

1次元空間における固定半径ランダムグラフの連結性の理論解析

能代 愛[†] 吉川 毅^{††} 栗原 正 仁^{††}

固定半径モデル $G = G(n, R)$ は、ユークリッド空間上に何らかの分布にしたがって n 個の頂点をランダムに配置し、距離が R 以内である 2 頂点間に辺を生成するグラフであり、これは半径 R 以内であれば互いに通信可能であるような n 個のモバイル端末がランダムに分布しているシステムとして、自然に数理モデル化できる。このような応用を想定して、固定半径モデルのグラフが連結グラフである確率に興味を持たれている。本論文では、ユークリッド空間を 1 次元に限定し、従来の固定半径モデル (固定半径自由直径ランダムグラフモデル) と、本論文で新たに定義した固定半径固定直径ランダムグラフモデルの各グラフが連結グラフである確率を理論的に求める。

Analysis for Connectivity of Fixed Radius Random Graph with the One-dimensional Uniform Distribution

AI NOSHIRO[†], TAKESHI YOSHIKAWA^{††} and MASAHITO KURIHARA^{††}

The Fixed Radius Model $G = G(n, R)$ is defined by n nodes placed randomly in the Euclidean plane according to some distribution; each pair of nodes is connected by an edge if and only if the distance between the nodes is within the common radius R . Hence the model can be naturally interpreted as a mathematical model of wireless communication networks in which every mobile node can communicate with other nodes within the distance R . In this paper, we present some analytical results concerning the probability of such random graphs being connected, assuming that the fixed number of nodes are distributed in one-dimensional space according to the uniform distribution.

1. はじめに

ランダムグラフ $G = G(V, E)$ とは、頂点の集合 V と辺の集合 E が、何らかのランダムなメカニズムに従って生成されるようなグラフの総称である。本論文では、近年着目され始めているランダムグラフモデルの 1 つである固定半径モデル $G = G(n, R)$ を扱う。このモデルでは、ユークリッド空間上に何らかの分布にしたがって n 個の頂点をランダムに配置し、距離が R 以内である 2 頂点間に辺を生成する。

固定半径モデルが注目されてきた大きな理由は、近年注目を受け始めているある種の無線ネットワークと明確な関係があるためである。半径 R 以内であれば互いに通信可能であるような n 個のモバイル端末がランダムに分布しているシステムは固定半径モデル $G = G(n, R)$ として自然に数理モデル化できる。このような応用を想定して、固定半径モデルの解析対象として、ランダムグラフが連結グラフである確率に興味を持たれており、本論文でもそれを解析対象とする。

解析方法としては、シミュレーションと理論解析がある。前者は、モデルの仮定にしたがって乱数を用い

てグラフを生成するモンテカルロ・シミュレーションで、明らかに、何らかの近似解が数値的に得られる点の実用的である。一方、後者は確率論に基づく数理的な解析手法であり、一般に解析は困難だが、一旦結果が得られれば、それは記号的な表現による厳密解であり、現象の基本的な理解につながるものが多く、シミュレーション結果を説明し、より現実的な環境を想定したシミュレーションコストの削減に役立ち得る。

このような考えから、本論文では固定半径モデルの理論解析を取り扱う。しかし、固定半径モデルの一般的な理論解析は困難であり、世界的レベルで現在進行中の研究課題の一つとなっているため、当面は、部分的な研究課題を解決することに集中せざるを得ない。そこで、本研究ではユークリッド空間を 1 次元に限定する。この場合、ランダムグラフが連結グラフであることは、隣接するすべての 2 頂点間の距離が R 以内であることと同値となる。これは無線ネットワークへの応用としてもそれなりに意味のあるもので、たとえば、砂漠や山中にある長い一本道や高速道路のような擬似 1 次元ともいえる環境の近似として使うことができる。また、理論的には 2 次元モデルの研究における特殊ケースとして 1 つの知見となり得る。

固定半径モデルに類似したポアソンモデル $G = G(\lambda, R)$ では、すでに興味深い解析結果が得られている [1][2][3][4]。このモデルは半径 R 以内の 2 頂点間

[†] 北海道大学 大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Hokkaido University

^{††} 北海道大学 大学院情報科学研究科

Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

に辺を生成するところは固定半径モデルと同じだが、頂点は空間内の任意の点において、与えられた固定強度 λ のポアソン点過程にしたがってランダムに生成する点で異なっている。この場合、頂点数 n は λ に依存する確率変数となる。特に 1 次元空間の場合には、頂点の発生過程はよく知られたパラメータ λ のポアソン過程に一致し、与えられた区間内の頂点数 n はポアソン分布にしたがい、隣接した頂点間の距離は平均 $1/\lambda$ の互いに独立な指数分布として陽に与えられるので、比較的解析が容易になっている。

本論文では、あくまでも当初の定義にしたがい、半径 R とともに頂点数 n も固定されたモデルを扱い、頂点が一様分布する仮定のもとで解析することを目的としたい。ここで問題となるのが、頂点が分布する 1 次元空間の領域である。区間 $[-\infty, +\infty]$ の範囲に一様分布するという仮定は、確率密度が $f(x) = 0$ となるので数学的に意味がない。そこで本論文では、ランダムグラフの直径 L もパラメータとして与えるモデルを導入する。グラフの直径とは最も離れた 2 頂点間の距離である。すなわち、このモデルでは L だけ離れた位置に 2 つの頂点を事前に置き、その内部に n 個の頂点を一様分布にしたがってランダムに配置することによって、 $n+2$ 頂点のランダムグラフを生成する。このモデルを固定半径固定直径ランダムグラフモデルと呼び、 $G = G(n, R, L)$ と書くことにする。これに対して、従来の固定半径モデルを固定半径自由直径ランダムグラフモデルと呼ぶことにし、 $G = G(n, R)$ と表記する。

2. ランダムグラフモデル

2.1 固定半径固定直径ランダムグラフモデル

本論文では、1 次元空間に頂点が一様分布し、半径 R 、頂点数 n が固定されたモデルを扱う。固定半径固定直径ランダムグラフモデル $G = G(n, R, L)$ (Fig. 1a) では、ランダムグラフの直径 L も固定する。グラフの直径とは最も離れた 2 頂点間の距離である。このモデルでは、1 次元空間上で L だけ離れた位置に 2 つの頂点を事前に置き、その内部に n 個の頂点を一様分布にしたがってランダムに配置することによって、 $n+2$ 頂点のランダムグラフを生成する。

頂点の存在区間 $I = [0, L] = \{x | 0 \leq x \leq L\}$ ($L > 0$) とし、配置された頂点の位置を左から X_0, X_1, \dots, X_{n+1} とする。区間 I の内部 ($0 < x < L$) には、 n 個の頂点が一様に分布する。

$$P_R\{X_i \leq x\} = \frac{x}{L} \quad (1 \leq i \leq n) \quad (0 \leq x \leq L) \quad (1)$$

また各頂点間距離を W_0, W_1, \dots, W_n とする。

$$W_i = X_{i+1} - X_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

以下では、位置 X_i にある頂点を X_i という名称で呼ぶ。

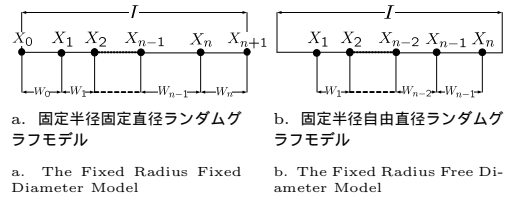


図 1 ランダムグラフモデル
Fig. 1 The Random Graph Model

2.2 固定半径自由直径ランダムグラフモデル

固定半径自由直径ランダムグラフモデル $G = G(n, R)$ (Fig. 1b) は、頂点数 n と半径 R が固定されており、頂点の存在区間 $I = [0, L] = \{x | 0 \leq x \leq L\}$ ($L > 0$) の内部 ($0 < x < L$) に、 n 個の頂点が一様に分布したモデルである。固定半径固定直径ランダムグラフモデルと異なる点は、区間 I の両端に頂点が存在しないこと、すなわちグラフの直径が固定されていないことである。その他の定義については、固定半径固定直径ランダムグラフモデルと同じとする。

隣接するすべての 2 頂点間距離が半径 R 以内であれば、ランダムグラフは連結グラフである。固定半径固定直径ランダムグラフモデル及び固定半径自由直径ランダムグラフモデルが連結グラフである確率を次節で求める。

3. 解 析

3.1 固定半径固定直径ランダムグラフモデル

3.1.1 積分による解の漸化的表現

すべての頂点間距離 W_0, \dots, W_n の最大値を W とする。

$$W = \max\{W_i | 0 \leq i \leq n\}. \quad (3)$$

頂点 X_0 と頂点 X_{n+1} が連結である確率 $P_n(L)$ は、 W が R 以内となる次のような確率で表すことができる。

$$P_n(L) = P_R\{W \leq R\}. \quad (4)$$

$n = 0$ のとき、すなわち両端の頂点しか存在しない場合、式 (4) が次のようになるのは自明である。

$$P_0(L) = \begin{cases} 1 & (0 < L \leq R) \\ 0 & (R < L). \end{cases} \quad (5)$$

また、一般の n に対して、 $0 < L \leq R$ のときも次の自明な式が成り立つ。

$$P_n(L) = 1 \quad (0 < L \leq R). \quad (6)$$

したがって、以下では $n \geq 1$ かつ $R < L$ の場合を考える。 n 個の頂点 X_1, \dots, X_n が I 上の区間 $Z = \{q | 0 \leq q \leq x\}$ 内に存在するときに $X_n \leq x$ となるので、 X_n の分布関数は次のように表せる。

$$F_n(x) = P_R\{X_n \leq x\} = \left(\frac{x}{L}\right)^n. \quad (7)$$

この式を微分することにより X_n の確率密度関数 $f_n(x)$ が次式のように求められる。

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{L^n}. \quad (8)$$

$X_n = x$ の条件のもとで, X_0 と X_n が連結である確率は $P_{n-1}(x)$, X_n と X_{n+1} が連結である確率は $P_0(L-x)$ である. したがって, 両端の頂点 X_0 と X_{n+1} が連結である確率は次のような再帰的な式で表せる.

$$\begin{aligned} P_n(L) &= \int_0^L P_{n-1}(x)P_0(L-x)f_n(x)dx \\ &= \int_{L-R}^L P_{n-1}(x)f_n(x)dx. \end{aligned} \quad (9)$$

頂点 X_n と X_{n+1} の頂点間距離が R 以上, すなわち, $0 \leq x < L-R$ のとき, 確率 $P_0(L-x)$ は 0 になるので, 式 (9) の積分区間のみを考えればよい. $f_n(x)dx$ は $X_n \in [x, x+dx)$ となる確率を表している. x の値によって場合分けした排反事象の和の確率を式 (9) の積分で表現している.

ここで長さの単位を R と考え, L のかわりに s , x のかわりに t という変数を導入する. すなわち,

$$L = sR, x = tR. \quad (10)$$

更に, $P_n(L)$ のかわりに次の $T_n(s)$ を導入する.

$$T_n(s) = \frac{s^n}{n!} P_n(sR). \quad (11)$$

式 (9) を用いて, これを変形すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} T_n(s) &= \frac{s^n}{n!} \int_{s-1}^s P_{n-1}(tR)f_n(tR)d(tR) \\ &= \int_{s-1}^s T_{n-1}(t)dt \quad (n \geq 1, s > 1). \end{aligned} \quad (12)$$

$0 < s \leq 1$, すなわち $0 < L \leq R$ のとき, 式 (6) より,

$$T_n(s) = \frac{s^n}{n!} \quad (n \geq 1, 0 < s \leq 1). \quad (13)$$

$n = 0$ のとき, 式 (5) より,

$$T_0(s) = \begin{cases} 1 & (0 < s \leq 1) \\ 0 & (1 < s). \end{cases} \quad (14)$$

式 (12), (13), (14) より, $T_n(s)$ を漸化的に求めることができる. 更に, $T_n(s)$ が以下の定理を満たすことを証明して確認している.

定理 3.1. $s = 0, 1, \dots, n, n+1$ を境界点とする s の各区間 $(0, 1], (1, 2], \dots, (n, n+1]$ において, $T_n(s)$ は s の n 次多項式で表され, $n+1 < s$ のときは $T_n(s) = 0$ である.

定理 3.2. $T_n(s)$ は連続である ($n \geq 1$).

定理 3.3. $T_n(s)$ は $n-1$ 階微分まで連続である ($n \geq 1$).

補題 3.1. $j!(n-j)!a_{jk}^{n,i}$ が整数であるような適当な係数 $a_{jk}^{n,i}$ を用いて

$$T_n^{(i)}(s) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_{jk}^{n,i} (s-k)^j \quad (15)$$

の形で表すことができる ($n \geq 0, 0 \leq i \leq n+1$).

定理 3.4. $T_n(s)$ を構成する多項式のすべての係数の $n!$ 倍は整数である.

3.1.2 係数の漸化的表現

定理 3.1 の結果から, 区間 $i < s \leq i+1$ ($0 \leq i \leq n$) における $T_n(s)$ の s^j ($0 \leq j \leq n$) の係数を $C_{ij}^{(n)}$ と置いて,

$$T_n(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^n C_{ij}^{(n)} s^j & (i < s \leq i+1) (0 \leq i \leq n) \\ 0 & (n+1 < s) \end{cases} \quad (16)$$

と表すことができる. ただし, 便宜上, $C_{n+1,j}^{(n)} = 0$ ($0 \leq j \leq n$) と定義する.

定理 3.5. $C_{ij}^{(n)}$ ($n \geq 0, 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n$) は次の関係を満たす.

$$C_{00}^{(0)} = 1 \quad (17)$$

$$C_{0j}^{(n)} = 0 \quad (n \geq 1, 0 \leq j < n) \quad (18)$$

$$C_{0n}^{(n)} = \frac{1}{n!} \quad (n \geq 1) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C_{i,j+1}^{(n)} &= \frac{1}{j+1} [C_{ij}^{(n-1)} \\ &\quad - \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} C_{i-1,k}^{(n-1)}] \\ &\quad (n \geq 1, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j < n) \end{aligned} \quad (20)$$

$$C_{i0}^{(n)} = C_{i-1,0}^{(n)} + \sum_{j=1}^n [C_{i-1,j}^{(n)} - C_{ij}^{(n)}] i^j \quad (n \geq 1, 1 \leq i \leq n). \quad (21)$$

この定理から, 任意の $C_{ij}^{(n)}$ を漸化的に計算することができる. すなわち,

- (1) $n = 0$ のときは式 (17) を使う.
- (2) $n \geq 1$ のときは, 再帰的に $C_{ij}^{(n-1)}$ ($0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$) をすべて求めた後に, $i = 0, 1, \dots, n$ の順に以下の処理を反復する.
 - (a) $C_{ij}^{(n)}$ ($1 \leq j \leq n$) を式 (20) から求める.
 - (b) $C_{i0}^{(n)}$ を式 (21) から求める.

ここで, もともと求めなかったものは,

$$P_n(L) = \frac{n!}{s^n} T_n(s) \quad (22)$$

であったので, これを

$$z = \frac{1}{s} = \frac{R}{L} \quad (23)$$

についての関数

$$P_n^*(z) = P_n\left(\frac{R}{z}\right) = z^n n! T_n\left(\frac{1}{z}\right) \quad (24)$$

として整理する. $P_n^*(z)$ は $\frac{R}{L} = z$ のときに, 区間の両端の頂点が連結である確率を表している. 例えば,

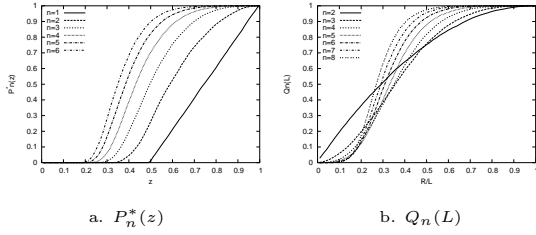


図 2 計算結果
Fig. 2 The Results of evaluation

$n = 2$ のとき

$$P_2^*(z) = \begin{cases} 1 & (1 \leq z) \\ -3z^2 + 6z - 2 & (\frac{1}{2} \leq z < 1) \\ 9z^2 - 6z + 1 & (\frac{1}{3} \leq z < \frac{1}{2}) \\ 0 & (0 < z < \frac{1}{3}). \end{cases} \quad (25)$$

$T_n(s)$ の s^j の係数は $P_n^*(z)$ においては, $n!$ 倍されて s^{n-j} の係数となることがわかる. また, $P_n^*(z)$ は $T_n(s)$ のつぎのような特徴をそのまま引き継いでいる.

- (1) $P_n^*(z)$ は, z に関して n 次区分多項式となる.
- (2) $P_n^*(z)$ は $n-1$ 階微分まで連続である.
- (3) $P_n^*(z)$ の z の係数及び定数項はすべて整数となる.

解析結果の正しさを確認するために, 乱数を用いたモンテカルロ・シミュレーションを行った. その結果は, 解析結果とよく一致した.

3.2 固定半径自由直径ランダムグラフモデル

固定半径ランダムグラフが連結グラフである確率 $Q_n(L)$ を W が R 以内となる次のような確率で表すことができる.

$$Q_n(L) = Q_R\{W \leq R\} (n \geq 2). \quad (26)$$

頂点の位置 $X_i (1 \leq i \leq n)$ を確率変数として, 値の小さい順に並べかえたものを

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_n \quad (27)$$

と表し, 順序統計量という. この順序統計量の最小値 X_1 , 最大値 X_n の存在範囲をそれぞれ $X_1 \in [x, x + dx]$, $X_n \in [y, y + dy]$ と仮定する. このとき, $Q_n(L)$ は以下のように表せる.

$$Q_n(L) = \int_0^L \int_0^y P_{n-2}(y-x) f_{1,n}(x, y) dx dy. \quad (28)$$

$P_{n-2}(y-x)$ は, 前節の結果を用い, X_2 と X_{n-1} が連結である確率を示している. $f_{1,n}(x, y)$ は順序統計量の最小値 X_1 , 最大値 X_n の同時密度関数を表しており, 次のように表せる.

$$f_{1,n}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)(F(y)-F(x))^{n-2}. \quad (29)$$

式 (28) に式 (29) を代入して整理すると,

$$Q_n(L) = \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L \int_0^y P_{n-2}(y-x)(y-x)^{n-2} dx dy. \quad (30)$$

次に $\hat{Q}_n(*) = {}^*P_n(*)$ のように式 (30) を書き換え

ると,

$$Q_n(L) = \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L \int_0^y \hat{Q}_{n-2}(y-x) dx dy. \quad (31)$$

更に頂点の位置の最小値と最大値の距離を w として, 式 (32) を書き換えると,

$$Q_n(L) = \frac{n(n-1)}{L^n} \int_0^L (L-w) \hat{Q}_{n-2}(w) dw. \quad (32)$$

以下に例として, $Q_3(L)$ を示す.

$$Q_3(L) = \begin{cases} -6\frac{R^3}{L^3} + 6\frac{R^2}{L^2} & (0 < \frac{R}{L} \leq \frac{1}{2}) \\ 2\frac{R^3}{L^3} - 6\frac{R^2}{L^2} + 6\frac{R}{L} - 1 & (\frac{1}{2} < \frac{R}{L} \leq 1) \end{cases} \quad (33)$$

このモデルについても結果の正しさを確認するために, 乱数を用いたモンテカルロ・シミュレーションを行った. その結果は解析結果とよく一致した.

4. おわりに

本論文では, 固定半径固定直径ランダムグラフモデルを定義し, 1次元空間において, そのグラフが連結グラフである確率を理論的に求めた. 更にその結果を用いて, 1次元空間における固定半径自由直径モデルのグラフが連結グラフである確率も求めた.

今後の課題として, 頂点数 n が大きい場合のグラフが連結グラフである確率の特性や, ランダムグラフにおける相転移現象 [5][6] について検討していきたい.

参考文献

- 1) Dousse, O., Thiran, P., Hasler, M.: Connectivity in ad-hoc and hybrid networks, IEEE Infocom 2002, New York (2002).
- 2) Santi, P., Blough, D.M., Vainstein, F.: A Probabilistic Analysis for the Range Assignment Problem in Ad Hoc Networks, Mobihoc'2001, Long Beach, California, pp. 212-220 (2001).
- 3) Gupta, P., Kumar, P. R.: Critical Power for Asymptotic Connectivity in Wireless Networks, in Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications, Boston, pp. 547-566 (1998).
- 4) Cheng, Y.C., Robertazzi, T.G.: Critical Connectivity Phenomena in Multihop Radio Models, IEEE Trans. on Communications, pp. 770-777 (1989).
- 5) Krishnamachari, B., Wicker, S.B., Béjar, R.: Phase Transition Phenomena in Wireless Ad-Hoc Networks, Symposium on Ad-Hoc Wireless Networks, GlobeCom 2001 (2001).
- 6) Frank, J., Martel, C.U.: Phase Transition in the Properties of Random Graphs, Principles and Practice of Constraint Programming (1995).