

## デルタヘッジによる収益の不確実性に関する検定モデル

矢 萩 一 樹<sup>†</sup> 宮 崎 浩 一<sup>†</sup>

オプションの市場価格が理論価格より割高である場合には、オプションを売却してデルタヘッジを行えば理論上は確実に収益が上がるはずであるが、実際には損失が発生することがある。本研究では、そのメカニズムを解明するために、デルタヘッジの効率性に着目したシミュレーションモデルを提案した後、実データに基づいて本モデルを利用した仮説検定を行う。デルタヘッジを行う際に使用するデルタの算出には、実現したボラティリティ、各時点のインプライド・ボラティリティ、GARCH ボラティリティの3種類を用いることで、これらのボラティリティがデルタヘッジに与える効率性の違いを比較した。また、分析をより現実的なものとするため、デルタヘッジにおける株式の売買コストを考慮したうえで、ヘッジ頻度を変えた分析からデルタヘッジの効率性とヘッジコストとのトレードオフを確認した。

### The model of hypothesis tests in the delta hedging strategy

KAZUKI YAHAGI<sup>†</sup> and KOICHI MIYAZAKI<sup>†</sup>

When the market price of an option is higher than the theoretical price of it, theoretically, we can make profit with 100% certainty by selling the expensive option and activating the delta-hedging strategy. However, in reality, we sometimes lose in the option trade. In this research, we clarify why such a counter intuitive situation occurs based on our simulation model and hypothesis tests focusing on the efficiency in the delta hedging. We examine the hedging efficiency depending on the delta in the delta-hedging by utilizing the three kind of volatilities such as actual volatility in the period, implied volatility in each delta-hedging timing and GARCH volatility. Making our analysis to be more realistic, we introduce the trading cost of the underlying equity in the delta-hedging and examine the trade-off between the hedging cost and the hedging efficiency by comparing the results in the different hedging frequencies.

#### 1. はじめに

オプション価格評価式を初めて与えた有名なブラック・ショールズモデル, Black and Scholes(1973)<sup>1)</sup> が発表されてから 30 年以上が経過した今日, オプション市場は金融市場参加者にとって必要不可欠な市場に発展した。また, 金融工学もこの 30 年間に爆発的に発展し, オプション評価に関する研究は, 数多く行われてきた。しかし, オプション評価研究の方向性が評価モデルの精緻化に向き, 実証的研究が比較的手薄にある。なかでも, デルタヘッジ戦略に関するものは殆ど見当たらない。

本研究の目的は, 淵江(2002)<sup>2)</sup> にみられるような理論的には収益があがる取引を行っているにもかかわらず幾つかの限月では損失が発生するメカニズムを,

デルタヘッジの効率性に着目し, シミュレーションモデルによる仮説検定に基づいて明らかにすることである。モデルの概要は, (1) 株価リターンから株価過程のパラメータを推定したうえで, シミュレーションにより株価のサンプルパスを発生させる, (2) 割高なオプションを売却して, 株価のサンプルパス毎にデルタヘッジを行い収益の分布を描く, (3) この収益の分布に基づいて仮説検定を行う, となる。

デルタヘッジを行う際のデルタとしては, 割高なオプションの売却時点のインプライド・ボラティリティ, 日々のインプライド・ボラティリティ, GARCH モデルに基づくボラティリティから求められる 3 通りを利用する。売却する割高なコール・オプションとしては, イン・ザ・マネー, アット・ザ・マネー, アウト・オブ・ザ・マネーの 3 種類を対象とし, オプションの行使価格による影響も検討した。デルタヘッジにおける株式の取引コストも考慮した。また, モデルの概要 (2) で示した取引 1 つの収益分布を表現する確率分布に基

<sup>†</sup> 電気通信大学システム工学科  
Department of Systems Engineering, The University of  
Electro-Communications

づいて多数取引を行うことを想定した（オプショントレーダーは多数取引を行っている）収益の平均の分布に基づく仮説検定も合わせて行った。

## 2. 本研究に用いるファイナンスの概念、公式、及び用語

### 2.1 オプションとは

オプションとは、「所定の期日（または期間内）に、ある特定の資産をあらかじめ定めた価格で買う（売る）ことができる権利」のことであり、オプションに関して以下の用語を用いる。

満期 ( $T$ ): 所定の期日

権利行使価格（ストライクプライス）( $K$ ): あらかじめ定められた価格

原資産 ( $S$ ): オプションが取引対象とする特定の資産

コール・オプション: 行使価格で原資産を買うことができる権利

ヨーロピアン・オプション: 権利行使できるタイミングがオプション満期に限るもの

プレミアム ( $f$ ): オプション自体の価格

コール・オプションに関する場合

イン・ザ・マネー: 原資産価格が権利行使価格よりも大きい場合

アウト・オブ・ザ・マネー: 原資産価格が権利行使価格よりも小さい場合

アット・ザ・マネー (ATM): 原資産価格と権利行使価格が等しい場合

株式オプションに関する具体例を用いて、オプションの用語とオプションの収益に関して確認する。「現在、XYZ社の株式が1000円として、1ヶ月後にXYZ社の株式を1000円で買う権利をA氏は100円で購入した」という状況に関してオプション用語を用いて明確に述べると、「現在、原資産であるXYZ社の株式が1000円として、オプション満期が1ヶ月、権利行使価格が1000円のヨーロピアン・コール・オプションをプレミアム100円でA氏は購入した」となる。このとき、満期時点において、横軸にXYZ社株価を縦軸にA氏の収益をグラフ化したものを図1の細線に示した。また、太線はプレミアム支払った場合のオプション購入による利益、点線はXYZ社株式を単純に購入した場合の収益である。

### 2.2 デルタヘッジに基づくオプション評価

ここでは、デルタヘッジの考え方に述べる。まず、株価が従う確率過程として、次の幾何ブラウン運動を仮定する。

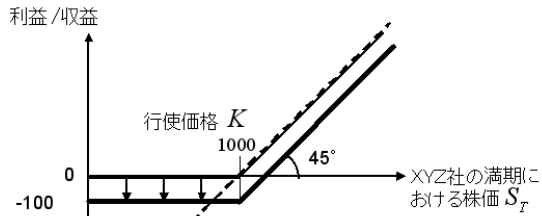


図1 コール・オプションのペイオフダイアグラム  
Fig. 1 Call option payoff diagram.

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (1)$$

ここで、 $t$  は時間、 $\mu, \sigma$  はそれぞれ株価リターン期待値とボラティリティである。原資産価格  $S$  が (1) 式に従うときに、オプション価格を  $f(t, S)$  で表すと、伊藤の公式から  $f(t, S)$  の従う過程は、

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW(t). \quad (2)$$

株価が従う確率過程 (1) 式をみると確率的振る舞いを示す部分は  $\sigma dW_t$  であり、オプション価格が従う確率過程 (2) 式において確率的振る舞いを示す部分は  $\frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW(t)$  となる。そこで、オプションを1単位売却すると共に、原資産株式を  $\frac{\partial f}{\partial S}$  単位購入して価格変動リスクのない（確率的振る舞いのない）無リスクポートフォリオを構築することを考える。これをオプションのデルタヘッジと呼ぶ。

また、コール・オプションの評価式は次のように表わされる。

$$S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2). \quad (3)$$

このとき、

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx, \quad (4)$$

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (5)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}. \quad (6)$$

ここで、(3) を原資産株価  $S_t$  で偏微分すると、コールオプションのデルタが求まる。

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \Phi(d_1). \quad (7)$$

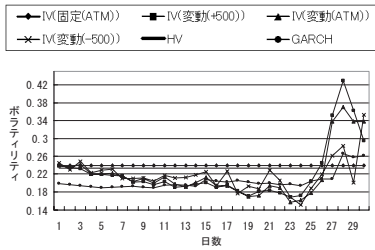


図 2 2月限月に関するボラティリティの水準  
Fig. 2 The level of volatilities in January 2004 contract.

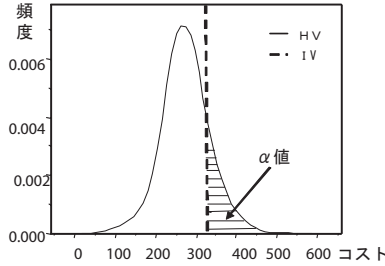


図 3 シミュレーション結果 (HV) の分布と IV の位置関係  
Fig. 3 The distribution of the hedging cost based on our simulation model and the  $\alpha$ -value used in hypothesis test.

### 2.3 GARCH(1,1) モデル

GARCH(1,1) モデルでは、 $n$  時点の株式リターンの分散  $\sigma_n^2$  は、長期的な分散の平均  $V$ 、一時点前の株式リターンの分散  $\sigma_{n-1}^2$  と一時点前の株式リターンの二乗  $\mu_{n-1}^2$  から次式のように求められる。

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \alpha w_{n-1}^2 + \beta \sigma_{n-1}^2, \quad (8)$$

$$\gamma + \alpha + \beta = 1. \quad (9)$$

### 3. 本研究モデルの目的

本研究モデルの目的は、主に次の 3 つである。

- (1) 取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティの水準  $\sigma_A$  を完全に正しく予測できた場合に、オプションを売却してデルタヘッジ（正しく予測できたボラティリティから計算したデルタに基づく）を行う取引によって利益をあげられるといえるかを検定すること。
- (2) 取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティ  $\sigma_A$  がインプライド・ボラティリティ  $\sigma_I$  よりも高いか低いかが正しく予測できるが、 $\sigma_A$  の水準までは予測できない場合に、オプションを売却してデルタヘッジ（何らかの情報や予測によるボラティリティから計算したデルタに基づく）を行う取引によって利益をあげられるといえるかを検定すること。

(3) この単一の取引を独立に複数回行った場合の平均の利益に関して、(1),(2) と同様の仮説検定を行うことである。

また、コストとヘッジ間隔を各研究目的に対して考慮し、収益性の観点からそのトレードオフをみる。

### 4. 本研究モデル

数値実験の対象となるオプションは、2004 年 1 月から 5 月までの各限月の日経 225 コール・オプションであり、オプション売却日において行使価格が ATM, ATM-500, ATM+500 の 3 種類をとり上げる。

本研究で取り上げるボラティリティは 3 種類あり、ボラティリティ  $\sigma_A$  はオプション満期までに実現する株式リターンの（図上では HV と表記）ボラティリティ、GARCH ボラティリティは推定式に各限月のオプション売却時点から 5 年間遡った日次データに基づいて S-plus を用いて推定したパラメータを用いて算出。3 つめは、各時点におけるインプライド・ボラティリティ（図上では IV(変動(・)) と表記）であり、これは、各時点においてオプション市場から観測されるものである（図 2 参照）

#### 研究目的 (1) に関するモデル

まず、株価が従う確率過程 (1) 式に基づいてオプション満期までの 30 営業日に関する株価のサンプルパスを 1000 本発生させ、サンプルパス毎にデルタヘッジを行い、デルタヘッジコストを求める。これらが、デルタヘッジの収益性に関する検定に用いられる現実のデルタヘッジコストの分布となる。

算出された分布に対して、帰無仮説を  $H_0$ 、対立仮説を  $H_1$  とした仮説検定を有意水準  $\alpha\%$ （4 節の数値実験では 20%, 10%, 5% を採用する）の下で行う。（図 1 を参照）

$H_0$ : 割高なヨーロピアン・コール・オプションを売却してデルタヘッジを行ってもその収益はプラスにならない。

$H_1$ : 割高なヨーロピアン・コール・オプションを売却してデルタヘッジを行えば、その収益はプラスになる。

#### 研究目的 (2) に関するモデル

基本的には研究目的 (1) と手続きは同じであるが、 $\sigma_A$  の水準が予測できない場合のモデルである。ここでは、 $\sigma_A$  の代わりに各時点においてオプション市場で観測されるインプライド・ボラティリティ、予測によるボラティリティとして GARCH(1,1) モデルから予測されるボラティリティを用いる。

#### 研究目的 (3) に関するモデル

この単一の取引を複数回行った場合の平均の利益に

表 1 研究目的 (1), (2) の結果例 (ヘッジ間隔 1 営業日, コスト 0 % のときの仮説検定結果)  
 Table 1 The result of the profits and hypothesis test (1day hedging interval, trading cost 0%)

	限月	取引開始日の Vol			値			検定 (HV)			検定 (GARCH)			検定 (IV 変)			
		IV	HV	IV-HV	HV	GARCH	IV(変)	20 %	10 %	5 %	20 %	10 %	5 %	20 %	10 %	5 %	
-500	Jan-04	27 %	22 %	5 %	13 %	69 %	62 %		x	x		x	x	x	x	x	x
	Feb-04	26 %	15 %	11 %	0 %	44 %	56 %					x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23 %	16 %	7 %	2 %	52 %	71 %					x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24 %	16 %	8 %	12 %	83 %	82 %			x	x	x	x	x	x	x	x
	May-04	24 %	23 %	1 %	46 %	11 %	63 %	x	x	x		x	x	x	x	x	x
ATM	Jan-04	25 %	22 %	2 %	30 %	84 %	61 %	x	x	x		x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25 %	15 %	10 %	0 %	46 %	48 %					x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23 %	16 %	7 %	3 %	40 %	70 %					x	x	x	x	x	x
	Apr-04	24 %	16 %	8 %	4 %	49 %	79 %					x	x	x	x	x	x
	May-04	24 %	23 %	1 %	48 %	10 %	65 %	x	x	x		x	x	x	x	x	x
+500	Jan-04	25 %	22 %	3 %	20 %	76 %	50 %		x	x		x	x	x	x	x	x
	Feb-04	25 %	15 %	10 %	0 %	43 %	50 %					x	x	x	x	x	x
	Mar-04	23 %	16 %	7 %	3 %	37 %	61 %					x	x	x	x	x	x
	Apr-04	23 %	16 %	7 %	5 %	55 %	76 %			x		x	x	x	x	x	x
	May-04	24 %	23 %	1 %	46 %	9 %	63 %	x	x	x		x	x	x	x	x	x

関して, (1), (2) と同様の仮説検定を行う。研究目的 (1) に関するモデルにおける現実のデルタヘッジコストに関する分布を表現する確率変数を平均  $E(X)$ , 分散  $V(X)$  の正規分布  $N(E(X), V(X))$  を表現する確率変数  $X$  で近似する。これにより, 同じ取引を  $n$  回行う場合に利益の平均を表す確率変数  $X/n$  の従う確率分布が容易に求められ, 平均  $E(X)$ , 分散  $V(X)/n$  の正規分布  $N(E(X), V(X)/n)$  となる。研究目的 (2) に関するモデルについても, このような利益の平均の分布を求めたうえで, 仮説検定を行う。デルタヘッジ間隔は 1 営業日, 2 営業日, 3 営業日の 3 通り, 株式売買コストに関しては, コストがかからない場合と 1 単位当たり 0.5 % のコストがかかる場合に関して検定を行う。

### 5. 実験結果と考察

研究目的 (1): (I) コストがかからない場合, ヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くするに従って, デルタヘッジの効率が低下し帰無仮説  $H_0$  を棄却できる場合が減少する。(II) デルタヘッジに際する株式の売買コストがかかる場合には, ヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くするに従って, 帰無仮説  $H_0$  を棄却できる場合が増加する。これは, デルタヘッジの効率が低下し利益の分布の標準偏差が大きくなる影響よりも, ヘッジ間隔が長くなることによりデルタヘッジに際する株式の売買コストが低く押さえられる効果の方が強く現れることを示している。

研究目的 (2): オプションを売却してデルタヘッジを行うことで利益を得るためには, デルタを求めるためのボラティリティとして, GARCH ボラティリティや各時点のインプライド・ボラティリティを直接利用することは有益とは言えず, 何らかの方法で, 取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティの水準をある程度正しく予測することが

重要であることがわかった。(表 1 参照)

研究目的 (3): デルタヘッジに際する株式の売買コストがかかる場合には, ヘッジ間隔を 1 営業日から 3 営業日まで長くするに従って, 帰無仮説  $H_0$  を棄却できる場合が急速に増加する。これは, ヘッジ間隔を長くすることによるデルタヘッジの効率の低下が限定的だったのに対して, ヘッジ間隔が長くなることによりデルタヘッジに際する株式の売買コストが低く押さえられる効果が強く影響したためと考えられる。

### 6. まとめと結語

提案モデルに基づく仮説検定結果としては, オプションを売却してデルタヘッジを行うことで利益を得るためには, デルタを求めるためのボラティリティとして, GARCH ボラティリティや各時点のインプライド・ボラティリティを直接利用するのは有益でなく, 何らかの方法で, 取引開始時点からオプション満期までの株式リターンのボラティリティの水準に関するある程度正しい予測が重要であることがわかった。その予測が正しいならば, 取引回数を 10 回程度以上行うことで, 理論通りほぼ確実に利益が得られるという結果を得た。また, ヘッジ間隔が検定結果に与える影響を分析したところ, ヘッジ間隔を長くすることによる利益分布の標準偏差の増大よりも, ヘッジ間隔が長くなることによりデルタヘッジにおける株式売買コストの低下の方が検定結果に強く現れることがわかった。

### 参考文献

- Black, F., and M. Scholes.: The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, Vol. 81, pp. 637-659 (1973).
- 淵江哲郎: 日経平均株価オプションのダイナミック・ヘッジング, 日本経営財務研究学会第 26 回全国大会第 8 セッション第 2 報告書, (2002).