数理モデル化と問題解決　36－7
（２００１．９．１７）

断面ボロノイ図あてはめ問題の提案
— 問題の性質・実用的な解法・応用の可能性 —

神田 毅 †

概要. 平面分割図形を近似するボロノイ図を求める問題 — すなわち「ボロノイ図あてはめ問題」 — が知られているが、その拡張として「断面ボロノイ図あてはめ問題」を新しく提案する。まずこの問題を定義して、次に解空間の性質などいくつかの性質について考察する。そして、この問題の反復解法を提案して、断面が複数枚の場合も含めて数値実験で適用してみる。最後に応用の可能性について述べる。例えば、3次元ボロノイ図に似ているとされているものを実際に観察する場合に、直接観察できるのはその断面だけになるので、そこから元の立体的な構造の性質を推定することが考えられる。

Proposal of the Sectional Voronoi Diagram Fitting Problem
— Properties · Practical Solution · Potential Applications —

Takeshi Kanda †

Abstract. A problem called the "Voronoi diagram fitting problem", which finds a Voronoi diagram approximating a given planar subdivision, is known. As an extension of this problem, we propose the "sectional Voronoi diagram fitting problem". Properties of the problem, such as the solution space of the problem, are investigated, and hence an iterative method of solving this problem is proposed. Then, the method is tested numerically including the case where two or more cross-sections are observed. Lastly, some potential applications are discussed. One of them is to mine some properties of the 3-dimensional structure which is similar to the Voronoi diagram where only cross-sections are available.

1　はじめに

平面を多角形で分割した図形を近似するボロノイ図を求めるという「ボロノイ図あてはめ問題」にたいして、数種類の解法と応用例が知られている。これらの中には、幾何学的考察から与えられた図形がボロノイ図か否かを判定するもの [1]、食い違いの面積を最急降下法で極小化するもの [2]、母点が与えられた辺の垂直2等分線上にあることを利用するもの [3]、線形計画法によって与えられた図形がボロノイ図か否かを判定するもの [4] がある。この問題は行政区画の解析 [2] に用いられ、また、自然界に見られる分割図形のモデル化や解析にも用いられる。

一方、本稿では、あてはめるものとして3次元のボロノイ図の断面を考える。つまり、「断面ボロノイ図あてはめ問題」を新しく提案する。ここで提案する問題は、既存のボロノイ図あてはめ問題の拡張となっている点で、新規性を有する。本稿はこの問題の性質を探り、実用的な解法を提案して適用してみる。具体的には、まずこの問題の解空間の性質を考察する。そして、反復解法を提案して数値実験を行ない、応用例を考える。

†東京大学 大学院工学系研究科 計数工学専攻
Department of Mathematical Engineering and Information Physics, Graduate School of Engineering, University of Tokyo

2　準備

この節では、必要な予備知識を見直す。

2.1　ラゲールボロノイ図

円集合 $\{C_n \mid n = 1, 2, \ldots, N\}$ (C_n は、中心が $P_n(x_n,\ y_n)$、半径が r_n の円とする) が平面上で与えられているものとする。2次元のラゲールボロノイ図 [6] [8] とは、その中のどの円に最も近いかによって平面を分割して作った図形である。ただし、ここでの「近い」の意味は通常とは異なる。式で表すなら、

$$\mathcal{V}_{\mathrm{L}}(C_n) = \bigcap_{i \neq n} \{C(x,\ y) \mid d_{\mathrm{L}n}(P) \leq d_{\mathrm{L}i}(P)\}, \quad (1)$$

$$d_{\mathrm{L}n}(P) = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 - r_n^2 \quad (2)$$

で定義される勢力圏の集合 $\{\mathcal{V}(P_n) \mid n = 1, 2, \ldots, N\}$ によって、平面を分割した図形である。式 (2) の $d_{\mathrm{L}n}(P)$ はラゲール距離と呼ばれ、もし点 $P(x,\ y)$ が円 C_n の外にあれば、$P(x,\ y)$ から円 C_n への接線の長さの2乗という意味を持つ。

2.2　断面ボロノイ図

点集合 $\{P_n(x_n,\ y_n,\ z_n) \mid n = 1, 2, \ldots, N\}$ が3次元空間内で与えられているものとする。これら N 個の点

に対する3次元ボロノイ図の、例えば x-y 平面 $z = 0$ による断面に表れる図形を、**断面ボロノイ図** [5] [6] [7] という。これは、x-y 平面上での点 $\bar{P}_n(x_n,\ y_n,\ 0)$ の勢力圏 $\mathcal{V}_S(\bar{P}_n)$ を

$$\mathcal{V}_S(\bar{P}_n) = \bigcap_{i \neq n} \{P(x,\ y) \mid d_{Sn}(P) \leq d_{Si}(P)\}, \quad (3)$$

$$d_{Sn}(P) = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + z_n^2 \quad (4)$$

で定めていることになる。式 (4) の $d_{Sn}(P)$ は、点 P (x, y, 0) と点 P_n (x_n, y_n, z_n) との距離の2乗である。

2.3 ラゲールボロノイ図と断面ボロノイ図との関係

断面ボロノイ図を作るときの母点 P_n の z 座標 z_n に対して

$$z_n^2 - R \leq 0,\ \forall\, n = 1,\ 2, \ldots,\ N \quad (5)$$

となるような十分大きい正定数 R を定めておく。式 (4) を

$$d_{Sn}(P) = (x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + z_n^2 - R \quad (6)$$

と定めなおしても、できる断面ボロノイ図は明らかに同じものである。ここで、ラゲールボロノイ図を作るときの半径 r_n が

$$-r_n^2 \equiv z_n^2 - R \quad (7)$$

で与えられるとみなせば、式 (6) は式 (2) と同じになる。つまり、断面ボロノイ図は、ある母円集合に対するラゲールボロノイ図である [6]。

2.4 断面ボロノイ図の性質

ここでは断面ボロノイ図の性質を列挙する。はじめに定義を2つ行なう。先に定義する平面分割図形は、これから扱う問題の入力になるものである。

<u>定義 1: 平面分割図形</u>
平面内のある有界領域 $\mathcal{R}$ を、

$$\mathcal{R} = \bigcup_{n=1,\ 2,\ \ldots,\ N} \mathcal{R}_n\ , \quad (8)$$

$$\left|\mathcal{R}_i \bigcap \mathcal{R}_j\right| = 0,\ 1 \leq i < j \leq N \quad (9)$$

となるように小領域の集合 $\{\mathcal{R}_n \mid n = 1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ に分割したものを、**平面分割図形**と呼ぶ。式 (8) は、小領域が考えている領域を覆うことを表し、式 (9) は小領域同士に重なりがないことを表す。ただし、記号 $|\ |$ は領域の面積を表すものとする。

<u>定義 2: 相反図形</u>
平面分割図形が与えられているものとする。この境界辺をグラフの辺とみなした時、その双対グラフの中で、対応する辺 (またはその延長) どうしが直交する双対グラフを**相反図形** [7] という。

そして、以下の定理が成り立つ [7]。

<u>定理 1: 断面ボロノイ図となる必要十分条件</u>
平面分割図形が与えられているとき、それがある母点集合 $\{P_n(x_n, y_n, z_n) \mid n = 1, 2, \ldots, N\}$ にたいする断面ボロノイ図 (ある母円集合 $\{C_n \mid n = 1, 2, \ldots, N\}$ に対するラゲールボロノイ図と言い換えてもよい) であるための必要十分条件は、その与えられた平面分割図形が相反図形を持つことである。

3 断面ボロノイ図あてはめ問題

3.1 定式化

本論文の目的は、次の問題について考えることである。

<u>Λ 枚の断面の断面ボロノイ図あてはめ問題</u>
多角形からなる Λ 枚の平面分割図形 $\mathcal{R}_\lambda$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, \Lambda$) が3次元空間内に与えられていて、それぞれ N_λ (λ = 1, 2, ..., Λ) 個の多角形からなるとする。つまり、$\mathcal{R}_\lambda = \{\mathcal{R}_\lambda n \mid n = 1, 2, \ldots, N_\lambda\}$ とする。それらに近い断面ボロノイ図を作る母点の3次元座標 P_n (x_n, y_n, z_n), ($n = 1, 2, \ldots, N$) を求めよ。ただし、N は

$$\underline{N} \leq N \leq \overline{N}, \quad (10)$$

を満たす範囲で選ぶものとする。ここで

$$\underline{N} \equiv \max_{\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ \Lambda} N_\lambda, \quad (11)$$

$$\overline{N} \equiv \sum_{\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ \Lambda} N_\lambda \quad (12)$$

が定義されている。

3.2 1枚の断面の断面ボロノイ図あてはめ問題の解の自由度

ここでは、与えられた平面分割図形が完全にある断面ボロノイ図になっている特別な場合の、1枚の断面の断面ボロノイ図あてはめ問題の解の自由度について考察する。

3.2.1 相反図形決定の自由度

定理1より、与えられた平面分割図形は必ず相反図形を持つ。まず、その相反図形をみつける問題の解の自由度を求める。ある平面分割図形が相反図形を持つなら、相反図形の定義から明らかなように、拡大・平行移動した図形も相反図形だから、作り方には3の自由度の任意性があることになる。

3.2.2 断面ボロノイ図母点決定の自由度

1枚の断面の断面ボロノイ図あてはめ問題の解の自由度は、前述の定理1からわかるように、相反図形決定の自由度、相反図形を1つ定めた後に各母点をその頂点の真上または真下のどこに置くかという選択をする自由度の2種類の合計である。前者は前節で述べた通りで3自由度あり、後者は以下の通りである。まず、断面ボロノイ図の母点をこの相反図形の頂点の真上、真下のどちらに置くかで 2^N 個の選択肢がある。さらに、N 個の母点を全体的に断面からどの程度離すかで1自由度の任意性がある。

3.3 断面ボロノイ図あてはめ法

ボロノイ図の境界の性質を考慮して、断面ボロノイ図あてはめ問題における「近い」の意味を、「元の平面分割図形の辺が、その両側の領域 $\mathcal{R}_i$ と $\mathcal{R}_j$ に対応する母点 P_i と P_j を結んだ線分の垂直2等分面に近い」こととする。まだ「近い」の意味が曖昧であるが、その「近さ」を表す定義式を以下で構成する。なお、この節では、全ての断面における領域同士の対応関係が完全にわかっているものとして問題を考える。

第 λ 断面で、領域 $\mathcal{R}_{\lambda i}$ と $\mathcal{R}_{\lambda j}$ が共有するボロノイ辺を、断面ごとに定めたある一定の方向から見て $\mathcal{R}_{\lambda i}$ が左側となるように向き付けした時の始点を $V_{\lambda ij}$、その座標を $(a_{\lambda ij},\ b_{\lambda ij},\ c_{\lambda ij})$ とし、そのボロノイ辺の長さを $l_{\lambda ij}$ とする。さらに、P_i、P_j から直線 $V_{\lambda ij}V_{\lambda ji}$ に下ろした垂線の長さを、それぞれ $h_{\lambda ij}$、$h_{\lambda ji}$ とし、その2垂線の足の間の距離を d_{ij} とする。

そして、第 λ 断面に見られる平面分割図形で、隣合う2領域の番号の対の集合をあらわす記号

$$\mathcal{E}_\lambda \equiv \{(i,j) \mid \mathcal{R}_{\lambda i} \cap \mathcal{R}_{\lambda j} \neq \phi,\ i<j\}, \quad (\lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ \Lambda) \tag{13}$$

を定義する。また、全断面における平面分割図形の辺の長さの (枠を除いた) 総和

$$L \equiv \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}_\lambda} l_{\lambda ij} \tag{14}$$

を計算しておいて、非垂直性 の尺度 p を

$$p \equiv \frac{\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}_\lambda} l_{\lambda ij}\ d_{\lambda ij}^2}{\displaystyle\frac{|\mathcal{R}|}{N} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}_\lambda} l_{\lambda ij}} \tag{15}$$

$$= \frac{N}{L\,|\mathcal{R}|} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}_\lambda} \frac{I_{\lambda ij}^2}{l_{\lambda ij}} \tag{16}$$

と定義し、非2等分性 の尺度 b を

$$b \equiv \frac{\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}_\lambda} l_{\lambda ij}\ (h_{\lambda ij} - h_{\lambda ji})^2}{\displaystyle\frac{|\mathcal{R}|}{N} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}_\lambda} l_{\lambda ij}} \tag{17}$$

$$= \frac{N}{L\,|\mathcal{R}|} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}_\lambda} \frac{O_{\lambda ij}^2}{l_{\lambda ij}} \tag{18}$$

と定義する。ただし、式が煩雑になるのを防ぐために、途中で

$$\begin{aligned} I_{\lambda ij} \equiv\ & (a_{\lambda ji} - a_{\lambda ij})(x_j - x_i) \\ & + (b_{\lambda ji} - b_{\lambda ij})(y_j - y_i) \\ & + (c_{\lambda ji} - c_{\lambda ij})(z_j - z_i), \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} O_{\lambda ij} \equiv\ & \sqrt{T_{\lambda ij,1}^2 + T_{\lambda ij,2}^2 + T_{\lambda ij,3}^2} \\ & - \sqrt{T_{\lambda ji,1}^2 + T_{\lambda ji,2}^2 + T_{\lambda ji,3}^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} T_{\lambda ij,1} \equiv\ & (b_{\lambda ji} - b_{\lambda ij})(z_i - c_{\lambda ij}) \\ & - (c_{\lambda ji} - c_{\lambda ij})(y_i - b_{\lambda ij}), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} T_{\lambda ij,2} \equiv\ & (c_{\lambda ji} - c_{\lambda ij})(x_i - a_{\lambda ij}) \\ & - (a_{\lambda ji} - a_{\lambda ij})(z_i - c_{\lambda ij}), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} T_{\lambda ij,3} \equiv\ & (a_{\lambda ji} - a_{\lambda ij})(y_i - b_{\lambda ij}) \\ & - (b_{\lambda ji} - b_{\lambda ij})(x_i - a_{\lambda ij}) \end{aligned} \tag{23}$$

が定義されている。また、p と b は、ともに無次元量である。これらの定義を与える際に、d_{ij}^2 や $(h_{ij} - h_{ji})^2$ の値にたいして、$l_{\lambda ij}$ での重み付き平均を取り、さらに全体を $\frac{|\mathcal{R}|}{N}$ で割っているのは、平面分割図形の形状が同じである限り、平面分割図形の任意の辺が過剰に分割して与えられたとしても、p や b の値が変わらないようにし、かつ、与えられた平面分割図形を相似なまま拡大したり、同じ平面分割図形を隣に貼り合わせて拡大したりしても、p や b の値が変わらないようにするためである。

そして、目的関数

$$f(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ x_N,\ y_N,\ z_N) \equiv (1-k)p + kb \tag{24}$$

を最急降下法によって最小化する。k は2等分性重視度と呼ぶことにする。$0 < k < 1$ の範囲から自由に値を決めてよいが、以下の実験では $k = 0.5$ に統一する。ここで、目的関数 f を各変数 x_n、y_n、z_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ で偏微分した式が必要となる。まず、第 λ 断面で見られる平面分割図形で、第 n 母点に対応する領域と隣合う領域の番号の集合をあらわす記号 $\mathcal{E}_{\lambda n}$ を

$$\underline{\mathcal{E}}_{\lambda n} \equiv \{k \mid (n,\ k) \in \mathcal{E}_\lambda\}, \tag{25}$$

$$\overline{\mathcal{E}}_{\lambda n} \equiv \{k \mid (k,\ n) \in \mathcal{E}_\lambda\}, \tag{26}$$

$$\mathcal{E}_{\lambda n} \equiv \underline{\mathcal{E}}_{\lambda n} \bigcup \overline{\mathcal{E}}_{\lambda n} \tag{27}$$

によって定義しておく。目的関数 f を各変数で偏微分

した式は、非垂直性 p を各変数で偏微分した式

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x_n} &= \frac{n}{L\,|\mathcal{R}|}\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{k\in\mathcal{E}_{\lambda n}}\frac{2\,I_{\lambda nk}}{l_{\lambda nk}} \\ &\quad\times(a_{\lambda nk}-a_{\lambda kn}), \\ \frac{\partial p}{\partial y_n} &= \frac{n}{L\,|\mathcal{R}|}\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{k\in\mathcal{E}_{\lambda n}}\frac{2\,I_{\lambda nk}}{l_{\lambda nk}} \\ &\quad\times(b_{\lambda nk}-b_{\lambda kn}), \\ \frac{\partial p}{\partial z_n} &= \frac{n}{L\,|\mathcal{R}|}\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{k\in\mathcal{E}_{\lambda n}}\frac{2\,I_{\lambda nk}}{l_{\lambda nk}} \\ &\quad\times(c_{\lambda nk}-c_{\lambda kn}) \end{aligned} \tag{28}$$

と、非2等分性 b を各変数で偏微分した式

$$\begin{aligned}\frac{\partial b}{\partial x_n} &= \frac{n}{L\,|\mathcal{R}|}\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{k\in\mathcal{E}_{\lambda n}}\frac{2\,O_{\lambda nk}}{l_{\lambda nk}} \\ &\times\frac{\{(c_{\lambda kn}-c_{\lambda nk})\,T_{\lambda nk,2}-(b_{\lambda kn}-b_{\lambda nk})\,T_{\lambda nk,3}\}}{\sqrt{T_{\lambda nk,1}^2+T_{\lambda nk,2}^2+T_{\lambda nk,3}^2}}, \\ \frac{\partial b}{\partial y_n} &= \frac{n}{L\,|\mathcal{R}|}\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{k\in\mathcal{E}_{\lambda n}}\frac{2\,O_{\lambda nk}}{l_{\lambda nk}} \\ &\times\frac{\{(a_{\lambda kn}-a_{\lambda nk})\,T_{\lambda nk,3}-(c_{\lambda kn}-c_{\lambda nk})\,T_{\lambda nk,1}\}}{\sqrt{T_{\lambda nk,1}^2+T_{\lambda nk,2}^2+T_{\lambda nk,3}^2}}, \\ \frac{\partial b}{\partial z_n} &= \frac{n}{L\,|\mathcal{R}|}\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\sum_{k\in\mathcal{E}_{\lambda n}}\frac{2\,O_{\lambda nk}}{l_{\lambda nk}} \\ &\times\frac{\{(b_{\lambda kn}-b_{\lambda nk})\,T_{\lambda nk,1}-(a_{\lambda kn}-a_{\lambda nk})\,T_{\lambda nk,2}\}}{\sqrt{T_{\lambda nk,1}^2+T_{\lambda nk,2}^2+T_{\lambda nk,3}^2}} \end{aligned} \tag{29}$$

から容易に計算できる。式(29)のある項の分母 $\sqrt{T_{\lambda nk,1}^2+T_{\lambda nk,2}^2+T_{\lambda nk,3}^2}$ が0になる場合は、ある母点が入力平面分割図形の辺上にあることを意味し、その母点はどの方向に動かしても、目的関数の該当項は値が小さくなる。実験では、便宜的にこの場合のこの項の値は0とみなす。

4 応用

断面ボロノイ図あてはめ問題を解くことの意味としては、はじめにも述べたように、大雑把に2種類考えられる。

第1の応用は、断面ボロノイ図を、実際に見られる平面分割図形を近似するモデルとして用いることである。これまで、ボロノイ図にたいしてそれが行なわれていて、煩雑な平面分割図形の動きのシミュレーションも、ボロノイ図による近似が良いものであれば、母点だけの動きのシミュレーションで代用できた。同様のことを断面ボロノイ図で行なえば、このモデル化が許容できる平面分割図形の範囲が、各領域がもつ勢力が均等でないような平面分割図形に広げられたことになる。

第2の応用は、3次元的セル構造の断面が与えられた時、そもそもこの構造がどのくらいボロノイ図に近いのかを測ったり、それがボロノイ図に近いという仮定をできるなら、その3次元構造の性質を何か引き出せるという可能性である。

5 まとめと課題

本稿は、既存のボロノイ図あてはめ問題を拡張して、断面ボロノイ図あてはめ問題を提案し、その問題の性質について考察し、反復解法を1つ示した。そして、その反復解法を問題例に適用してみたが、まだ成功していない。さらに、上記応用例の検証が課題である。

参考文献

[1] Peter F. Ash, Ethan D. Bolker: Recognizing Dirichlet Tessellations, *Geometriae Dedicata*, Vol. 19, pp. 175-206, 1985.

[2] Atsuo Suzuki, Masao Iri: Approximation of a Tessellation of the Plane by a Voronoi Diagram, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 29, No. 1, pp. 69-97, 1986.

[3] David G. Evans, Steven M. Jones: Detecting Voronoi (Area-of-Influence) Polygons, *Mathematical Geology*, Vol. 19, No. 6, pp. 523-537, 1987.

[4] David Hartvigsen: Recognizing Voronoi Diagrams with Linear Programming, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 4, No. 4, pp. 369-437, Fall 1992.

[5] R. E. Miles: Sectional Voronoi Tessellations, *Revista de la Union Mathematica Argentina*, Volumen 29, pp. 310-327, 1984.

[6] Hiroshi Imai, Masao Iri, Kazuo Murota: Voronoi Diagram in the Laguerre Geometry and Its Applications, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 14, No. 1, pp. 93-105, February 1985.

[7] Peter F. Ash, Ethan D. Bolker: Generalized Dirichlet Tessellations, *Geometriae Dedicata*, Vol. 20, pp. 209-243, 1986.

[8] F. Aurenhammer: Power Diagrams: Properties, Algorithms And Applications, *SIAM Journal on Computing*, Vol. 16, No. 1, pp. 78-96, February 1987.