

# 相関のあるノイズ下での画像修復のハイパーパラメータ推定について

綴木 馴<sup>1,2,3,4</sup>, 岡田真人<sup>4</sup>, 英保 茂<sup>2</sup>

**概要** : 本稿では確率的情報処理の枠組で画像修復を議論する。原画像は近接相互作用のみを持つガウスモデルで生成されるとし、各画素に重畳されるノイズは空間的な相関を持つガウスモデルで生成されるとする。画像修復に必要なハイパーパラメータを推定するための周辺事後確率の最大化手法に、極値方程式の反復法を用いる。しかし、この極値方程式を反復法を用いて解く方法では、アルゴリズムが収束しない場合があることを示す。この原因は、ハイパーパラメータが特異点を持つためである。それを検証するため、ハイパーパラメータが特異点を持たないようにパラメータを固定した。この場合、極値方程式を反復法を用いるアルゴリズムが収束することがわかった。

## On hyperparameter estimation of image restoration under spatially correlated noise

Jun Tsuzurugi<sup>1,2,3,4</sup>, Masato Okada<sup>4</sup>, Shigeru Eiho<sup>2</sup>

**Abstract** : We investigated the use of the Bayesian inference to restore noise-degraded images. The generative statistical models used for the original image and the noise were assumed to obey multi-dimensional Gaussian distributions. Hyperparameter is required to restore the distorted image. We use the steady state equations for hyperparameter estimations with maximal posterior marginal criteria. However, when we use the iterative method of the steady state equations, because the hyperparameter has a singular point, we fail to obtain optimal solution. Thus, we propose a new method for sub-optimal solution.

### 1 はじめに

本論文では確率的情報処理の枠組において画像修復を議論する [1, 2, 3, 4]。画像は近接相互作用のみを持つガウスモデルで生成し、各画素に重畳されるノイズは空間的な相関を持つガウスモデルで記述する [4, 5]。修復過程に用いた確率モデルが生成過程でのハイパーパラメータに一致するとき、修復誤差が最小値をとることが知られているが、本論文では、ハイパーパラメータの推定を周辺尤度最大化から求めることを試みる。

### 2 モデル

#### 2.1 生成モデル

一般的に画像は 2 次元であるが、本論文ではより一般的な  $d$  次元の正方格子上の画像を考える。一辺の画素数を  $L$  とする。この場合、画素の総数  $N$  は  $N = L^d$  となる。格子点  $i$  上の原画像の画素値を  $\xi_i$  とおく。画像  $\xi = \{\xi_i\}$  は以下の多重ガウス分布に従って生成されるとする。

$$P(\xi) = \frac{1}{Z_{\text{prior}}(\beta, h)} \exp[-H(\xi, \beta, h)] \quad (1)$$

$$H(\xi, \beta, h) = \xi^T (\beta G + hI) \xi \quad (2)$$

規格化因子  $Z_{\text{prior}}(\beta, h)$  は、

$$Z_{\text{prior}}(\beta, h) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} |2(\beta G + hI)|^{-\frac{1}{2}} \quad (3)$$

で与えられる。 $G$  と  $I$  は  $L^d \times L^d$  の行列であり、 $I$  は単位行列である。本論文では行列  $G$  が並進対称行列であるとす、その要素  $G_{i,j}$  を

$$G_{i,j} = 2d\delta_{(i-j),0} - \sum_{\delta} \delta_{(i-j),-\delta} - \sum_{\delta} \delta_{(i-j),\delta} \quad (4)$$

とする [4, 5]。ただし、 $d$  次元ベクトル  $\delta$  は次の値をとる。

$$\delta = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1) \quad (5)$$

一方で、式 (4) の  $\delta_{i,j}$  はクロネッカーのデルタである。したがって、 $\beta (> 0)$  は最近接相互作用の強さをあらわす変数で、この値が大きくなればなるほど近隣の画素値は同じ値をとろうとする。逆に  $\beta$  に比べて  $h (> 0)$  が大きくなればなるほどそれぞれの画素値は独立した値をとろうとする。 $\tau = \{\tau_i\}$  を劣化画像とする。 $\xi$  が原画像であるので  $\tau - \xi$  はノイズになる。ノイズを作成する劣化過程をあらわす条件付確率  $P_{\text{out}}(\tau|\xi)$  は以下の多重ガウス分布に従うとする。

$$P_{\text{out}}(\tau|\xi) = \frac{1}{Z_{\text{noise}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\tau - \xi)^T R^{-1}(\tau - \xi)\right] \quad (6)$$

$$Z_{\text{noise}}(R) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} |R|^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

ここで、 $R$  はノイズの相関行列であり、以下の式 (8) に示すように並進対称性を持つとする。

$$R_{i,j} = (1 - a)b^2\delta_{i,j} + ab^2 \exp\left[-\frac{(i-j)^2}{\kappa^2}\right] \quad (8)$$

ただし、 $0 \leq a \leq 1$  である。式 (8) で  $a = 0$  とおけば第二項が 0 となり、空間的な相関を持たないノイズと等価にな

<sup>1</sup> 福井工業高等専門学校  
 Fukui National College of Technology

<sup>2</sup> 京都大学大学院情報学研究所  
 Graduate School of Informatics, Kyoto University

<sup>3</sup> 奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科  
 Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology

<sup>4</sup> 理化学研究所脳科学総合研究センター  
 RIKEN Brain Science Institute

る．また， $i = j$  のとき， $a$  の値とは無関係に  $R_{i,i} = b^2$  となる．すなわち， $a$  が 1 に近づくほど，ノイズにおける各ピクセル間の相関性が強まる．ベイズの公式により式 (1) と式 (6) から，劣化画像  $\tau$  が与えられた場合の修復画像  $\xi$  の事後確率は，

$$P(\sigma|\tau) = \frac{P_{\text{out}}(\tau|\sigma)P(\sigma)}{\int d\sigma P_{\text{out}}(\tau|\sigma)P(\sigma)} = \frac{\exp[-H_{\text{eff}}]}{\int d\sigma \exp[-H_{\text{eff}}]} \quad (9)$$

$$H_{\text{eff}} = \sigma^T (\beta G + hI) \sigma + \frac{1}{2} (\tau - \sigma)^T R^{-1} (\tau - \sigma) \quad (10)$$

となる．ここでは原画像  $\xi$  の推定値として，修復画像  $\sigma$  の  $P(\sigma|\tau)$  に関する期待値を用いる．

$$\langle \sigma_i \rangle = \int d\sigma_i \sigma_i P(\sigma|\tau) \quad (11)$$

本論文では，この  $\langle \sigma_i \rangle$  を修復結果とする．ここまでの議論では， $\beta, h, a, b, \kappa$  などのハイパーパラメータが与えられた場合の修復アルゴリズムに関して述べた．実際の画像修復においては，ハイパーパラメータを推定する必要がある．そのハイパーパラメータ推定方法として，周辺尤度最大化基準を用いる．式 (1) と (6) の原画像とノイズの生成確率を用いると，劣化画像の確率  $P(\tau)$  は，

$$P(\tau) = \int d\xi P_{\text{out}}(\tau|\xi)P(\xi) \quad (12)$$

となる． $P(\tau)$  を周辺尤度と呼ぶ．周辺尤度  $P(\tau)$  はハイパーパラメータの関数である．周辺尤度最大化では，劣化画像  $\tau$  が与えられた場合に，周辺尤度  $P(\tau)$  の最大値を与えるハイパーパラメータの推定値とする．

### 3 結果

#### 3.1 画素の推定値と修復誤差

本論文では，相関のあるノイズ下でのハイパーパラメータの推定について議論する．そのためには，このモデルに関する Tsuzurugi と Okada によるフーリエ変換による修復画像の理論的取り扱いの知見が必要である [4, 5]．そこで，まず [5] の内容を手短かに説明する．式 (4) と (8) の行列  $G$  と  $R$  は， $i$  に関して並進対称性を持つので，これらはフーリエ変換により対角化できる．修復画素  $\sigma_i$  の離散フーリエ変換，逆フーリエ変換をそれぞれ

$$\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_j \sigma_j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}}, \quad \sigma_j = \frac{1}{\sqrt{L^d}} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}} \quad (13)$$

で定義する．周期的境界条件より， $\mathbf{k}$  の各成分は以下のような値をとる．

$$0, \frac{2}{L}\pi, \frac{4}{L}\pi, \dots, \frac{2(L-1)}{L}\pi \quad (14)$$

原画像  $\xi_i$  と劣化画像  $\tau_i$  の離散フーリエ変換も定義する．フーリエ表記を行なうと，式 (1) の事前確率  $P(\sigma)$  は，

$$P(\sigma) = \frac{1}{Z_{\text{prior}}(\beta, h)} \exp \left[ - \sum_{\mathbf{k}} (\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h) \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}} \right] \quad (15)$$

$$\tilde{G}_{\mathbf{k}} = \sum_{\delta} [2 - 2 \cos(\mathbf{k} \cdot \delta)] \quad (16)$$

となる． $\tilde{G}_{\mathbf{k}}$  は並進対称行列  $G_{i,j}$  の離散フーリエ変換である．式 (8) の  $R_{i,j}$  も同様に，

$$\tilde{R}_{\mathbf{k}} = (1-a)b^2 + ab^2 \sum_l e^{-\frac{l^2}{\kappa^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \quad (17)$$

となる．ただし，ベクトル  $\mathbf{l}$  の要素  $l$  がとりうる範囲は，

$$-(L-1) \leq l \leq L-1 \quad (18)$$

である．式 (7) の  $P_{\text{out}}(\tau|\xi)$  もフーリエ表記すると，

$$P_{\text{out}}(\tau|\xi) = \frac{1}{Z_{\text{noise}}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{R}_{\mathbf{k}}^{-1} (\tilde{\tau}_{\mathbf{k}} - \tilde{\xi}_{\mathbf{k}}) (\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}} - \tilde{\xi}_{-\mathbf{k}}) \right] \quad (19)$$

となる．修復画素  $\sigma_j$  の期待値は，そのフーリエ表記  $\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}}$  を用いて，

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}} \quad (20)$$

となる． $\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}}$  の期待値は，

$$\langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{\int d\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} e^{-\hat{H}_{\text{eff}}}} \int d\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} e^{-\hat{H}_{\text{eff}}} \quad (21)$$

となる．ただし， $\hat{H}_{\text{eff}}$  は式 (10) のフーリエ表記で，

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{k}} (\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h}) \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}} (\tilde{\tau}_{\mathbf{k}} - \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}}) (\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}} - \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}}) \quad (22)$$

である．また，ここでは原画像やノイズの生成確率をあらわす  $\beta, h, \tilde{R}_{\mathbf{k}}$  が既知ではないとしている．ただし，修復用のモデルは原画像，ノイズともに元の関数形と同じであるとする． $\beta, h, \tilde{R}_{\mathbf{k}}$  に対応するハイパーパラメータを  $\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{\tilde{R}}_{\mathbf{k}}$  とする．式 (21) を (20) に代入すると，修復結果  $\langle \sigma_j \rangle$  は，

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{k}} \sum_i \frac{\tau_i \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}} \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{i})]}{\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{\tilde{R}}_{\mathbf{k}}}} \quad (23)$$

となる．ピクセルごとの修復画像と原画像の差の平均二乗誤差  $E_1$  の期待値は，

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \langle \langle (\tilde{\xi}_{\mathbf{k}} - \langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \rangle) (\tilde{\xi}_{-\mathbf{k}} - \langle \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}} \rangle) \rangle \rangle \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}}{\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}} - \frac{\frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}}{\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{\tilde{R}}_{\mathbf{k}}}} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}}{\frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}} (\beta \tilde{G}_{\mathbf{k}} + h)} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

となる．ここで， $\langle\langle\cdot\rangle\rangle$  は同時分布  $P(\tau, \xi) = P_{out}(\tau|\xi)P_s(\xi)$  に関する平均である．このとき，

$$\hat{\beta} = \beta, \hat{h} = h, \hat{R}_{\mathbf{k}} = \tilde{R}_{\mathbf{k}} \quad (25)$$

であれば最小二乗誤差  $E_1$  は最低値，

$$E_{1min} = \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{k}} \left[ \frac{1}{\beta G_{\mathbf{k}} + h + \frac{1}{2\tilde{R}_{\mathbf{k}}}} \right] \quad (26)$$

をとる．より正確には， $\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R}_{\mathbf{k}}$  と  $\beta, h, \tilde{R}_{\mathbf{k}}$  のそれぞれの比が正しければ  $E_1$  は同じ最低値，式 (26) をとる．この式 (26) は修復の限界をあらわしている．同様に劣化画像と原画像の平均二乗誤差  $E_2$  を求めることができる．

$$E_2 = \left\langle \left\langle \frac{1}{N} \sum_j (\xi_j - \tilde{\tau}_j)^2 \right\rangle \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_i \hat{R}_{i,i} = b^2 \quad (27)$$

これにより， $E_2$  はノイズのフーリエ表記された相関行列の対角成分だけに依存することがわかる．

### 3.2 ハイパーパラメータ推定

式 (12) の周辺尤度  $P(\tau)$  は式 (3) と (7) を用いると，

$$P(\tau) = \frac{Z_{\text{posterior}}(\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R})}{Z_{\text{noise}}(\hat{R})Z_{\text{prior}}(\hat{\beta}, \hat{h})} \quad (28)$$

となる．ただし，

$$Z_{\text{posterior}}(\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{R}) = \pi^{\frac{N}{2}} \prod_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\hat{A}_{\mathbf{k}}}} \exp \left[ -(\hat{B}_{\mathbf{k}} - \frac{\hat{B}_{\mathbf{k}}}{\hat{A}_{\mathbf{k}}}) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \right] \quad (29)$$

である． $\ln$  は単調増加関数であるので対数周辺尤度  $\ln P(\tau)$  を最大化するのは  $P(\tau)$  を最大化するのと同値である．対数周辺尤度  $\ln P(\tau)$  は以下で与えられる．

$$\begin{aligned} \ln(P(\tau)) &= -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \ln \left( \hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}} \right) \\ &- \frac{N}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \ln(\hat{R}_{\mathbf{k}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \ln(\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h}) \\ &- \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h}) \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}}{\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}} |\tau_{\mathbf{k}}|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

式 (8) および (17) のノイズの相関行列は  $a, b$  および  $\kappa$  に依存する．これらの推定値を  $\hat{a}, \hat{b}$  および  $\hat{\kappa}$  とおくと，修復に用いたノイズモデルの相関行列は，

$$\hat{R}_{\mathbf{k}} = (1 - \hat{a})\hat{b}^2 + \hat{a}\hat{b}^2 \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \quad (31)$$

となる．この式を式 (30) に代入し， $\ln(P(\tau))$  を  $\hat{a}, \hat{b}^2$  および  $\hat{\kappa}^2$  で偏微分し， $\ln(P(\tau))$  の停留点が満たす方程式を

求めると，

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \left[ \sum_{\mathbf{k}} \left\{ \left( \frac{1}{\hat{a}} - 1 \right) \hat{b}^2 + \hat{b}^2 \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right\} \frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{a}} \right]^{-1} \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{a}}}{\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}} \right. \\ &\left. + \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\tau_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{a}} (\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h})}{\left( \hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \hat{b}^2 &= \left[ \sum_{\mathbf{k}} \left\{ (1 - \hat{a}) + \hat{a} \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right\} \frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{b}^2} \right]^{-1} \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{b}^2}}{\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}} \right. \\ &\left. + \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\tau_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{b}^2} (\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h})}{\left( \hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}^2 &= \left[ -\frac{\hat{a}\hat{b}^2}{\hat{\kappa}^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hat{R}_{\mathbf{k}}} \sum_l l^2 e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right] \\ &\times \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{\kappa}^2}}{\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}} \right. \\ &\left. + \sum_{\mathbf{k}} \left( \hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\tau_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{\kappa}^2} (\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h})}{\left( \hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}} \right)^2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (34)$$

となる．ここで，

$$\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{a}} = -\frac{1}{\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \left( -\hat{b}^2 + \hat{b}^2 \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right) \quad (35)$$

$$\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{b}^2} = -\frac{1}{\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \left( 1 - \hat{a} + \hat{a} \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right) \quad (36)$$

$$\frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial \hat{\kappa}^2} = -\frac{1}{\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \left( \hat{a}\hat{b}^2 \frac{1}{\hat{\kappa}^4} \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right) \quad (37)$$

である．本論文ではノイズモデルのハイパーパラメータ  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\kappa}$  の停留点をそれぞれ求めるために，停留点方程式 (32), (33), (34) のそれぞれに対して，計算機シミュレーションによる反復法を用いた．画像生成のハイパーパラメータ  $\beta = 0.5$  を  $h = 10^{-4}$  とし， $L = 16$  の画像  $\xi$  を式 (1) の確率分布  $P(\xi)$  に従って生成した．ノイズモデルのハイパー

パラメータを  $a = 0.5, b = 0.75, \kappa^2 = 9.0$  とし,  $L = 16$  の劣化画像  $\tau$  を式 (6) の確率分布  $P_{\text{out}}(\tau|\xi)$  に従って生成した. ハイパーパラメータ推定の際, 画像生成のハイパーパラメータは既知とし,  $\hat{\beta} = \beta = 0.5$  を  $\hat{h} = h = 10^{-4}$  に固定した. ノイズモデルのハイパーパラメータを  $a = 0.5, b = 0.75, \kappa^2 = 9.0$  とした. 推定の際には  $\hat{b}$  に関しては  $\hat{b} = b = 0.75$  に固定した. 残りの  $\hat{a}$  と  $\hat{\kappa}$  に関して式 (32) と (34) を反復法で解くことを試みた. 図 1 にその求解過程を示す. 図からわかるように反復法の  $\hat{a}$  と  $\hat{\kappa}$  の初期値

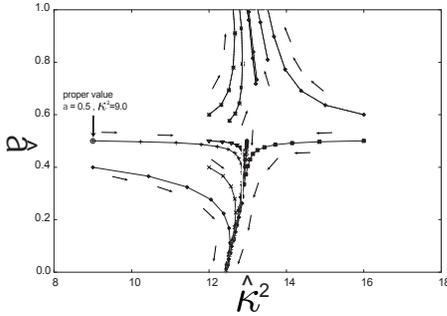


図 1:  $\hat{a}$  と  $\hat{\kappa}$  を反復法に求めた場合のダイナミクス.

を真の値  $\hat{a} = 0.5, \hat{\kappa}^2 = 9.0$  に設定しても, 反復法は収束しない. その他の初期値に関しても, 反復法は収束することなく, 求解過程は発散してしまう. このような現象の原因の一つとして, ノイズの確率モデルが持つ特異性が考えられる. 式 (8) のノイズの共分散行列の要素からわかるように,  $a = 0$  である場合, 分散  $R_{i,j}$  は  $\kappa$  に依存しない. このように, モデルの挙動がモデルを記述するパラメータによらなくなるようなパラメータ領域が存在する場合, そのモデルは特異性を持つという. この原因の真実性を確かめるために, ノイズモデルのハイパーパラメータ  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{\kappa}$  のうち二つ, 例えば  $\hat{a}$  と  $\hat{b}$ , を真の値に固定して ( $\hat{a} = 0.5, \hat{b} = 0.75$ ), 推定値  $\hat{\kappa}$  を反復法により求めた. その結果を図 2 に示す. 図から, 推定値  $\hat{\kappa}^2$  は真の値  $\kappa^2 = 9.0$  には収束しないが, ある一定値 (この場合は約 13) には収束することがわかる.  $\hat{a} \neq 0$  としているので, ノイズのモデルは特異性を持たない. これらの知見から, 反復法が収束しない原因をノイズの確率モデルが持つ特異性であると予想できる.

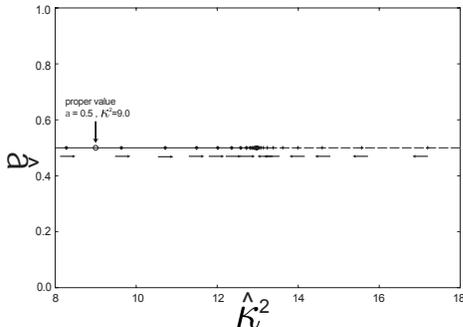


図 2:  $\hat{\kappa}$  を反復法に求めた場合のダイナミクス.

## 4 議論とまとめ

本論文では, 確率的情報処理の枠組内で画像修復を議論した. 画像の生成モデルとして多重ガウス分布を仮定した. ノイズの生成過程も並進対称な共分散行列を持つ多重ガウス分布に従うとした. 先行研究 [5] より, 修復に用いる確率モデルが生成モデルと完全に一致するとき, 修復誤差が最小になることが知られている. そこで, 修復の確率モデルを記述するハイパーパラメータを周辺尤度最大化の枠組で議論した. 対数周辺尤度の停留点方程式を反復法で解くアルゴリズムを用いた. その結果, 反復法を用いたハイパーパラメータの求解過程は収束せずに発散してしまうことがわかった. これを調べるために, ノイズモデルが特異性を持たない領域での反復法の収束を調べた. その結果アルゴリズムは収束することがわかった. これらの知見から, 反復法が収束しない原因はノイズの確率モデルが持つ特異性であると予想することができた. 特異性を解消する方法にはいろいろあるが, 一つの方法として, 推定に用いるノイズモデルを変更する方法が考えられる. 実際にはノイズの生成過程は未知であり, 画像修復を確率的に取り扱うために, ノイズの生成過程を記述する確率分布を仮定した. これは必ずしも推定において真の確率モデルを使う必要はないことを意味し, たとえ真のモデルに特異性があっても, 修復の際には特異性がないモデルを用いても構わないことを意味する. 特異性を持つ真のモデルを近似する特異性を持たないモデルの候補はたくさん存在する. その観点から考えると, 特異性を持たないモデルのうち, どのモデルがもっとも良い修復結果を与えるかを議論することは重要である.

## 参考文献

- [1] S. Geman and D. Geman, "Stochastic relaxation, Gibbs distribution and Bayesian restoration of images," *IEEE Trans. Pattern Anal. & Machine Intell.*, vol.6, pp.721-741, 1984.
- [2] "Probabilistic solution of ill-posed problems in computer vision," *Journal of the American Statistical Association*, vol.82, pp.76-89, 1987.
- [3] 田中和之, "統計力学的手法をもとにした画像修復," *日本物理学会誌*, vol.5, pp.25, 1999.
- [4] 西森秀稔, "有限温度の画像修復," *物性研究*, vol.73, pp.850-857, 2000.
- [5] J. Tsuzurugi and M. Okada, "Statistical mechanics of Bayesian image restoration under spatially correlated noise," *Physical Review E*, vol.66, 066704, 2002.