資産と金利の変動による無差別曲線変動型ポートフォリオモデル

三山　晋大朗†　宮　崎　浩　一†　矢　萩　一　樹†

ポートフォリオにおける危険証券と安全証券の割合は, 投資家のリスク回避度に依存して決定される. 従来のポートフォリオモデルにおいて個人のリスク回避度は, 資産残高や金利水準に依存せず一定であると仮定されていた. 現実には, リスク回避度はこれらの要因に依存する. 本研究では, 無差別曲線の形状が資産残高と金利水準に応じて変化するような枠組みで, 多期間ポートフォリオモデルを構築する. 数値実験では, テールリスク対比で高い期待リターンが得られることが確認された.

A Portfolio Model Under Dynamical Indifference Preference Curve

Shintaro Miyama† ,Koichi Miyazaki† and Kazuki Yahagi†

A ratio of risky asset to safety asset in a portfolio is decided based on the risk preference of an investor. Most of the existing portfolio models assume that the risk preference of the investor is not dependable on the asset amount and the level of risk-free interest rate. In reality, it is not. In this research, we propose the multi-period portfolio model under the indifference preference curve that dynamically changes its shape in proportion to the asset amount and the level of risk-free interest rate. Our numerical examples indicate that the investment performance to the tail risk is improved.

1. はじめに

資産を安全証券と危険証券に分けて投資する際, その投資配分は投資家のリスク回避度に依存する. リスク回避的な投資家であれば安全証券に多く投資し, リスク愛好的な投資家であれば, 危険証券に多く投資する. 投資家のリスク回避度は無差別曲線の傾きによって表現される. 従来, 同じ投資家のリスク回避度は常に一定であり, 無差別曲線の傾きは変わらないと仮定されてきた. しかし現実には, 同じ投資家でも資産や安全利子率（以下金利と呼ぶ）の水準によってリスク回避度が変わることは多々ある. 資産に余裕がなければリスクに敏感になり, 逆に資産が増えればリスクに寛容になる. また, 金利の水準によって安全証券に対する投資家の魅力が変わり, 相対的に危険証券に対するリスク回避度が変化する. そこで本研究では, 資産と金利の変動によって無差別曲線の傾きを変動させ, 投資戦略にも影響を与えるようにし, リスク回避度の変化が反映されるモデルを提案する.

† 電気通信大学システム工学科
Department of Systems Engineering,The University of Electro-Communications

2. 従来モデルと本研究モデル

2.1 従来のポートフォリオモデル [1)]

複数の危険証券と安全証券を組み合わせて最適な投資戦略を決定する仕組みをポートフォリオモデルと呼ぶ. ここではまず, 本研究において用いる株価過程を示したうえで, 従来のポートフォリオモデルに関して述べる. ポートフォリオモデルとしては, 投資期間が 1 期間の場合を詳しく説明し, その後多期間 (n 期間) モデルへ接続する.

(i) 株価の従う確率過程

本研究では, 株価の従う確率過程を幾何ブラウン運動で表現する. シミュレーションを利用するため, ある株式 i の価格 S_i が従う過程として, 以下のような離散近似式を利用する.

$$\frac{\Delta S_i}{S_i} = r_i \Delta t + \sigma_i \varepsilon \sqrt{\Delta t} \tag{1}$$

式 (1) において,$r_i \Delta t$ はドリフト項であり, 株価リターンの期待収益率を表す.$\sigma_i \varepsilon \sqrt{\Delta t}$ はウィーナー過程と呼ばれ, 株式 i のリターンの標準偏差, 標準正規分布に従う無作為標本, 経過時間の平方根の積で表現される. よって, 株式収益率 $\frac{\Delta S_i}{S_i}$ の推移は, このドリフト項とウィーナー過程の和で表現される確率過程である. 以下では, 特に k 期に関する株式 i の式 (1) から得られ

る実現収益率 $\frac{\Delta S_{i,k}}{S_{i,k}}$ を r_{ik} と表記することにする．

(ii) 効率的フロンティア

危険証券のみでポートフォリオを構築するとき, 一定の期待リターン μ_P の下で, リスクを最小にするポートフォリオを効率的ポートフォリオと呼び, これらの集合を効率的フロンティアと呼ぶ. ここでは, ポートフォリオに含まれる危険証券が２つの場合を例としてとりあげる．効率的ポートフォリオは, 以下の問題の x_i を解くことで求まる.[2)]

$\sum_{i=1}^{2} r_i x_i = \mu_P, \sum_{i=1}^{2} x_i = 1$ の下で,

$\min\{\sigma_P\} = \min\left\{\sum_{i}^{2} \sigma_{ij}^2 x_i x_j\right\}$．（分散最小化）

x_i：証券 i への投資割合

r_i：証券 i の期待リターン

σ_{ij}：証券 i と証券 j の共分散（$\sigma_{ii} = \sigma_i$ とする）

μ_P：効率的ポートフォリオの要求リターン

σ_P：効率的ポートフォリオの標準偏差

ベクトルと行列を用いてこの問題を書き直せば,$r^T x = \mu_P, \mathbf{1^T} x = 1$ の下で,

$\min\{\sigma_P\} = \min\left\{x^T \mathrm{V} x\right\}$ となる x を求める問題として表される.$\mathbf{r}, \mathbf{x}, V$ は次式のように定義する．

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

ラグランジアンは, 次式のように表される．

$$\mathrm{L}(x, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbf{x}^T \mathrm{V}\mathbf{x} + \lambda_1(\mu - \mathbf{r}^T\mathbf{x}) + \lambda_2(1 - \mathbf{1}^T\mathbf{x}) \quad (2)$$

ラグランジュの未定乗数法により,x を次式で表す．

$$x = \frac{(\gamma \mathrm{V}^{-1}\mathbf{r} - \beta \mathrm{V}^{-1}\mathbf{1})\mu_P + \alpha \mathrm{V}^{-1}\mathbf{1} - \beta \mathrm{V}^{-1}\mathbf{r}}{\mathrm{D}} \quad (3)$$

ここで, 各パラメータは以下の通り．

$\alpha = \boldsymbol{r}^T V^{-1} \boldsymbol{r}, \beta = \mathbf{1}^T V^{-1} \boldsymbol{r}$

$\gamma = \mathbf{1}^T V^{-1} \mathbf{1}, D = \alpha\gamma - \beta^2$.

さらに (3) 式に左から V と x^T をかけ,$x^T \mathrm{V} x = \sigma^2$ を求めると, 以下のようになる．

$$\sigma_P^2 = \frac{\gamma \mu_P^2 - 2\beta\mu_P + \alpha}{D} \quad (4)$$

式（4）を次式のように変形すると, 図１で示すような効率的フロンティア f_1 となる．

$$f_1 = \mu_P = \sqrt{\sigma_P^2 D + \frac{\beta^2}{\gamma^2} - \alpha} + \frac{\beta}{\gamma} \quad (5)$$

前述のように, 多期間モデルの実現収益率 r_{ik} は変動するが, 期待リターン r_i は常に一定であるため, 効率的フロンティア f_1 は, 全期間で共通となる．

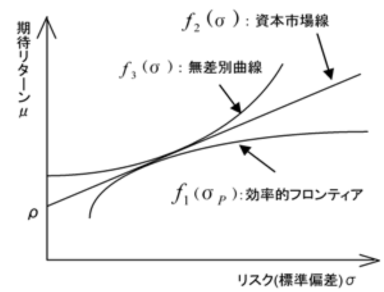

図１　ポートフォリオモデル

(iii) 資本市場線

危険証券のみの場合は効率的フロンティア上のポートフォリオが最適となるが, 安全証券も含めた投資の場合は, 図１の直線 f_2 のような資本市場線（リスクが０である金利 ρ から出発し, 効率的フロンティア f_1 と接する直線）上のポートフォリオが最適となる. 事実, 図１から一定のリスク水準において, 資本市場線上のポートフォリオの期待リターンは, 常に効率的フロンティア上のポートフォリオのものよりも高いことが分かる. 資本市場線は, 以下の式で表される [2)].

$$f_2 = \mu = \sqrt{H}\sigma + \rho \quad (6)$$

ただし, パラメータ H は以下のようになる．

$H = \alpha - 2\beta\rho + \gamma\rho^2$,

金利 ρ を一定とする場合, 効率的フロンティア f_1 が時間に依存しないので, 資本市場線 f_2 も何れの期間においても共通となる．

(iv) 無差別曲線

ある一定の効用（投資家の満足度）水準の下で, 選択できるリスクとリターンの組は複数存在する. 例えば, ローリスク・ローリターンの投資と, ハイリスク・ハイリターンの投資が投資家にとって同じ効用を与えるとき, 両者は無差別であると呼ぶ. 無差別となるリスク・リターンの組を結んだものを無差別曲線と呼び, 図１における曲線 f_3 となる. 従来のモデルでは, 無差別曲線は次のような二次曲線として表現される．

$$\mu = a\sigma^2 + b \quad (7)$$

μ：無差別曲線の期待リターン

σ：無差別曲線の標準偏差

a, b：形状パラメータ

ここで, 傾き a は投資家のリスク回避度を表し, 投資家毎に異なる値を持つ. 従来モデルでは, リスク回避度 a は一定であると仮定されてきた．

2.2　本研究モデル

(i) 資産の定義

まず, 無差別曲線に資産変動の影響を反映させるため, 各期の投資家の資産を定義する. 初期の資産 A_0 を 1 とし,k 期の資産を A_k を以下のように定義する.

$A_k = \prod_{k=1}^{K} a_k, a_k = 1 + \sum_{i=1}^{n} r_{ik} x_{i(k-1)}$

a_k：k − 1 期に対する k 期の資産増加率.($a_0 = 1$)

r_{ik}：証券 i の k 期における収益率 （ 式 (2) 参照 ）

x_{ik}：市場ポートフォリオにおける証券 i への k 期の投資割合（安全証券を含む）. ただし $\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = 1$.

(ii) 資産変動と金利変動が無差別曲線に及ぼす影響

ここで, 具体的に資産や金利の変動が, 投資に対してどのような影響を及ぼすのかを考察する. 投資によって資産 A_k が増えれば, リスクに寛容になるため, リスク回避度は低下し, 無差別曲線の傾きが小さくなる. 資産 A_k が減少した場合には, リスク回避度が上昇し, 無差別曲線の傾きは大きくなる. 次に金利が上昇した場合, 無リスクで得られるリターンが増え, 安全証券の魅力が増すので安全証券に多く投資するようになり, 投資家のリスク回避度は大きくなり無差別曲線の傾きは大きくなる. 逆に金利が低下した場合は危険証券の魅力が高くなり, 投資家のリスク回避度は低下するので, 無差別曲線の傾きは小さくなる.

(iii) 無差別曲線変動型モデル

(ii) で議論した内容を反映させ, 従来のモデルを改良する.（7）式の無差別曲線の傾きに, 金利を比例, 資産水準を反比例させることで, 本研究モデルにおける無差別曲線を提案する.

$$f_3 = \mu_{Uk} = (a\frac{1+\rho}{A_k})\sigma_{Uk}^2 + b \qquad (8)$$

a：リスク回避度 , b：形状パラメータ

本研究では, この無差別曲線を用いたポートフォリオモデルを「無差別曲線変動型ポートフォリオモデル」と呼び, 以後は簡単に変動型と呼ぶ. また, 従来のモデルを固定型と呼ぶ.

(iv) 投資戦略の決定

投資家の無差別曲線が資本市場線と接するとき, その接点ポートフォリオは投資家に最も高い効用を与え, 投資家にとって最適な投資戦略となる. 具体的には, 以下の点が本モデルにおける最適なポートフォリオとなる.

$$(\sigma, \mu) = \left(\frac{\sqrt{H}A_k}{2(1+\rho)\mathrm{a}}, \frac{HA_k}{2(1+\rho)\mathrm{a}} + \rho\right) \qquad (9)$$

3. シミュレーション

3.1　シミュレーションの設定

シミュレーションでは, 金利 $\rho = 1$ % (一定), 危険証券間の相関は 0 とし, 危険証券 2 種類と安全証券を用いて資産を 60ヶ月運用する.2 種類の危険証券の期待リターンとリスクを 25 通り設定し, 各株価のサンプルパスは, 式 (1) を用いて 1000 本発生させた.

3.2　評価項目の定義

変動型と固定型を比較するために, 期待リターン, シャープレシオ, テールリスク, テールリスクレシオの 4 つの指標を評価項目として設定した.

(i) 期待リターン

1000 個のサンプルパスを用いて投資を 60ヶ月行い, パスごとに初期資産に対して最終的な資産の増加割合を計算し, それらの平均を期待リターンと定義する.

期待リターン $= \frac{1}{1000}\sum_{n=1}^{1000}(A_{60} - 1)$

(ii) シャープレシオ

最終的な資産の期待リターンから金利を引いたものを, 資産のリターンの標準偏差で割ったもの.

(iii) テールリスク

金利のみで資金を運用した場合よりも, ポートフォリオで運用した最終的な資産が少なくなる確率をテールリスクとして定義する.

テールリスク $= P\{A_{60} | A_{60} < (1+\rho)^{60/12}\}$

(iv) テールリスクレシオ

最終的な資産の期待リターンから金利を引いたものを, 資産のリターンのテールリスクで割ったもの.

4. 実験結果と考察

資産の運用結果に基づくシャープレシオを固定型と変動型でそれぞれ表 1, 表 2 に示す. シャープレシオが大きいほど, リターンに対して標準偏差が小さい事を意味するため, 一般的にはシャープレシオが大きいほど良い運用結果であるとされている. そこで, 表 1 と表 2 を比較すれば, 固定型の最終資産のシャープレシオが, 全てのリスク, リターンの水準で変動型のものよりも大きい値となっており, 一見, 固定型の運用が優れたものとなっている. ここで, 運用後の資産の分布を確認することで, 変動型のシャープレシオが小さくなった理由を考察する. リスク, リターンの組み合わせのうち 1 つをサンプルとして取り上げ, 運用を行った最終的な資産の分布を図 2 に示す. 図 2 から分かるように, 最終資産が 1.27 倍以上になる頻度は, 固定型よりも変動型の方が高くなっている. 変動型で運用を行ったために, 良い運用結果が得られるケースが増え,

表 1　最終資産のシャープレシオ (固定型)

r1 \ r2	3%	6%	9%	12%	15%
2%	0.28	0.29	0.29	0.29	0.29
4%	0.40	0.40	0.40	0.40	0.40
6%	0.44	0.43	0.45	0.43	0.43
8%	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45
10%	0.46	0.46	0.46	0.46	0.46

表 2　最終資産のシャープレシオ (変動型)

r1 \ r2	3%	6%	9%	12%	15%
2%	0.27	0.27	0.27	0.27	0.27
4%	0.37	0.36	0.36	0.35	0.35
6%	0.40	0.39	0.38	0.38	0.38
8%	0.41	0.40	0.39	0.39	0.39
10%	0.42	0.41	0.40	0.40	0.40

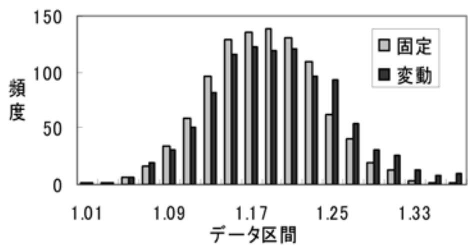

図 2　最終的な資産の分布

分布が上方に広がっているのが分かる. つまり, 好ましい意味合いで資産の分布のばらつきが大きくなったために, 変動型のシャープレシオは固定型のものよりも小さい値になった. 図 2 によれば変動型の運用結果が固定型のものよりも優れているのは明らかであるにも関わらず, 表 1〜表 2 では固定型の運用結果が変動型のものよりも優れているように見えたのは, シャープレシオにおけるリスクの定義に原因がある. 一般的にリスクは標準偏差で捉えられ, 平均からの乖離幅が大きいほどリスクが高いと考えられる. しかし, 真にリスクとなるのは, 期待リターンから下側に乖離する下方リスクのみであり, 平均よりも多くの収益を上げた場合にはリスクとはならないはずである. しかし, 標準偏差を用いた場合は, この期待リターンを上回る収益の乖離幅までもリスクとして捕らえているため, 変動型のシャープレシオは固定型のものよりも小さくなった. そこで本研究では, 表 1〜2 において標準偏差の代わりにテールリスクを用い, 下方リスクだけをリスクとして評価したテールリスクレシオを表 3〜4 に示した.

このように標準偏差ではなくテールリスクによってリスクを評価した場合には, 変動型の方が固定型よ

表 3　最終資産のテールリスクレシオ (固定型)

r1 \ r2	3%	6%	9%	12%	15%
2%	0.86	2.06	2.63	2.95	3.42
4%	3.77	6.82	9.03	9.29	9.46
6%	6.76	10.66	13.70	14.06	14.28
8%	7.29	13.92	14.60	14.96	15.19
10%	8.17	14.48	15.17	17.47	17.72

表 4　最終資産のテールリスクレシオ (変動型)

r1 \ r2	3%	6%	9%	12%	15%
2%	0.88	2.06	2.53	2.92	3.36
4%	4.04	7.37	9.78	10.09	10.28
6%	6.84	10.63	14.97	15.38	15.64
8%	7.90	13.70	16.03	16.45	16.71
10%	8.29	15.88	16.70	17.12	17.39

りも運用結果が良好となるケースが多い事が表 3 と表 4 の比較から分かる. 従来のモデルである固定型は危険証券への投資割合が常に一定であった. しかし, 本研究モデルである変動型では, 資産の状況に合わせて投資割合を変化させている. 株価が下がれば資産は減るため危険証券への投資割合は減少し, 株価が上がれば資産が増えるため危険証券への投資割合は増加する. このように, 株価による資産の変動によって投資割合を調整してリスクをヘッジするため, 変動型のテールリスクレシオは固定型のものよりも大きくなる. 結論として, 本研究モデルである変動型を用いることで, 株価変動の下方リスクを限定的にしたうえで, 従来のモデルである固定型よりも高い期待リターンを得ることが可能となった.

5. まとめと今後の課題

本研究では, 資産と金利の変動によって無差別曲線の傾きが変動するモデルを作成した. シミュレーションを行った結果, 変動型モデルを用いることで, テールリスクを殆ど上昇させること無く, 従来の固定型モデルよりも高い期待リターンを得ることが出来た. 今回はシミュレーションにおいて資産のみを変動させたが, 金利の変動によってどのような結果が得られるか, また資産間の相関構造の与える影響はどの程度であるかを検討することは今後の課題とする.

参　考　文　献

1) 新井富雄, 渡辺茂, 太田智之: 資本市場とコーポレート・ファイナンス, 中央経済社, pp.58-83(1999).
2) 田畑吉雄, 経済の情報と数理 7 数理ファイナンス論, 牧野書店, pp.37-51(1993).