数理モデル化と問題解決 42－22
（２００２．１１．２９）

効率的なＲＡＩＤのアクセス順序決定のための完全二部グラフの cluttered ordering

足立智子 *, Meinard Mueller*, 神保雅一 *

RAID とは，ディスクの読み込み・書き込みを複数のディスクで並列に行うことにより，処理速度と安全性を高める技術である．プロセッサ速度の進歩によって動画像データや大容量データベース等の大きなファイルを高速に処理することが求められる現在，その技術は重要性を増している．本稿では，二次元の RAID において，information disk と check disk を完全二部グラフの辺と頂点に対応させ，効率的な RAID を構築するための information disk の最適順序付けについて考察する．

Cluttered Orderings for Complete Bipartite Graph to speed up RAID

Tomoko Adachi*, Meinard Mueller* and Masakazu Jimbo*

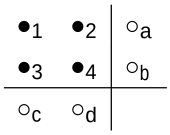
The desire to speed up secondary storage systems has lead to the development of redundant arrays of independent disks (RAID) which incorporate redundancy utilizing erasure codes. In this paper we concentrate on the two-dimensional parity code which can be modeled by the complete bipartite graph. Minimizing disk operations when writing to consecutive disks leads to the concept of cluttered orderings. Using some appropriate mathematical modeling we give some su±cient conditions for the existence of such orderings and conlude with an example.

1. RAID

ハードディスク（以下，ディスクと呼ぶ）の読み込み・書き込みをスピードアップするために，一般的には，複数のディスクに並列に記憶する方法をとる．このようにしてディスクの数が多くなってくると，ディスクの破損の可能性が増大するという問題点が生じる．そこで，ディスクの破損個所の発見・修復のために check disk を用いる．このように，記憶すべきデータと障害回復のための冗長データを複数のディスクに分散して格納することにより，アクセス性能と対障害性を同時に確保するための技法が RAID (redundant arrays of independent disks) である．安全性を高めるために check disk を多くすると，追加のコストが増えてしまう．そこで，安全性と追加のコストのバランスを考えることが重要になってくる．

まず，information disk には保存したいデータを分割して格納し，check disk には information disk 内のデータが破損した場合に復旧するための冗長データを格納するとする．今，k 個の information disk と c 個の check disk があるとし，これらの関係を 0, 1 を成分にもつ $c \times (k + c)$ 行列 $H = [P|I]$ で表す．H はパリティ検査行列と呼ばれる．ただし，I は単位行列であり，P は c 行 k 列の $\{0,1\}$-行列である．H の最初の k 列は information disk に対応し，後半の c 列は chech disk に対応している本稿で扱う二次元の RAID では，check disk を縦横の二次元に配列する．図１のように，check disk を頂点，information disk を辺とみなすことで，RAID を二部グラフで表現することができる．

*慶応義塾大学理工学部数理科学科
*The Department of mathematics, Keio University



$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & a & b & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}$$

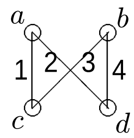


図 1: 2 次元の RAID，パリティ検査行列 H, 対応する完全二部グラフ $K_{2,2}$.

2. Cluttered Ordering

あるグラフ $G = (V, E)$ について $n = |V|$, $E = \{e_0, e_1, \cdots, e_{m-1}\}$ とする．ある正の整数 $d \le m$ を考え，window と呼ぶ．$\{0, 1, \cdots, m-1\}$ 上の置換 π に対して $V_i^{\pi,d}$ を $\{e_{\pi(i)}, e_{\pi(i+1)}, \cdots, e_{\pi(i+d-1)}\}$ の各辺に含まれる点の集合とする．インデックスは mod m で計算し，$0 \le i \le m-1$ である．d 本の辺を持つ部分グラフのアクセスコストをその部分グラフの頂点数で測るのだが，上限 (d-最大アクセスコスト) は $\max_i |V_i^{\pi,d}|$ で与えられる．d-最大アクセスコストが f となる辺の順序付けを (d, f)-cluttered ordering と呼ぶ (図 2 参照).

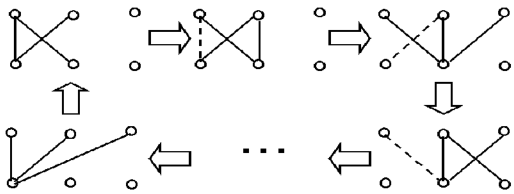


図 2: $K_{3,3}$ の $(3, 4)-$ cluttered ordering.

3. 完全二部グラフの Cluttered Ordering

完全グラフの cluttered ordering の構成法は Cohen 等 [2] によって与えられた．本稿では，2 次元の RAID に自然に対応するように，完全二部グラフの cluttered ordering の構成法について考察する．そのために，wrapped ρ-labelling と (d, f)-movement という 2 つの概念を導入する．

二部グラフ $H = (U, E)$ について $U = V \cup W$, $d = |E|$ とする．写像 $\rho : U \to \mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_2$ が $\rho(V) \subset \mathbb{Z}_d \times \{0\}$, $\rho(W) \subset \mathbb{Z}_d \times \{1\}$ を満たし，$\mathbb{Z}_d$ の各要素が $\{\rho(v) - \rho(w) | v \in V, w \in W, (v, w) \in E\}$ に一つずつ存在するとき，ρ を H の ρ-labelling と呼ぶ．さらに，U の部分集合 X, Y に対して，$\mathbb{Z}_d \times \mathbb{Z}_2$ において $\rho(Y) = \rho(X) + (\kappa, 0)$, $(\kappa, d) = 1$ を満たす整数 κ が存在するとき，ρ を H の wrapped ρ-labelling と呼ぶ．次に，(d, f)-movement について述べる．同形な二つの二部グラフ $H = (U, E)$, $H' = (U', E')$ について $U = V \cup W$, $U' = V' \cup W'$, $|V| = |V'|$, $|W| = |W'|$, $E = \{e_0, e_1, \cdots, e_{d-1}\}$, $E' = \{e'_0, e'_1, \cdots, e'_{d-1}\}$ とする．$\{0, 1, \ldots, d-1\}$ 上の置換 π を用いて，完全二部グラフ G を $H_0 := H$, $H_i := (U_i, E_i), 1 \le i \le d$ と $d + 1$ 個の部分グラフに分割する．但し，$E_i := (E_{i-1} \setminus \{e_{\pi(i-1)}\}) \cup \{e'_{\pi(d+i-1)}\}$, U_i は E_i の各辺に含まれる頂点の集合とする．このとき，$H_d = H'$ となり，$\max_{0 \le i \le \ell} |U_i| = f$ ならば π を H から H' への (d, f)-movement と呼ぶ．ここで，次の定理が得られる (証明は [1] を参照).

定理 同形な二部グラフ H,H' に対し，wrapped ρ-labelling と (d, f)-movement が存在するならば，完全二部グラフ $K_{d,d}$ において (d, f)-cluttered ordering は存在する．

参考文献

[1] T. Adachi, M. Jimbo, M. Müller, Constructions of a cluttered ordering for the complete bipartite graph, in preparation.

[2] M. Cohen, C. Colbourn and D. Froncek (2001), Cluttered orderings for the complete graph, COCOON 2001, Lect. Notes Comp. Sci. 2108, Springer-Verlag, 420-431.