折畳次元を用いた金融時系列データの再現

河村 泰之*　橋本 有樹*

概要 株価の不思議な動きは長い間にわたり研究者の興味を惹いている．Mandelbrot が提唱してから，多くの研究者によって金融時系列データにおけるフラクタルの性質が確認されている．近年，新しく時間の尺度とは無関係の折畳次元が提案された．我々は実際の金融時系列データから折畳次元を計測し，その値を用いて時系列データのシミュレーションを行うことで時系列に対する折畳次元の有効性を支持する．同時に本論文では中点変位法の改良によるシミュレーション方法を提案する．

Reappearance of Financial Time Series Data via Folding Dimension

Yasuyuki Kawamura* and Yuki Hashimoto*

Abstract Researchers have been interested in a motion of financial value for a long time. Many researchers confirmed fractal peculiarity of financial time series data since Mandelbrot suggested. Folding dimension which has no relation with time scale has proposed recently. We support the validity of folding dimension for financial time series data via simulation of the data using the dimension. Meanwhile, this paper proposes the simulation method which is obtained from generalization of midplacement method.

1　はじめに

近年，経済市場において個人投資家の数が増加している．長引く不況と低金利，そしてインターネットの普及に伴ってホームトレードが可能になっていることが主な原因であると言われている．個人にとっては経済市場への参加は資産運用という目的が強いが，これによって財産の流動が活発化するなど社会に与える影響は大きい．最近では人工市場などに代表されるように，金融取引のモデル化やシミュレーションの研究はますます盛んである．

株価の変動に関する研究は Bachelier にはじまり [1]，後にブラウン運動過程として定式化された．この確率過程は金融関係の研究者の間ではランダムウォーク（過程）の名で広まっている．また，ランダムウォークとは別の立場からの研究で株価の不規則な変動は決定論的カオスであることも言われている．株価の変動が確率論であるか決定論であるか議論され始めて久しいが文献 [2] では両義性，すなわちどちらの性質も持つ中間的な性質であることが示唆されている．株価の不思議な変動は多くの研究者の興味を惹く．Mandelbrot は株価変動の研究中にフラクタルを発展させ，株価がフラクタルの性質を持つことを示している [3]．株価の変動についてはさまざまな研究がなされ，多様な理論やモデルが生み出されている．多くの性質がわかってきているが，すべての性質をあらわす理想的なモデルは発見されていない．さまざまな仮説を支持する／しないの両方から多くの実証研究がなされ，現在も解決していない．

単純化した株価の性質は理論的なモデルで表すことができるかもしれないが，実際の取引では直接的な利益が絡むので取引制度などに強く依存した複雑なものとなってしまう．また，仮にあるモデルの通りに推移すると，その性質を利用した取引が起こり，モデルを崩してしまうというような循環が解決をよ

*石川工業高等専門学校
Ishikawa National College of Technology

り難しくしている．実際の市場では，相場変動によるリスクに対し利益を最大にするような投資モデルであるポートフォリオと呼ばれる経済理論が用いられるのが一般的である．ポートフォリオ理論は株価が急激に大きく変動する状況を考えてはいないが，多くの場合はこの理論が通用する．残りの場合，つまりポートフォリオ理論が役に立たないような急激な変化が起こるのは，突然の破綻や外的な力によって変化がもたらされるときである．それらのほとんどは想定できない原因なので，健全な株価を対象とした数理モデルではおそらく対応できないであろう．

本研究では時間 t の関数である金融時系列データ $f(t)$ の変動は確率論的であるという立場でフラクタルの性質を利用し，データの解析，シミュレーションを行う．しかし，金融時系列でのフラクタルの性質は，一般的なフラクタルが持つ性質とは異なる．簡単にその違いを述べる．$f(t)$ は サンプリングする $t = t_n$ が離散的であるから離散値をとるわけではなく，金融データは本質的に離散の値をとる．つまり，時間 t_n と t_{n+1} の間では売買が行われていないので $t_n < t < t_{n+1}$ となる t に対する値 $f(t)$ に本来は意味がない．株価の本質は取引が行われるときに起こる変動にある．取引は不等間隔に行われているので，時間による粗視化では取引価格変動の性質を失ってしまう．

一般的な計測法（ボックスカウンティング法など）では，金融時系列データは時間軸の尺度によって，フラクタル次元が変化してしまう. つまり，同じ金融時系列のデータに対しても，時間軸の間隔によってフラクタル次元は異なる値をとる．そのため，金融時系列データでフラクタル次元を求めるには，時間に関係のない次元計測が必要である．その意味で，文献 [4] が提案する時間軸に依存しない次元，折畳次元は画期的である．本研究では折畳次元を用いて株価を再現する．

2　粗視化された極値と折畳次元

株に対する投資の対価には大きく分けて売買価格の差額（キャピタルゲイン）と配当（インカムゲイン）の2種類が考えられ，現在の市場は個人投資家の参加増により短期的なキャピタルゲインを狙う傾向にある．簡単に言えば，価格が極小値であるときに買った株を極大値のときに売ることを短期的に繰り返せば良い．しかし，現実的な売買には取引費用がかかるので，投資家の興味の対象は適当な値以上のキャピタルゲインである．

折畳次元を説明する前に粗視化された極値の概念を導入する．関数 $f(t)$ を R 上の実数値関数，C をある定数とし，$f(t-d_1) < f(t)-C, f(t+d_2) < f(t)-C$ となる $d_1, d_2 > 0$ が存在して，区間 $[t-d_1, t+d_2]$ 内で，$f(t)$ が最大であるとき，$f(t)$ を C で粗視化した極大値という．つまり，

$$\begin{aligned} & \exists d_1, d_2 > 0 \\ s.t.\quad & f(t-d_1) < f(t) - C, f(t+d_2) < f(t) - C \\ & f(t) = \max_{t-d_1<s<t+d_2} f(s) \end{aligned}$$

のとき，$f(t)$ を C で粗視化した極大値という．同様に，極小値に対しても定義でき，

$$\begin{aligned} & \exists d_1, d_2 > 0 \\ s.t.\quad & f(t-d_1) < f(t) + C, f(t+d_2) < f(t) + C \\ & f(t) = \min_{t-d_1<s<t+d_2} f(s) \end{aligned}$$

のとき，$f(t)$ を C で粗視化した極小値という．$C = 0$ とおいたときは一般に使われる極値と同じものを指し，$C \neq 0$ のときは C より小さい変動の変化点を無視して時系列データの変動を近似することに対応する．つまり，ある程度以下の変動は無視した祖視化と考えることができる．

金融時系列データを C で粗視化したとき，金融時系列には極大値と極小値が交互に現れる．これらはそれぞれ $t_1^C, t_2^C, \cdots$ の時間の値とする．このとき，$f(t)$ の C に対する極値の数を $m(C)$ とおく．また，$f(t)$ の極値から極値までの変化の絶対値を累積した

総変動 $R(C)$ を考える．$R(C)$ は

$$R(C) = \sum_{i=1}^{m(C)-1} |f(t_{i+1}^C) - f(t_i^C)|$$

と表すことができる．このとき，$R(C)$ は粗視化変動 C に依存する関数であり，サンプリング間隔によって変動するものではないため，元の金融時系列データの時間軸には依存しない．この $R(C)$ を用いて，折畳次元を定義できる．粗視化した総変動 $R(C)$ と粗視化の尺度 C の比 $R(C)/C$ に対して

$$R(C)/C \propto C^{-D_f} \tag{1}$$

の関係が成立しているとき，D_f を折畳次元と呼ぶ．このとき，$R(C)/C$ に対して時間軸方向の長さは決まっていない．つまり時間尺度に依存していない．このようにして求めた折畳次元を金融時系列データのフラクタル次元とする．

3 金融時系列データにおけるフラクタルブラウン運動シミュレーション

本研究では株価変動が確率論的であることを仮定した．金融時系列データが持つフラクタルの性質を保ちながらブラウン運動に似た動きを作ることで金融時系列データの再現を試みる．具体的には，先に導入した折畳次元を用いてフラクタルブラウン運動を生成する．フラクタルブラウン運動 $f(t)$ は

$$E[|f(t_2) - f(t_1)|^2] \sim |t_2 - t_1|^{2H}$$

の関係が成立するように定義される．ここで H はハースト指数と呼ばれ，経過時間の広がりを決定する．フラクタルブラウン運動の増分は定常

$$f(\Delta t) - f(0) = |\Delta t|^H (f(1) - f(0)) \sim |\Delta t|^H,$$

で，フラクタルブラウン運動自身は非定常過程

$$E[|f(\tau) - f(0)|^2] = \sigma^2 \tau^{2H}$$

であることが知られている．

フラクタルブラウン運動を生成するアルゴリズムとして中点変位法 [5] は考え方が簡単で実装も容易なのでよく引用される方法の一つである．中点変位法はグラフの中点に独立な変位を加算することにより独立性を保ち，フラクタル次元を利用しながら操作を繰り返すことでフラクタル性を保つ．

区間 $[0,1]$ において，$f(0)=0$ とする．そして，正規分布から選ばれた確率変数 $\delta_0 \sim N(0,\sigma_0^2)$ によって $f(1)=\delta_0$ を決める．次に中点のときの値 $f(1/2)$ を求める：$f(0)$ と $f(1)$ の中点を求めて，これに新たな変位 $\delta_1 \sim N(0,\sigma_1^2)$ を付け加える．すなわち，

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \delta_1$$

のようにして $1/2$ における値を決定する．さらに区間 $[0,1/2]$，$[1/2,1]$ について同様の操作を行い，$f(1/4), f(3/4)$ の値を決定する．同じ操作を $n-1$ 回くりかえした時点で区間は 2^{n-1} 個に分割されている．n 回目ではそれぞれ区間

$$\left[\frac{k-1}{2^{n-1}}, \frac{k}{2^{n-1}}\right] (k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1})$$

において，両端点の中点に新たな変位 $\delta_n^k \sim N(0,\sigma_n^2)$ を加えて，以下のように値を決める．

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) \\ = \; & \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{k-1}{2^{n-1}}\right) + f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\right) + \delta_n^k \\ & (k = 1, 2, \cdots, 2^{n-1}) \end{aligned}$$

このとき，フラクタルブラウン運動のハースト指数 H に対して加える変位の分散を

$$\sigma_n^2 = 2^{-2Hn}(1 - 2^{2H-2})\sigma^2 \tag{2}$$

とすることにより，中点変位法でフラクタルブラウン運動をシミュレーションできる．

4 提案手法

中点変位法では 2^n+1 点しか生成できず，後に行う実験には適さないので，基本的なアイディアは変

更せずに任意の点数を生成できるように工夫する．

step 0: 区間 $[0, 1]$ に生成したい点数を m として，中点変位法と同じように点を追加する．もし m が奇数なら $j = m/2$，偶数のときは $j = (m+1)/2$ とする．$r_0 = j/m$ として

$$f(j/m) = (1 - r_0)f(0) + r_0 f(1) + \delta_0$$

を求める．この先，区間 $[0, j/m]$ と区間 $[(j+1)/m, 1]$ について同様の操作を施す．

step n: 区間 $[k, l]$ に生成したい点数を m とする．もし m が奇数なら $j = m/2$ で偶数のときは $j = (m+1)/2$ とする．$r_i = j/m$ として

$$f(k + j/m) = (1 - r_i)f(k) + r_i f(l) + \delta_n$$

を求める．

このとき，δ_n の分散は

$$\sigma_n^2 = \left(\prod_{i=0}^{n} r_i \right)^{2H} (1 - r_n^{2-2H})(\sigma)^2$$

とする．煩雑になるので省略したが，実際は各 **step** で m が奇数のとき，$(m+1)/2$ と $m/2$ に分割しているので r_i は分けられた区間により値が変わってしまうので区別する必要がある．中点変位法と同じくこの方法では厳密な意味では正しいフラクタルブラウン運動とは言えない．それは，分けた区間ごとで考えているため，別の区間にある 2 つの値における変位はフラクタルブラウン運動の条件式を満たすとは限らないからである．

5 実験

シミュレーションを行うために必要な各種金融時系列データの折畳次元 D_f をそれぞれ測定する．測定では，まず折畳次元を求めるために様々な C に対して粗視化された極大値，極小値を求める．本研究では粗視化の範囲の最小値 C_{min}，最大値 C_{max} をデータの変動の絶対値の最大値，最小値とおいて行う．次に総変動 $R(C)$ を求め，C と $R(C)/C$ の関係をグラフにとる．このとき，折畳次元 D_f は式 (1) によって与えられるため，$\log(C)$ と $\log(R(C)/C)$ を計算し, 近似によって

$$\log(R(C)/C) = A \log(C) + B$$

を求める．このとき，A が求めるべき折畳次元 D_f となる．実際に求めた折畳次元 D_f を用いて，ハースト指数 $H = 1/D_f$ のフラクタルブラウン運動を生成する．この方法によって，実際の株価と比べても変動の大きさも概形も似た擬似株価が生成できる．

6 まとめ

本研究では中点変位法の基本方針を変えずに任意の点数を生成できるように拡張した方法を提案した．文献 [4] ではフーリエフィルタリング法によって折畳次元の有効性を示したが,（拡張した）中点変位法によっても良い結果が期待できる．

参考文献

[1] Bachelier.L "Theory of speculation" Gauthier-Villars.(1900) [Cootner(1964) に転載]

[2] 中島義裕「経済現象に見られる決定的性質と確率論的性質の両義性」情報処理学会論文誌，数理モデル化と応用，Vol. 40, No.Sig9(TOM2), pp.102-110,1999.

[3] B.B.Mandelbrot "The variation of certain speculative prices" J. of Business 36, 394-419, 1963.

[4] 熊谷善彰, "不等間隔時系列のフラクタル解析", 日本応用数理学会論文誌，11，4，pp.179-186 (2001)

[5] Fouriner A., D. Fussell and L. Carpenter, "Computer Rendering of Stochastic Models" Comm. of the ACM 25, pp.371-384 (1982)