数理モデル化と問題解決　36－９
（２００１．９．１７）

形式的べき級数恒等式の全単射像表現とその進化論的探索

甲元　洋[†]　岡部洋一[††]

恒等式の証明を行う汎用的なアプローチとして，両辺を適当な単位に分割して全単射像を得る方法がある。全単射像の表現は，個々の恒等式により異なるため，問題に応じた工夫が必要になる。本研究では，１変数整数係数の形式的べき級数恒等式の全単射像表現を提案し，複数の問題に進化論的探索手法を適用した結果について報告する。提案する表現は，恒等式を母関数表現した際のパラメータの次数を，分割された項の帰納的な順序の関数値とするものである。このような表現は，直接母関数の表示を探索する場合に比較して次のメリットがある。すなわち，再帰記号を陽に扱う必要がなく，記号表現の深さが相対的に小さい。

Bijection in formal power series identity and its evolutional search

HIROSHI KOHMOTO[†] and YOUICHI OKABE[††]

In this article, we discuss bijection over one variable formal power series identity which has integer coefficient,is useful in the proof of identity. Moreever we report the result applied the evolutional search for such bijection. Our proposal is to introduce the function which gives recursive order to each divided term. Such function is expected to have two merit. Firstly, we do not need to treat directly recursive symbol. Secondly such representation depth is comparatively small.

1. はじめに

定理の自動証明の中でも，恒等式の証明は，1990年前後に飛躍的な進展があった分野である．とりわけ，超幾何級数の分野では，一般的な自動証明アルゴリズムが開発されて，自動証明はもとより，新たな恒等式を自動的に探索し得る結果が得られている[1]．しかしながら，そのような自動証明アルゴリズムが見出されていない領域もまた広大であり，昨今の数理物理の進展を省みた場合に，証明支援のための枠組みを地道に探る努力も必要である．我々は，１変数整数係数の形式的べき級数恒等式の一部のクラスにおける，恒等式の両辺の全単射像表現を提案する．この表現は，仮説として求められることにより，恒等式の証明に寄与し得る．１変数整数係数の形式的べき級数を適用分野として選んだのは，分割数に関わる非自明な恒等式が数多く存在するからである[2]．通常そのような恒等式の証明は，新たなパラメータを導入した母関数表示を展開して，その係数比較を行うことで遂行されることが多い[3]．恒等式が未知の場合には，そのような母関数は非自明であり，何らかの仮説として導入される必要がある．表現の基本的アイデアは，恒等式の両辺を帰納的な指標を付けて分割し，それらの対応関係を母関数表示を再現するような関数として表示することにある．具体的には，恒等式の一方の辺（本文では右辺とする）を単一のベキ項の和に分解し，２進展開の要領で順序付けをした後，残りの一辺（本文では左辺とする）の項への対応を順序の関数とする．このとき，順序は２進展開の各桁数ｕ（整数）とその桁の数値ｖ（１または０）の関数 R(u,v) の u に関する総和として表している．最後に，提案した表現によって，仮説としての全単射像を遺伝的プログラミングによって探索した結果について報告する．

2. 形式的べき級数の恒等式と全単射表現

2.1 形式的べき級数の恒等式と自動証明

超幾何恒等式の自動証明においてキーとなったのは，与えられた恒等式から帰納的な証明を可能とする漸化式を得る一般的アルゴリズムを構築できたことによる[1]．形式的べき級数の分野においては，一見簡単に漸化式が得られるように思えるにも関わらず，そのような一般的アルゴリズムは見出されていない．たとえ

† (株) 日立製作所，電力・電機グループ
Hitachi,Ltd Power Industrial Systems
†† 東京大学先端科学技術センター
RCAST,Univ.Tokyo

ば，単純な同次項の係数比較だけでは，組織的な数え上げ手段がない限り証明を完結させるのは難しい．通常，多くの形式的べき級数恒等式が，証明のベースとなる母関数表示を有している．その母関数では，新たなパラメータ t が導入され，t の同次項比較として帰納法の仮定を自然に見出すことが可能である．

これを式で表現すると、次のようになる．まず，1 変数整数係数の形式的べき級数の恒等式が，次のように書かれていたとする．

$$A(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{A,i}(x)$$
$$= B(x) = \sum_{j=1}^{\infty} x_{B,j}(x) \tag{1}$$

すなわち $A(x)$ と $B(x)$ は，整数係数のべき級数とし，$x_{A,i}(x)$ と $x_{B,j}(x)$ は各々整数係数のべき多項式とする．また，$x_{A,i}(x)$ ならびに $x_{B,j}(x)$ は，添え字 i ならびに j に関して帰納的に定義されているものと仮定する．一般性を失うことなく，$x_{B,j}(x)$ はそれ以上分割しても，どの $x_{A,i}(x)$ の要素となるかについて，新たな情報を追加できない最大の要素として設定する．(通常，$x_{B,j}(x) = x^n (n \in N)$ としている．) さらに，(1) 式が，別の新たなパラメータ t の母関数表示として次のように得られたとする．

$$A(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot x_{A,i}(x)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} t^{f(j)} \cdot x_{B,j}(x) = B(x,t) \tag{2}$$

すると，帰納法の仮定として，次式が得られることになる．

$$x_{A,0}(x) = \sum_{\{j|0=f(j)\}}^{\infty} x_{B,j}(x) \tag{3}$$
$$x_{A,i}(x) = \sum_{\{j|i=f(j)\}}^{\infty} x_{B,j}(x) \rightarrow$$
$$x_{A,i+1}(x) = \sum_{\{j|f(j)=i+1\}}^{\infty} x_{B,j}(x) \tag{4}$$

ここで，$f(j)$ は，0 以上の整数を値域とした整数値関数である．

2.2 陽わな母関数探索の問題点

さて，形式的べき級数恒等式の母関数表示を得ることは，自明な作業ではない．そこで，何らかの探索アルゴリズムにより母関数表示を探索することを考える．(2) 式の表示を直接探索すると，陽に再帰記号と無限級数を扱う必要が出てきて，次のような厄介な状況に到ることになる．

- 再帰記号（Σ他）とそれに関する添字をコントロールする必要がある．特に，探索手法として遺伝的プログラミングを適用する際に，交叉や突然変異による意味のない添字の拡散を回避する必要がある．
- パラメータ t や再帰記号の添字など変数が多くなり，解の記号表現がより深くなる傾向がある．(表 1 参照)
- 無限級数を陽に扱うため，評価のための余分な近似処理が必要になる．

2.3 全単射の表現の定式化

前節で見たように，恒等式の各項の全単射写像の表現として直接母関数表示 (2) 式を得ることができたとする．すると，$x_{B,j}(x)$ の次数 n の大小関係による順序と，j の大小関係による順序によって，$(x_{B,j}(x)|i = f(j))$ の集合を整列させて、$x_{A,i}(x)$ を新たな展開パラメータ k により帰納的に展開した構成要素 $x_{A,i,k}(x) = x^m$ と 1 対 1 に対応させることができる．$i = f(j)$ の表現は次式を採用した．

$$f(j) = \sum_{u=0}^{[\log_2 j]} R(u,v) \tag{5}$$

$$v = v(u,j) = \left[\frac{j}{2^u}\right] - 2\left[\frac{j}{2^{u+1}}\right] \tag{6}$$

本表現の採用によって，少なくとも以下のタイプの恒等式については，$R(u,v)$ の初等的な表現を得ることが可能なことを証明できる．

$$A(x,t) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i \cdot x_{A,i}(x)$$
$$= \prod_{u=0}^{\infty} (1 + t^{g(u)} \cdot \hat{x}_{B,u}(x)) = B(x,t) \tag{7}$$

$$g(u) = g(u mod p), p \in N \tag{8}$$

本表現を採用した理由は，二つある．第一は，全射 $i = f(j)$ が漸近的に j の対数的な関数であることが多く，従って対数的な関数族の中での自由度を持たせておきたいことによる．実際，(6) 式は総和の添え字の最大値が j の対数的関数であるため，そのような要件を満たしやすい表現になっている．第二は，(8) 式のタイプの母関数を有する恒等式に対しては，厳密に初等的関数の表現が存在することを証明できることにある．u は，(8) 式右辺の積の添え字であり，v は，v = 1 ならば，$x_{B,j}(x)$ が $\hat{x}_{B,u}(x)$ を因数に持ち，$v = 0$ ならば因数に持たないという様に表現される．すなわ

ち，u と v は各々 j を２進数としたときの桁数とその桁での数値を表す自然な表現になっている．従って，それらを包含するような表現を採用したいのである．

表１に，母関数 $B(x,t)$ と，提案手法の関数 $R(u,v)$ の比較を示す．

3. 探索法の定式化

探索法は，記号表現の探索に適している遺伝的プログラミング[4)5)]（以下ＧＰと略す.）を採用した．本論文では，前章で述べたように，非終端記号を以下の６つとしている．

$$\{+,-,*,\left[\frac{a}{b}\right],a^{|b|},amodb\} \tag{9}$$

また，終端記号は以下のように設定している．

$$\{u,v\} \tag{10}$$

$$\{\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots\} \tag{11}$$

ここで，定数は整数の集合であり，無限個の要素を持つため，記号表現の生成の際には，正規分布に従って無作為に抽出する．正規分布の分散は，元の恒等式中に現れる各べき項の係数の集合から計算するものとしている．ＧＰの探索フローは，以下のとおりである．

(1)　初期世代 $\{\mathrm{R}_0(u,v)\}$ の生成

(2)　世代 g の記号表現 $\{R_{old}(u,v)\}$ 入力

(3)　世代交代候補 $\{R_{new}(u,v)\}$ の生成

(4)　世代交代候補 $\{R_{new}(u,v)\}$ の評価

(5)　世代交代

(6)　世代 $g+1$（探索継続でステップ (2) へ）

得られた $R(u,v)$ の評価値は，$\displaystyle\sum_{\{j|i=f(j)=\sum_{u=0}^{\infty}R(u,v)\}}^{\infty}\overline{x_{B,j}(x)}$ と $x_{A,i}(x)$ との偏差として計算する．採用した評価値は，級数間の距離として以下のように定義される．

表１　母関数 $B(x,t)$ と提案手法の関数 $R(u,v)$ の比較

Table 1　Comparison between generating function $B(x,t)$ and proposed function $R(u,v)$

	function
Case1 B	$\prod_{n=1}^{\infty}(1+tx^n)$
Case1 R	v
Case2 B	$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+tq^{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{t}q^{2n+1}\right)\left(1-q^{2(n+1)}\right)$
Case2 R	$umod3-2\left[\frac{umod3}{2}\right]$

Case1 : Right-hand side of Euler identity

Case2 : Right-hand side of Jacobe's triple product identity

$$\mathrm{C}\cdot\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{sgn(a_{i,k})\log|a_{i,k+1}|}{(k+1)^2}-\frac{sgn(b_{i,k})\log|b_{i,k+1}|}{(k+1)^2}\right)^2\right\}^{1/2} \tag{12}$$

$$\mathrm{x}_{A,i}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{i,k}x^k$$

$$\widehat{x}_{B,i}(x)=\sum_{\{j|i=f(j)\}}^{\infty}x_{B,j}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_{i,k}x^k \tag{13}$$

ここで，Ｃはパラメータ，sgn(X) はＸの符号を表すものとする．本評価値は，次のような特徴を持っている．

- $|x_A-x_B|$ が距離の公理を満たす．
- $|a_{i,k}|$ と $|b_{i,k}|$ が，ｉの多項式乗のオーダで収束する．

もちろん，(15) の定義式には無限の総和が入っているため，適切な次数で制限する必要がある．そのような設定の例は，次章に示す．

4. 探索とその結果

次式に示す Euler の恒等式に内在する全単射像を探索した例について記載する．

$$1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\prod_{t=1}^{i}x^{2t}}{\prod_{s=1}^{i}(1-x^{2s})}=\prod_{r=1}^{\infty}(1+x^{2r}) \tag{14}$$

探索を行う前に２つ行うべきことがある．最初におこなうべきことは，恒等式の両辺を各々の帰納的定義に応じて，分割することである．本例では，(16) 式を以下のように分割した．

$$x_{A,0}(x)=1\ x_{A,i\neq0}(x)=\frac{\prod_{t=1}^{i}x^{2t}}{\prod_{s=1}^{i}(1-x^{2s})} \tag{15}$$

$$x_{B,j}(x)=x^{\sum_{u=0}^{[\log_2 j]}2(u+1)\left[\left[\frac{j}{2^u}\right]-2\left[\frac{j}{2^{u+1}}\right]\right]} \tag{16}$$

ここで，(18) 式は，(16) 式の右辺を２進展開した自然数と対応づけてＸのベキ級数が総和をとる意味を持つ．たとえば，次式ののように対応付けることが可能である．

$$\left(1+\underline{x^2}\right)\left(\underline{1}+x^4\right)\left(1+\underline{x^6}\right)\left(1+\underline{x^8}\right)\cdots \tag{17}$$
$$x^2\cdot1\cdot x^6\cdot x^8\cdot1\cdots$$

$$\longrightarrow(10110\cdots)=1+2^2+2^3=13 \tag{18}$$

第２に行うべきことは，探索時の評価においてベキ級数をどの時点で打ち切って，近似的な多項式の

評価に置き換えるかである．決めるべき値は，近似として考慮すべき $x_{A,i}(x)$ の最大次数 $Imax$，ならびに $x_{B,j}(x)$ の最大次数 $Jmax$，そして，各単一べき項をベクトル空間の基底と見なしたときの考慮すべき次元 l である．それらは，計算資源によって大小を決めるべきものである．ここでは，次のように決定した．

$$Imax \cdot Jmax = 256 \tag{19}$$

$i = f(j)$ は，漸近的に対数的な挙動を示すものとする．すなわち，

$$i = f(j) \sim o(e^j) \tag{20}$$

すると，

$$Imax \cdot [\ln Imax] = 256 \tag{21}$$

ここで，[ ] は gauss の剰余記号である．以上より，

$$(Imax, Jmax) = (64, 4) \tag{22}$$

また，各単一べき項 $x^{2(l-1)}$ のベクトル空間の次元 l は，

$$l = 1 + \max_{1 \le j \le Jmax} Ind(x_{B,j}(x)) \tag{23}$$

とし，$x_{B,j}(x)$ の中の最大指数$\mathrm{Ind}(x_{B,j}(x))$ から決定する．
表 2 に写像行列 V(i,j) の探索の成功例を示す．ここで、写像行列 V(i,j) は次のように定義されている．

$$V(i,j) = \begin{cases} 1 & (i = f(j)) \\ 0 & (i \neq f(j)) \end{cases} \tag{24}$$

また，得られた関数 $R(u,v)$ は，表 3 のようになる．

これは，変数 v は 1 または 0 の値のみをとるため，関数の記号表現に冗長性が増し，乱数 seed によって，見かけ上異なる表現が得られているものである．
以上のように，提案する全単射像の表現を採用すると，GP などの探索手法によって，比較的容易に仮説としての全射関数の記号表現を得ることができる．但し，解の探索が保証される形式的べき級数は，現在のところ 1 変数整数係数のうち (8)〜(9) 式を満たす恒等式のみであり，今後の拡張が望まれる．

表 2　写像行列 V(i,j) の探索結果（例）
Table 2　Sccessful search for correspondence matrix V(i,j) (example)

	j=0〜31
i=0	10000000000000000000000000000000
i=1	01101000100000000100000000000000
i=2	00010110011010000110100010000000
i=3	00000001000101100001011001101000

表 3　関数 R(u,v) の探索結果（例）
Table 3　Sccessful search for function R(u,v) (example)

	function R(u,v)
seed=1	$R(u,v) = \left[\frac{v}{v}\right]$
seed=2	$R(u,v) = v + (\left[\frac{0}{u}\right] * 1)$
seed=3	$R(u,v) = v$
seed=4	$R(u,v) = (v + v * 0)^v$

5. 結　　論

恒等式の証明を行う汎用的なアプローチである，両辺を適当な単位に分割して全単射像を得る為の全単射像表現を提案した．提案した全単射像表現は，恒等式を母関数表現した際のパラメータの次数を，分割された項の帰納的な順序の関数値とするものである．本表現を元に遺伝的プログラミングを適用した例を示し，直接母関数の表示を探索する場合に比較して，再帰記号を陽に扱う必要がなく，記号表現の深さが相対的に小さいことを確認した．今後は，その適用範囲を，解が保証される限られたタイプの恒等式から拡張することが課題である．

参 考 文 献

1) Marko Petkovsek, Herbert S.Wilf, Doron Zeilberger : A=B, A K Peters,Ltd. (1996).
2) Hardy G.H.,Wright E.M.: An Introduction to the Theory of Numbers Fifth Edition, Oxford , (1978).
3) George E. Andrews : The Theory of Partition, Cambridge University Press,(1998).
4) Koza J.: Genetic Programming, On the Programming of Computers by means of Natural Selection, MIT Press,(1992).
5) 伊庭　斉 : 遺伝的プログラミング, 東京電気大学出版,(1996).