型として発案された。そのため、すべてのデータを包含する凸多角形内部のデータを無視する定式化が行われている。また、中心関数は上下辺関数の単に中心とし、対称型ファジィ回帰モデルを用いているために、本来重要であるはずの中心関数の意味が弱かった。そこで、本研究では今まで無視されたデータを活かすために、最小二乗法の概念を導入した上下辺関数の同定法、また、ファジィ数的な概念を導入することによって、説得力のある中心関数の同定法を定式化した。さらに、モデルの表現するファジィ数を従来型の対称型から非対称型ファジィ数と拡張することで現実的に利用可能なモデルの同定法を提案している。

A study of the asymmetrical fuzzy regression model

Hiroyuki TAJIMA, Nagata FURUKAWA
Graduate School of Engineering, Soka University

In this paper, the authors propose a method for identifying fuzzy regression models. Our method is based on the original concept, and includes two types of problems to solve. The first type problem is given as a single-stage problem, and the second is given as a two-stage one. Since observed data are explicitly taken into objective functions in both problems, fuzzy regression models identified by our method are more sensitive, with respect to observed data, than those of previous method.

1．はじめに

1986 年に大阪府立大学の田中教授を中心としたグループによって「区間回帰分析法」の概念が提唱され，この基本概念を発展させたタイプの「ファジィ回帰モデル[(1)-(4)]」が存在する．ファジィ回帰モデルは，独立変数として実数値，従属変数としてファジィ的な要因を含む実数値が与えられたデータセットに対して有効なモデルである．例えば，独立変数として学習時間，従属変数値としてテストの得点といったデータから同定されるファジィ回帰モデルからは，学習時間に対する生徒の実力が，人間的な曖昧さを含むファジィ数として推定できるのである．本研究では，これまでの「区間回帰モデル」の概念にはなかった、ファジィ数的な概念をモデル同定問題の目的関数に取り入れることによって新しいタイプのファジィ回帰モデルを提案する．なお，本論においては，この区間回帰分析法の発展型である回帰モデルを従来型と呼び，新たに提案するモデルを提案型と表記する．

2．従来型同定法

2.1 数学的基本事項　従来型モデルで用いるファジィ数は，対称三角型ファジィ数であり，以下の型関数として定義される．

$$\widetilde{A}=(a,e)_L \quad a\in\mathbf{R}, 0<e\in\mathbf{R} \tag{1}$$

ここで，a はファジィ数の中心値，e は中心からの広がりの幅を表す．メンバーシップ関数を定義する．

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)=\max\left\{0, 1-\frac{|x-a|}{e}\right\} \tag{2}$$

ファジィ数 $\widetilde{A}$ における h レベルの α カット集合を定義する．

$$[\widetilde{A}]_h=\{x \mid \mu_{\widetilde{A}}(x)\geq h\} \quad for\ 0<h\leq 1 \tag{3}$$

従って h レベルの α カット集合は以下の閉区間となる．

$$\begin{aligned}[\widetilde{A}]_h&=[(a,e)_L]_h\\&=[a-(1-h)e, a+(1-h)e]\end{aligned} \tag{4}$$

ファジィ数に対する和と実数倍の演算を拡張原理の定義より次のように表す．

$$\begin{aligned}&\widetilde{A}+\widetilde{B}\\&=(a_c,a_w)_L+(b_c,b_w)_L=(a_c+b_c,a_w+b_w)_L\end{aligned} \tag{5}$$

$$k\cdot\widetilde{A}=(k\cdot a_c, |k|a_w)_L \tag{6}$$

以上の条件の下，ファジィ回帰モデルを次に定義する．

$$\widetilde{Y}(x)=\widetilde{A}_0+\widetilde{A}_1 x \tag{7}$$

これを成分で表示したのが次の記述である．

$$\begin{aligned}\widetilde{Y}(x)&=(a_0,e_0)_L+(a_1,e_1)_L\cdot x\\&=(a_0+a_1x, e_0+e_1|x|)_L\\&=(a(x), e(x))_L\end{aligned} \tag{8}$$

2.2 従来型同定法[(1)]　従来型のファジィ回帰モデル同定法は，与えられた全てのデータ点を，そのモデル

に包括する制約条件のもと，モデルの表現する曖昧さの幅を最小にする．以下にm個のデータセットを与える．

$$(x_i, y_i) \quad i = 1,2,\ldots,m \tag{9}$$

従来型では,同定するモデルの h レベルの α カット集合が全てのデータを含む制約条件を考える．

$$y_i \in [\ \tilde{Y}(x_i)\ ]_h\ , i = 1,2,\cdots,m \tag{10}$$

h の値はモデル同定者が同定問題を設定する際に任意に決定するパラメータである．従来型モデルは，この制約条件下でモデルの曖昧さの幅を最小化基準とした数理計画問題として定式化される．

従来型同定問題

目的関数：

$$\min \sum_{i=1}^{m} e(x_i) \tag{11}$$

制約条件：

$$a(x_i) - (1-h)e(x_i) \leq y_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{12}$$

$$a(x_i) + (1-h)e(x_i) \geq y_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{13}$$

$$e_j > 0\ , j = 0,1 \tag{14}$$

決定関数：

$$a(x), e(x) \tag{15}$$

3． 従来型同定法の問題点

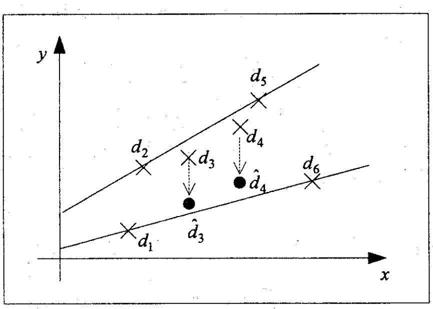


Fig.1

Fig.1 は，データセット $\{d_i | i = 1,2,\cdots,6\}$ の各データ点を×で表しており，直線はこのデータセットから同定されたファジィ回帰モデルの上下辺の関数とする．ここで，$\{d_1, d_2, d_5, d_6\}$ はモデルを決定する上で重要となる全データ包含する凸多角形を作るデータである．この凸多角形内部にある 2 つのデータ点 $\{d_3, d_4\}$ が，凸多角形内部において y の値を下に●で表すデータ $\{\hat{d}_3, \hat{d}_4\}$ の位置まで変化させても，データセット $\{d_1, d_2\hat{d}_3, \hat{d}_4, d_5, d_6\}$ から同定されるモデルは，変化させる前と同じモデルになる．

最小二乗推定法では，独立変数と従属変数の関係性を分析するために，y_i の値を最小化基準の計算に利用している．その反面，従来の同定問題では，データの従属変数値が目的関数に影響しない最小化基準を使っているためにこのような問題が起こってしまうのである。

4． 提案型同定法

4.1 数学的基本事項　提案する回帰モデルにおいて基本的な算術演算等の定義は，従来型に従うものとするが、モデルが表現する曖昧さの幅を，従来型の対称三角型ファジィ数から非対称三角型ファジィ数へと拡張する．Fig.2 で表現される非対称三角型ファジィ数 $\tilde{A}$ を，以下に表すメンバーシップ関数 $\nu_{\tilde{A}}(x)$ として定義する．

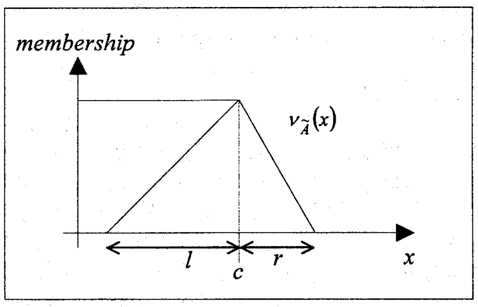


Fig. 2

$$\nu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \max\left(\dfrac{x-c+l}{l}, 0\right) & ,\text{if } c \geq x \\ \max\left(-\dfrac{x-c-r}{r}, 0\right) & ,\text{if } c < x \end{cases} \tag{16}$$

Fig.2 で表すファジィ数を $\tilde{A} = (c, l, r)$ と表現する．ここで c はメンバーシップ値が 1 となる x の値，l は c から左への広がりの幅 r は c から右への広がりの幅とする．次に，ファジィ回帰モデル $\tilde{Y}(x)$ の中心関数と，上下辺の幅を表現する関数を定義する．

$$\begin{aligned} c(x) &= c_0 + c_1 \cdot x \\ l(x) &= l_0 + l_1 \cdot x \\ r(x) &= r_0 + r_1 \cdot x \end{aligned} \tag{17}$$

これらの式を用いて，ファジィ回帰モデル $\tilde{Y}(x)$ を次式で定義する．

$$\widetilde{Y}(x)=(c(x),l(x),r(x)) \tag{18}$$

さらに，モデルの上辺および下辺の関数を以下のように， $y^*(x), y_*(x)$ と定義する．

$$\begin{aligned} y^*(x)&=c(x)+r(x) \\ y_*(x)&=c(x)-l(x) \end{aligned} \tag{19}$$

本研究においてファジィ回帰モデルを同定するとは，データセット $(x_i, y_i), i=1,2,\cdots,m$ に対して関数 $c(x), r(x), l(x)$ あるいは，関数 $c(x), y^*(x), y_*(x)$ を決定するということである．

4.2 提案型同定法 はじめにモデルの上下辺の関数を定める同定問題の定式化を行う。データ点とモデルの上辺までの幅，また下辺までの幅の２乗を考え、これらの値の総和を最小にするように定式化を行う．また，モデルの上下辺で全てのデータ点を包含するような制約条件を与える．以下に上下辺の関数を求める問題を First Level として記述する．

提案型同定問題

＜First Level＞

目的関数：

$$\min \sum_{i=1}^{m}\left[\left(y^*(x_i)-y_i\right)^2+\left(y_*(x_i)-y_i\right)^2\right] \tag{20}$$

制約条件式：

$$y_*(x_i) \leqq y_i \leqq y^*(x_i), i=1,2,\cdots,m \tag{21}$$

同定関数：

$$y^*(x), y_*(x) \tag{22}$$

First Level の問題を解くことにより，同定された上辺および下辺の関数を $\hat{y}^*(x), \hat{y}_*(x)$ とする．次に中心関数を求めるが，初めに、モデルの上下辺関数とデータの関係を表した関数 $\alpha(x, y)$ を定義する。

$$\alpha(x_i, y_i)=\begin{cases} \dfrac{y_i-\hat{y}_*(x_i)}{c(x_i)-\hat{y}_*(x_i)} & for\ c(x_i) \geqq y_i \\ \dfrac{y_i-\hat{y}^*(x_i)}{c(x_i)-\hat{y}^*(x_i)} & for\ c(x_i) < y_i \end{cases} \tag{23}$$

Fig.3 は任意のデータ点 (x_i, y_i)、モデルから推定されるファジィ数,および関数値 $\alpha(x_i, y_i)$ を示している。Second Level では、中心関数 $c(x)$ を求めるが、Fig.3 だけ考えるならば、実際のデータがある y_i と $c(x_i)$ の値が同じになる（重なる）ように中心関数 $c(x_i)$ を決定することが理想的であると考えられる。そこで、Second Level では y_i と $c(x_i)$ の値を総体的に近づけることを考え、中心関数を求める同定問題を Second Level として定式化する．

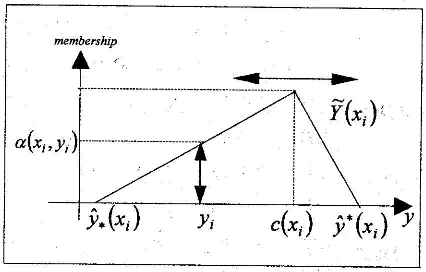


Fig. 3

＜Second Level＞

最大化目的関数：

$$\max \sum_{i=1}^{m} \alpha(x_i, y_i) \tag{24}$$

制約条件式：

$$\hat{y}_*(x_i) \leqq c(x_i) \leqq \hat{y}^*(x_i), i=1,2,\cdots,m \tag{25}$$

同定関数

$$c(x) \tag{26}$$

5．評価関数の定義

5.1 評価関数 f_α 与えられたデータと同定された中心関数の位置関係を，ファジィ数的な視点から考察し，評価関数 f_α として定義する．

$$\alpha(x_i, y_i)=\begin{cases} \dfrac{y_i-\hat{y}_*(x_i)}{\hat{c}(x_i)-\hat{y}_*(x_i)} & for\ \hat{c}(x_i) \geqq y_i \\ \dfrac{y_i-\hat{y}^*(x_i)}{\hat{c}(x_i)-\hat{y}^*(x_i)} & for\ \hat{c}(x_i) < y_i \end{cases} \tag{27}$$

$$f_\alpha=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \alpha(x_i, y_i) \tag{28}$$

f_α が１に近づくほど，そのモデルの中心関数は，データセットの性質を良く表現しているといえる．

6．数値計算による評価

以下は、計算に用いたデータセット Data A, Data B と、それから得られた数値計算結果である。

Table 1 This data set is Data A

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0.00	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	90.0	110	130
y	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	7.00	2.00	7.43	7.71	8.00

Table 2 This data set is Data B

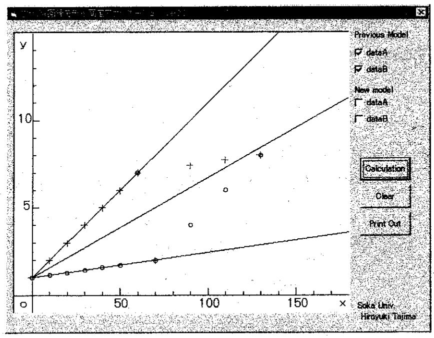
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	0.00	10.0	20.0	30.0	40.0	50.0	60.0	70.0	90.0	110	130
y	1.00	1.14	1.29	1.43	1.57	1.71	7.00	2.00	4.00	6.00	8.00

Table 3　This table is a calculation

		従来型		提案型	
		Data A	Data B	Data A	Data B
上辺関数	傾き	1.00E-01	1.00E-01	6.23E-02	6.23E-02
	切片	1.00	1.00	3.65	3.26
中心関数	傾き	5.71E-02	5.71E-02	7.15E-02	3.62E-02
	切片	1.00	1.00	1.00	-0.53
下辺関数	傾き	1.43E-02	1.43E-02	2.13E-02	3.62E-02
	切片	1.00	1.00	0.05	-0.53
評価関数値	f_α	0.227	0.190	0.582	0.680

6. 1 従来型モデルの比較　Fig.4 では Data A の点が“+”，Data B が“○”で表されているが，従来型モデルでは，ここまでデータの分布が異なっても，いずれのデータからも同じモデルが同定されてしまう．

Fig. 4



6. 2 従来型，提案型モデルの比較　Data A を使いモデルの比較を行う．Fig.5 の点線は従来型モデル，実線は提案型モデルである．従来型に比べ提案型のモデルはデータと中心関数が近くなっている．このことから，提案型モデルは中心関数とデータの関係が自然な形で同定されていることが分かる．これは，評価関数による f_α 値が従来型で 0.227，提案型で 0.535 と 2 倍以上になっていることからも容易に理解できる．

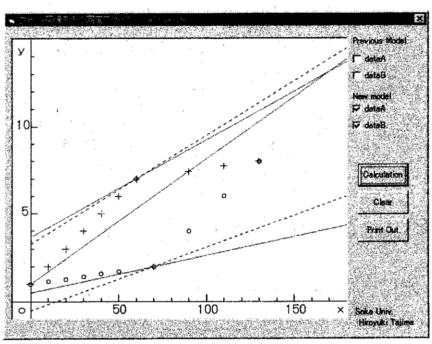


Fig.5

6. 3 提案型モデルの比較

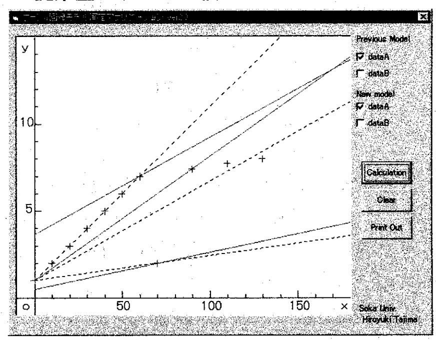


Fig. 6

Data A, B における提案型モデルの比較である．Fig.6 では，Data A のモデルを実線，一方 Data B のモデルを点線で表している．データ B では、中心の関数が、モデルの下辺と重なって同定されている。従来型モデルとは異なり，データの変化に対してモデルが敏感に反応して同定されていることが分かる．

f_α 値も，従来型の Data A が 0.227, Data B が 0.190 であることに対して，Data A が 0.582, Data B が 0.680 と何れも，提案型モデルが従来型よりも高くなっていることが分かる．以上を考え合わせるに，提案型モデルは，従来型モデルよりも多くのデータの性質を表現したモデルであることが，お分かり頂けると思う．

7．まとめ

本研究では，従来型ファジィ回帰分析法では軽視されていた凸多角形内部のデータ群に着目し，データの性質を，より良く表現できるファジィ回帰モデルを提案した．提案されたモデルは，新たな概念を導入することによって，モデルから推定されるファジィ数の中心値を，実際のデータに近い値にすることができた．さらに，同定されたモデルから表現されるファジィ数の中心値と，データの従属変数値の関係に着目することにより，モデルとデータの関係を数量化することによって，異なったタイプのモデルの比較を可能にした．

参考文献

(1) 田中，和多田，林，ファジィ線形回帰分析の三つの定式化，計測自動制御学会論文集，Vol. 22, No. 10, 1986, pp. 1051-1057

(2) 石渕，田中，黄，作業時間解析におけるファジィ回帰手法の比較，システム制御情報学会論文誌，Vol. 3, No. 3, 1990, pp. 90-92

(3) 田中，石渕，黄，類似度を導入したファジィ回帰分析による職員数モデル，日本経営工学会誌 Vol. 41, No. 2, 1990, pp. 99-104

(4) 石渕，ファジィ回帰分析，日本ファジィ学会誌 Vol. 4 , No. 1 , 1992, pp. 52-60