

倒産が借入形態に依存する企業と銀行との最適な貸借形態

山田辰徳[†] 宮崎浩一[†] 野村哲史[†]

本論文では、倒産が借入形態に依存するようなコモディティ企業と銀行との最適な貸借形態及び貸出金利を決定するためのモデルを提案する。最適な貸借形態及び貸出金利を、コモディティ企業と銀行の期待利益のパレート最適性と貸借発生確率を加味した銀行の期待利益最大化により決定する。数値例を用いた最適な貸借形態及び貸出金利の検討も行う。

What Type of Loan Structure is Optimal for Both Bank and the Company with Loan Structure Type Dependent Default Probability?

TATSUNORI YAMADA[†], KOICHI MIYAZAKI[†] and SATOSHI NOMURA[†]

This paper provides the model to decide the optimal loan structure and the loan interest rate for both bank and the company with loan-structure-type dependent default probability. The optimal loan structure and the loan interest rate is derived based on Pareto-optimality in the sum of expected profit rate of the bank and the company and optimality in the banks' expected profit rate after adjusting the probability in occurrence of the loan. By way of the numerical examples, the optimal loan structure and the loan interest rate is illustrated.

1. はじめに

本研究では、倒産が借入形態に依存する企業と銀行との最適な貸借形態及び貸出金利を決定するためのモデルを提案する。倒産が借入形態に依存する企業として、コモディティ企業を想定している。コモディティとは大豆やコーヒー豆のような農作物から原油、金、パラジウムなどの原材料までの商品の総称であり、株式や債券と同様に市場で取引され価格が決定される金融商品である。コモディティ企業は、コモディティを生産或いは採鉱し、市場で決定されるコモディティ価格で取引をすることにより利益をあげる企業と定義する。コモディティ企業は単一のコモディティを取扱うケースが大半であり、コモディティ企業の利益は、取引量が一定の場合、単一のコモディティ価格に大きく依存することになる。

コモディティ企業は初期時点で借入により生産設備を購入して、生産したコモディティの売却から得られる累積利益で借入を返済する。このような設定では、コモディティ企業の信用リスクはコモディティ価格のみならず、負債の返済計画にも大きく依存する。コモディティの売却から得られる利益が十分に累積されな

い時点で大きな返済額を設定するような返済計画ではコモディティ企業の信用リスクは高くなるからである。つまり、返済期日までの期間が短ければ短いほど信用リスクは高まることになる。銀行は信用リスクに応じて貸出金利を設定（信用リスクの高い企業に対しては高い貸出金利を設定）するから、返済期日までの期間が短い貸出しほど貸出金利が高くなる。

通常、市場で取引されている信用リスク（倒産リスク）付きの債券（一般の企業の借入に相当）の利回りを観測すると、例外的なケースを除いて、満期が長い債券の利回りの方が高い。これは、返済の期間が長くなればなるほど返済に関する不確実性が増すことが織り込まれている。つまり、現在は優良な企業であっても将来的には倒産に至る可能性が生じるということである。個別具体的な負債の返済について議論されていない。

コモディティ企業に関しては、先に述べたように、その利益が単一のコモディティの価格に依存するため、信用リスクをコモディティの価格と個別具体的な負債の返済計画に直接的に依存する形でモデル化することが望ましい。このようなモデル化によって、借入返済までの期間が長くなるに従い貸出金利が低下するような、通常の信用リスク付き債券の利回り評価とは異なる状況を表現することができる。また、本モデルでは、パレート最適性と貸借の実行可能性の概念を貸借形態

[†] 電気通信大学システム工学科
Department of Systems Engineering, The University of
Electro-Communications

と貸出金利の決定に導入した点で既存のモデルとは大きく異なる。

2. モデル

本節では、まず、コモディティ企業と銀行との最適な貸借形態と貸借金利を決定する本研究モデルの概要を示す。次に、モデルの各 Step を具体的に説明する。最後に、モデルに基づくシミュレーション手法について述べる。

2.1 モデルの概要と用語及び記法のまとめ

2.1.1 モデルの概要

本モデルでは、単純化のため、主に次の 2 つの仮定を置く。

- (1) 借入の返済を 2 回の分割返済（中間時点と満期時点）とする。
- (2) 返済は、日々生産するコモディティを売却して得られる累積利益を返済原資とするのであるが、日々のコモディティの取引量を 1 とする。

上記の仮定の下で、本モデルでは、合理的な貸借形態と貸出金利の組合せを以下に示すステップに基づいて決定する。

Step1: コモディティ価格過程の記述

Step2: コモディティ企業の倒産、コモディティ企業及び銀行の期待利益の定式化

Step3: パレート最適性に基づく返済額と貸出金利の組合せの絞込み

Step4: 銀行が要求する期待利益と貸借が発生する確率の導出

Step5: 最適な貸借形態と貸借金利の決定

2.1.2 用語及び記法のまとめ

- 貸出時点 T : 銀行がコモディティ企業に貸出を行う時点
- 返済元金 G_1, G_2 : 1, 2 期目の返済期日での返済元金
- 貸出金額 $G_1 + G_2$: 銀行が貸出す金額の総額
- 返済金額: 貸出金額とそれに掛かる利息の合計金額
- 返済期日 (T_1, T_2): 返済金額を返済する期日 (1, 2 期目の返済期日)
- 貸出利率 R : 銀行が信用リスクのある企業への貸出に適する金利
- 安全利率 r : 銀行が信用リスクの無い貸出先への貸出に適用する金利
- コモディティ企業の累積利益 F_1, F_2 : 1, 2 期目の返済期日までのコモディティ企業の累積利益。

2.2 コモディティ価格過程の記述 (Step1)

コモディティの 1 つである金を例として取り上げ、

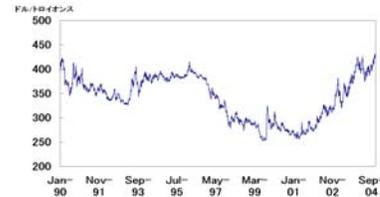


図 1 金の価格データ

その現実の値動きを図 1 に示した。図 1 からは、金の価格は平均値（図では 350 ドル）を中心に上下に変動していることが見て取れる。金以外の多くのコモディティに関しても、現実の値動きは同様であり、コモディティ価格過程を記述するために、次の平均回帰過程を採用する。

$$dS_t = \beta(\bar{S} - S_t)dt + \sigma S_t^\gamma dZ \quad (1)$$

ここで、 \bar{S} はコモディティの平均価格、 β は平均回帰速度、 σ, γ はコモディティ価格のボラティリティに関するパラメータであり、 dZ は標準ブラウン運動を表す。

2.3 コモディティ企業の倒産、コモディティ企業及び銀行の期待利益の定式化 (Step2)

2.3.1 コモディティ企業の倒産の定式化

「はじめに」で述べたように、コモディティ企業は、借入日から返済期日までの累積利益が、返済金額を下回る場合に倒産する。よって、コモディティ企業の倒産の有無は、(I) 時点 T_1 での倒産、(II) 時点 T_2 での倒産、(III) 倒産しない、の 3 通りに場合分けすることができ、次のように定式化される。

$$(I) \text{ の場合: } F_1 < G_1 e^{R(T_1-T)} + G_2 (e^{R(T_1-T)} - 1)$$

$$(II) \text{ の場合: } F_1 \geq G_1 e^{R(T_1-T)} + G_2 (e^{R(T_1-T)} - 1) \\ \text{かつ } F_2 < G_2 e^{R(T_2-T)} + G_1 e^{R(T_1-T)+r(T_2-T_1)}$$

$$(III) \text{ の場合: } F_1 \geq G_1 e^{R(T_1-T)} + G_2 (e^{R(T_1-T)} - 1) \\ \text{かつ } F_2 \geq G_2 e^{R(T_2-T)} + G_1 e^{R(T_1-T)+r(T_2-T_1)}$$

ここで、 $G_1 e^{R(T_1-T)}$ は 1 期目の元利返済金額、 $G_2 (e^{R(T_1-T)} - 1)$ は 2 期目の返済元金に関する 1 期目の支払利息、 $G_2 e^{R(T_2-T)}$ は 2 期目の元利返済金額、 $G_1 e^{R(T_1-T)+r(T_2-T_1)}$ は 1 期目の元利返済金額を 2 期目まで無リスク利子率で運用した将来価値であり、2 期目における倒産の有無を 2 期目の返済期日までの累積利益 F_2 を用いて判定するために、2 期目の元利返済金額に加算した。

2.3.2 コモディティ企業と銀行の期待利益

コモディティ企業の利益率 i_C と銀行の利益率 i_B は倒産の有無に大きく依存する。コモディティ企業の倒産時における銀行の貸出金額の回収金額は、倒産時点

までのコモディティ企業の累積利益とする。以下では、1本のコモディティ価格のパス（コモディティ企業の累積利益 F_1, F_2 に反映される）をとりあげて、2.3.1節で確認したコモディティ企業の倒産の有無に関する各場合における、コモディティ企業と銀行の利益を定式化する。期待利益は、各コモディティ価格のパスに対応する利益の期待値を取ること得られる。

(I) の場合

コモディティ企業： $i_C = 0$ 。

銀行：1期目の返済期日までのコモディティ企業の累積利益 F_1 を回収，

$$i_B = \ln \frac{F_1}{G_1 + G_2}.$$

(II) の場合

コモディティ企業： $i_C = 0$ 。

銀行：2期目の将来価値ベースで得られる金額は、1期目の元利金を無リスク金利で2期目まで運用した将来価値 $G_1 e^{R(T_1-T)+r(T_2-T_1)}$ と2期目までのコモディティ企業の累積利益 F_2 から1期目の元利金支払 $G_1 e^{R(T_1-T)}$ を差引いた金額との合計で，

$$i_B = \frac{1}{2} \ln \frac{G_1 e^{R(T_1-T)+r(T_2-T_1)} + F_2 - G_1 e^{R(T_1-T)}}{G_1 + G_2}.$$

(III) の場合

コモディティ企業：累積利益と返済金額との差額，

$$i_C = \frac{1}{2} \ln \frac{F_2 - (G_2 e^{R(T_2-T)} + G_1 e^{R(T_1-T)})}{G_1 + G_2}.$$

銀行：コモディティ企業への貸出 $G_1 + G_2$ に対して、2期目の将来価値ベースで得られる金額は、1期目の元利金を無リスク金利で2期目まで運用した将来価値 $G_1 e^{R(T_1-T)+r(T_2-T_1)}$ と2期目の元利金 $G_2 e^{R(T_2-T)}$ との合計，

$$i_B = \frac{1}{2} \ln \frac{G_1 e^{R(T_1-T)+r(T_2-T)} + G_2 e^{R(T_2-T)}}{G_1 + G_2}.$$

2.4 パレート最適性に基づく貸借形態と貸借金利の組合せの絞込み (Step3)

ここで、パレート最適とは、2.3節で導出したコモディティ企業の期待利益と銀行の期待利益の合計が最大となることと定義する。縦に1期目の返済額（貸借形態に相当）、横に貸借金利を取り、期待利益の合計に関するテーブルを作成する。但し貸借金利の上限は消費者金融の上限である30%とする。テーブルの中から、両者の期待利益の和が最大となる1期目の返済額と貸借金利の組合せを抽出する。

2.5 銀行が要求する最小期待利益水準と貸借が発生する確率の導出 (Step4)

銀行が要求する最小期待利益率水準（簡便化のため

本研究では2.5%、5%、7.5%、10%のみを検討した）を満たす1期目の返済額と貸借金利の組合せをStep3のパレート最適性を満たす組合せから抽出し、その組合せがパレート最適性を満たす組合せの何パーセントであるかを求める。これを、銀行が要求する期待利益の下で、貸借が発生する確率と定義する。

2.6 最適な貸借形態と貸借金利の決定 (Step5)

銀行の要求する最小期待利益水準が高くなればなるほど、貸借が起る確率は低下し、銀行の要求する最小期待利益水準と貸借が起る確率との間にトレードオフが発生する。そこで、貸借が発生する確率も加味したうえで、銀行の期待利益が最大になるような貸借形態と貸借金利を決定する。つまり、最小期待利益水準に貸借が発生する確率を乗じた値の最大化を試みる。

2.7 モデルに基づくシミュレーション手法

2.6節までで述べた各Stepをシミュレーションで実行すればよい。要点のみを提示しておく。

- 現実のコモディティ価格データから価格過程(1)式のパラメータを推定する。^{?)}
- コモディティ価格過程(1)式に基づいて、コモディティ価格のサンプルパスを1000本発生させる。
- サンプルパス毎に、1期目の返済額と貸借金利の組合せの各シナリオにおけるコモディティ企業と銀行の利益の和を求めたうえで、コモディティ企業と銀行の期待利益の和を算出し、Step3のテーブルを作成する。
- Step4, Step5を実行する。

3. 数値実験

3.1 データ、パラメータ推定値、シミュレーションの設定

数値実験に用いるコモディティ価格データは、図1に示したロンドン貴金属市場での1990年1月から2004年9月までの日次の金取引価格のデータである。この金価格データに基づくコモディティ価格過程(1)のパラメータ推定値とコモディティ価格の初期値と貸借金額の設定を表1に示した。

シミュレーションの設定は次の通り。

- 返済回数は2回、貸出時点： $T = 0$ 、返済期日： $T_1 = 50$ 日、 $T_2 = 100$ 日、安全金利： $r = 0.5$ BP。
- コモディティ価格の各サンプルパスは、10日間隔で得られる10個の価格を紡いだものである。

3.2 実験結果と考察

表2に示したコモディティ価格の初期値と貸借金額の設定の下で、Step4における貸借が発生する確率を表3に、Step5における銀行の最小期待利益水準に貸

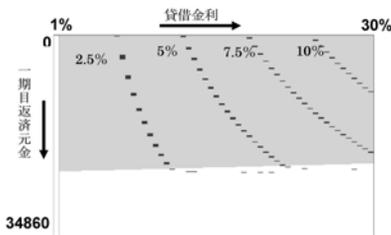


図2 貸出金額コモディティ価格の初期値

借が発生する確率を乗じた値を表4に示した。また、コモディティ価格の初期値と貸借金額の組が、それぞれ435.76ドル、34860ドル、の設定において、Step3のテーブルに、パレート最適な領域（灰色部分）と銀行の各期待利益水準（2.5%、5%、7.5%、10%）の貸借形態と貸借金利（曲線）を書き加えたものを、図2、に示した。

表2によると、貸借が発生する確率は、コモディティ価格の初期値と貸借金額にはそれほど大きく依存せず、銀行の最小期待利益水準に大きく依存する。銀行の最小期待利益水準が2.5%ならば貸借発生確率は75%程度であるが、銀行の最小期待利益水準が増加するに従って貸借発生確率は減少し、銀行の最小期待利益水準が10%に及ぶと貸借発生確率は僅か数パーセントとなる。先に予想した銀行の最小期待利益水準と貸借発生確率との間のトレードオフが確認される。

このトレードオフは、図2からより詳細に確認される。1期目の返済額が同じであれば貸借金利が高くなるほど銀行の期待利益は高くなるので、銀行が要求する最小期待利益水準を満たす1期目の返済額と貸借金利の組合せは、各銀行が要求する最小期待利益水準曲線の右側の領域となる。パレート最適な領域が図2の灰色の部分であることから、表3に示した貸借発生確率との整合性が確認できる。また、図2における曲線（銀行の各期待利益水準（2.5%、5%、7.5%、10%）の貸借形態と貸借金利）に注目すると、当初予想したように、1期目の返済額が増加して返済までの期間が短くなると（図2の下側へ向かうと）、貸借金利が上昇する（図2の右側へ向かう）ことが見て取れる。

銀行の最小期待利益水準に貸借が発生する確率を乗じた値を表3に基づいて分析すると、何れのコモディティ価格の初期値と貸借金額の設定においても銀行の最小期待利益水準が5%のときに最大値をとり、銀行の最小期待利益水準を増加させても（7.5%、10%）、減少させても（2.5%）この値は減少することがわかった。よって、銀行の最小期待利益水準が5%となる曲

表1 パラメータ推定値および初期値と貸出金額

Parameter			
\bar{S}	β	σ	γ
266.5	0.002	0.017	0.873
コモディティ価格初期値（\$）		貸出金額（\$）	
平均値×100%	348.60	平均値×100%	34860
平均値×112.5%	392.18	平均値×87.5%	30503
平均値×125.0%	435.76	平均値×75.0%	26145

表2 各期待利益水準での貸借発生確率

初期値：貸出金額	銀行期待利益率			
	2.50%	5.00%	7.50%	10.00%
348.60：30503	75.96%	50.19%	24.58%	3.28%
348.60：26145	75.04%	48.64%	23.44%	5.25%
392.18：34860	75.77%	49.12%	20.58%	0.00%
392.18：30503	75.33%	49.18%	24.22%	5.44%
392.18：26145	74.04%	46.73%	20.86%	4.66%
435.76：34860	75.55%	49.56%	24.80%	5.60%
435.76：30503	74.52%	47.63%	21.96%	4.89%
435.76：26145	72.92%	44.82%	18.77%	4.20%

表3 期待利益水準×貸借発生確率

初期値：貸出金額	銀行期待利益率			
	2.50%	5.00%	7.50%	10.00%
348.60：30503	1.90%	2.51%	1.84%	0.33%
348.60：26145	1.88%	2.43%	1.76%	0.52%
392.18：34860	1.89%	2.46%	1.54%	0.00%
392.18：30503	1.88%	2.46%	1.82%	0.54%
392.18：26145	1.85%	2.34%	1.56%	0.47%
435.76：34860	1.89%	2.48%	1.86%	0.56%
435.76：30503	1.86%	2.38%	1.65%	0.49%
435.76：26145	1.82%	2.24%	1.41%	0.42%

線上にある1期目の返済額と貸借金利の組合せが、本モデルの提案する最適な貸借形態と貸借金利となる。

4. まとめと結語

本論文では、倒産が借入形態に依存するようなコモディティ企業と銀行との最適な貸借形態及び貸借金利を決定するためのモデルを提案した。本モデルでは、最適な貸借形態及び貸借金利を、コモディティ企業と銀行の期待利益のパレート最適性と貸借発生確率を加味した銀行の期待利益最大化により決定した。数値実験からは、最適な貸借形態及び貸借金利は、銀行が最小期待利益水準を中程度に設定したときに得られること、貸借金利は1期目の返済額が増加するにしたがって上昇することがわかった。

参考文献

- 1) Miyazaki, K. and Tsubaki, H.: Comparison of JGB and Bank debenture credit spread models, *Journal of Fixed Income*, Vol.9, No.1, pp.63-70(1999).