

決定論的ディーラーモデルによる市場価格変動のモデル化

佐藤 彰 洋†

Takayasu ら (1992) によって提案された決定論的ディーラーモデルは市場のエージェントモデルのひとつである。その価格変動の確率分布関数はべき則性は満足するが、volatility clustering を満足しないという問題点があった。本稿では決定論的ディーラーモデルを拡張し、べき則性と volatility clustering の両方を満足するディーラーモデルを提案する。更にこのモデルの決定論的に決まる変数を確率変数と見做す近似を行う操作によって、Engle と Bollerslev(1986) によって提案された GARCH(1,1) モデルに類する確率過程が導出できることを示す。

Modeling market price fluctuations based on the deterministic dealer model

AKI-HIRO SATO†

The deterministic dealer model proposed by Takayasu *et. al.* (1992) is one of agent-based models. Cumulative distribution functions of its price fluctuations follows power law but their volatility clustering is not satisfied. In this paper a modified dealer model is proposed and it is clarified that it is satisfied by both the power law and the volatility clustering. Moreover by an approximation that deterministic variables of the model is assumed as stochastic variables it is shown that we have a quasi-GARCH(1,1) stochastic process proposed by Engle and Bollerslev(1986).

1. はじめに

日々の経済ニュースは市場価格が不規則に変化することを伝えている。外国為替、証券、先物、現物など世界には様々な市場が存在しており、色々な商品が取引されることによって、めまぐるしく価格を変えていく。これらの市場は多数の参加者により構成されるオープンマーケットである。そのような多くの市場参加者から構成される市場はときに荒々しく、また、ときに静かに推移していくが、そのようなゆらぎはなぜ生じるのだろうか。また、どのようなゆらぎがあるのだろうか。

市場は多くの人々が利益を得ることを目指して駆け引きを繰り返している。そこには、人の営みがあり、多くの人々が自らの利益最大化のために行動することが、集団行動を発生させ様々なゆらぎを生じているのではないだろうか。近年、オープンマーケットのゆらぎについて複雑系科学の方法論を用いた研究が進展している^{1)~5)}。

本稿では、経済物理学の分野で Takayasu らが提案した決定論的ディーラーモデル⁶⁾を改良し、実証論的に

証明されてきた価格変動の統計的性質を満足するモデルを提案する。更に、価格変動に関して本来決定論的に決まる変数をその自由度の高さから確率変数と見做す近似操作を行うことにより、金融工学や計量経済学で研究されてきた確率過程に極限的に近似できることを示す。

2. オープンマーケット

オープンマーケットの一例として、外国為替市場を考察しよう。新聞やニュースにおいて、日本円と米ドルの交換レートが毎日変化していることは周知の事実であるが、その時表示されている価格はどのような意味があるのだろうか。例えば 107.82-107.94 という表示について考えてみよう。前の 107.82 という数字であるが、これは 107.82 円の買い注文価格がその瞬間最高値であることを意味している。一方、後ろの 107.94 という数字は売り注文価格の最安値が 107.94 円であることを示している。これら 2 つの価格を見ることによって、現在の妥当な取引価格が 107.82 円から 107.94 円の間にあると推測される。また、日本円と米ドルの場合、1 銭が取引の最小の単位である。この状況は、仮想的な注文板を考えることによって更によく理解することができる。横軸に注文価格、縦軸に注文を並べてみると図 1 のようになる。買い注文は最大

† 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
Department Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University
経済シナジェティクス、経済物理学、人工市場。

買い注文価格以下に多数存在している。一方、売り注文価格も最小売り注文価格以上に多数存在している。この状態に新しく売り注文が入ると取引が発生する。明らかに取引価格はここで示した最大買い注文価格と最小売り注文価格の間である^{3),7)}。このように世界中の最大買い注文価格と最小売り注文価格は市場上で瞬時に分かるようになっている。

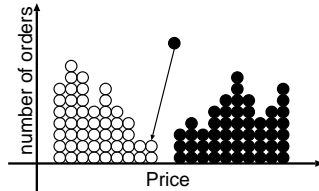


図 1 仮想的な注文板。白丸が買い注文、黒丸が売り注文を表す。新しい売り注文(黒丸)が買い注文(白丸)に加わると取引が発生する。

3. GARCH 過程

ひとつの立場として、計量経済学の研究者が長年研究を行ってきた、市場のゆらぎを確率過程で記述する方法がある。例えば、1980年代から GARCH (Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) 過程と呼ばれるボラティリティ変動モデルが提唱され、研究されるようになった⁸⁾。GARCH 過程はボラティリティ $\sigma(t)$ 、市場価格に対して AR 過程を適用したときの残差 $\epsilon(t)$ とすると、

$$\begin{cases} \epsilon(t) &= \sigma(t)n(t) \\ \sigma(t)^2 &= \omega + \alpha\epsilon(t-1)^2 + \sigma(t-1)^2 \end{cases}, \quad (1)$$

で与えられる。ここで $n(t)$ は平均 0 の標準正規乱数であり、 ω, α は正の定数である。

GARCH 型確率過程は実証論的研究が証明した価格変動の持つ統計的性質、すなわち、裾野の厚い確率密度関数、volatility clustering の両方を満足する巨視的現象論的モデルである。しかし、未だ微視的視点からの満足いく説明はなされていない。

4. デイラーモデル

デイラーモデルは Takayasu らによって提案された動的エージェントモデルである⁶⁾。エージェントは寸前の価格変動に応じて売値と買値を変化させ、取引条件が満足されたときに取引を行なう。価格変動に現れるべき振る舞いの起源は係数がランダムに変化する Langevin 系である⁹⁾。しかしながら、オリジナルのモデルは裾野の厚い確率密度関数は満足するが、volatility clustering は満足しないという問題があった。

そこで本稿では、デイラーモデルを改良^{10),11)}し、両性質を満足するモデルを提案する。更に微視的なデイラーの相互作用から計量経済学で経験的に導入された GARCH 過程と類似した確率過程が近似的に導出されることを示す。これは、微視的モデルから巨視的モデルへの橋渡しが可能である一例である。

デイラーモデルは N 人のデイラー (エージェント) から構成されるモデルである。各デイラーは買いと売りの 2 つの立場を有し、買い指値と売り指値のどちらかを毎回市場 (共通の板) に提示する。そして、ある取引条件を満足したデイラー間で取引価格を決め、その取引価格が市場価格として全デイラーに知らされる。市場状況に応じて取引を行ったデイラーは買い手と売り手の立場を選べ、取引行動を繰り返すというモデルである。

N 人のデイラー間での売買条件を考察する前に、まず、2 者間での相対取引について考察する。一般的に、買い手はより安く購入したいと望み、一方、売り手はより高く販売したいと望むものである。しかしながら、それでは取引を成立させることは難しい。なぜなら、買い手は売り手が購入することができない価格での販売を望むかもしれないからである。もし、両者が取引を行いたいと望むのであれば買い手は購入希望価格を少しずつ上げるであろう。また、売り手は販売希望価格を少しずつ下げるかもしれない。買い手と売り手の時刻 t における提示価格をそれぞれ $B(t), S(t)$ とする。そして、単位時間当たりの売り手と買い手の価格更新量をそれぞれ $\gamma_B(t), \gamma_S(t)$ とする。そのとき買い手と売り手の提示価格は次の方程式に従う。

$$\begin{cases} B(t+1) &= B(t) - \gamma_B(t) \\ S(t+1) &= S(t) + \gamma_S(t) \end{cases}, \quad (2)$$

また取引が決定するための条件は、明らかに $B(t) \geq S(t)$ のときである。

この 2 者間での考察は市場を形成しても同様に成立する。時刻 t におけるエージェント i の提示売買価格を $p_i(t)$ と表記すると、提示価格の発展方程式は

$$p_i(t+1) = p_i(t) + D_i(t)\gamma_i(t), \quad (3)$$

で与えられる。ここで、 $D_i(t) = \pm 1$ であり、1 のとき買い手、-1 のとき売り手を意味する。更に、 $\gamma_i(t)$ は売買更新量であり非負値を取ると仮定する。また、 $\gamma_i(t)$ は過去の市場価格差に依存すると仮定し、

$$\gamma_i(t) = |1 + c_i \Delta P_{prev}| a_i, \quad (4)$$

で与えられるものとする。ここで、 a_i, c_i はそれぞれ市場価格が変化しない場合のエージェントの潜在的価格変更量、前回の市場価格差に依存した価格変更量に關係する係数である。 a_i, c_i はシミュレーションを行なうとき、それぞれ、最初に $[0, \alpha], [-c, c]$ の一様乱数

で与え、その後は変化させない。

次に市場価格の決まり方について述べる。時刻 t における市場価格 $P(t)$ は次のルールによって決まると仮定する。

$$P(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\min\{p_i(t)\}_{\text{seller}} + \max\{p_i(t)\}_{\text{buyer}} \right) & (\max\{p_i(t)\}_{\text{buyer}} \geq \min\{p_i(t)\}_{\text{seller}}) \\ P(t-1) & (\max\{p_i(t)\}_{\text{buyer}} < \min\{p_i(t)\}_{\text{seller}}) \end{cases}$$

ここで、 $\min\{\}_{\text{seller}}$ は売り手の中での最小値、 $\max\{\}_{\text{buyer}}$ は買い手の中での最大値を意味する。すなわち、最小の売値と最大の買値をつけたディーラー間で取引が行なわれた場合のみ、市場価格が決まり、そうでなければ市場価格は以前のものが保たれる。

また取引を行った後、もし市場価格が上昇しているのであれば、そのディーラーは買い手に下降しているのであれば、売り手に立場を変える。市場価格が変化していない場合には、買い手と売り手の立場を入れ換える。

$$D_i(t+1) = \begin{cases} 1 & (\Delta P_{\text{prev}} > 0) \\ -D_i(t) & (\Delta P_{\text{prev}} = 0) \\ -1 & (\Delta P_{\text{prev}} < 0) \end{cases} \quad (6)$$

そして以下のように現在の市場価格より $\Lambda (> 0)$ だけずらして新しい指値とする。

$$p_i(t+1) = P(t) - D_i(t+1)\Lambda. \quad (7)$$

この拡張したディーラーモデルの数値シミュレーションを行った。図 2 は市場価格の時系列と市場価格差のそれである。市場価格差は $\Delta P_s = P_s - P_{s-1}$ で定義した。同様に価格差の確率密度関数とその累積分布関数を図 3 に示す。ここで、累積分布関数は

$$F(\geq |x|) = \int_{-\infty}^{-|x|} f(x')dx' + \int_{|x|}^{\infty} f(x')dx', \quad (8)$$

で定義される。ここで、 $f(x)$ は x の確率密度関数である。数値シミュレーションから市場価格差は裾野の広い分布となり、volatility clustering が生じていることが確認された。

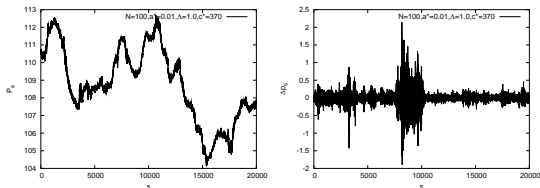


図 2 $N = 100$, $\alpha = 0.01$, $\Lambda = 1.0$, $c = 370.0$ のときの市場価格の時系列 (左) とその価格差 (右)。

このモデルの時間発展に確率的要素は全くない。

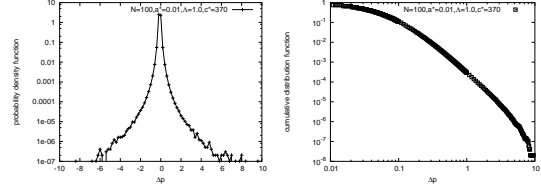


図 3 $N = 100$, $\alpha = 0.01$, $\Lambda = 1.0$, $c = 370.0$ のときの価格差の確率密度関数 (左) とその累積分布関数 (右)。

(5) 5. 市場価格差の巨視的近似

ここで Δp_s を s 回目の取引で生じた価格差、 τ_s を s 回目の取引が起きたときのステップとする。 n_s を $s-1$ 回目の取引が発生してから s 回目の取引が発生するまでの時間間隔とする。すなわち、 $n_s = \tau_s - \tau_{s-1}$ である。また、 M_s を s 回目の取引での買値、 m_s を s 回目の取引の売値とする。

(5) 式よりステップ τ_s での市場価格 $P(\tau_s) = (M_s + m_s)/2$ である。また、 $\Delta p_s = P(\tau_s) - P(\tau_{s-1})$ より

$$\begin{aligned} \Delta p_s &= \frac{1}{2}(M_s + m_s) - \frac{1}{2}(M_{s-1} + m_{s-1}) \\ &= \frac{1}{2}(M_s - M_{s-1}) + \frac{1}{2}(m_s - m_{s-1}). \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ここで、(4) 式より τ_s に買い手となるべきディーラー j は τ_{s-1} から τ_s までの間 1 ステップ当り $|1 + c_j \Delta p_{s-1}| a_j$ を提示価格に n_s 回加える。同様に τ_s に売り手となるべきディーラー i は τ_{s-1} から τ_s までの間 1 ステップ当り $|1 + c_i \Delta p_{s-1}| a_i$ を提示価格から n_s 回引く (図 4 参照)。ここで j と i はそれぞれ τ_s ステップで買い手と売り手になるディーラーを表わす。よって (9) 式の第一項と第二項は

$$M_s - M_{s-1} = |1 + c_j \Delta p_{s-1}| a_j n_{s-1} - K_s, \quad (10)$$

$$m_s - m_{s-1} = k_s - |1 + c_i \Delta p_{s-1}| a_i n_{s-1}, \quad (11)$$

によって与えられる。ここで K_s は τ_{s-1} で買い手になったディーラーと τ_s で買い手になったディーラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表わす。同様に k_s は τ_{s-1} で売り手になったディーラーと τ_s で売り手になったディーラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表わす。(10) 式と (11) 式を (9) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta p_s &= \frac{1}{2} |1 + c_j \Delta p_{s-1}| a_j n_{s-1} \\ &\quad - \frac{1}{2} |1 + c_i \Delta p_{s-1}| a_i n_{s-1} + \frac{1}{2} (k_s - K_s). \end{aligned} \quad (12)$$

を得る。

売り手と買い手になるディーラー i, j の出現はランダムであるとして、(12) 式の 2 乗を i, j に対して平均を取る。ディーラー数 N が大きいとき K_s と k_s はランダムに分布し、かつ K_s と k_s は対称なので $\langle K_s - k_s \rangle = 0$ である。同様に売り手と買い手の対

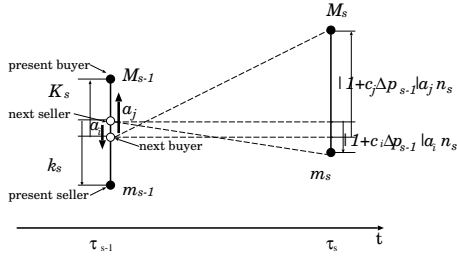


図 4 τ_{s-1} ステップから τ_s ステップにおける売り手と買い手の動きの概念図。 M_s は s 回目の取引での買値、 m_s は s 回目の取引での売値を表わす。ここで K_s は τ_{s-1} で買い手になったディーラーと τ_s で買い手になったディーラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表わす。同様に k_s は τ_{s-1} で売り手になったディーラーと τ_s で売り手になったディーラーの τ_{s-1} での提示価格の差を表わす。

称性から $\langle \Delta p_s \rangle = 0$ である。更に、 $\langle c \rangle = 0$ の仮定を使って計算すると、

$$\begin{aligned} \langle \Delta p_s^2 \rangle &= \frac{1}{4} \langle (k_s - K_s)^2 \rangle + \frac{1}{4} \langle |1 + c\Delta p_{s-1}|^2 \rangle \langle a^2 \rangle \langle n_s^2 \rangle \\ &= \frac{1}{4} \langle (k_s - K_s)^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle a^2 \rangle \langle n_s^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle c^2 \rangle \langle a^2 \rangle \Delta p_{s-1}^2 \langle n_s^2 \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle |1 + c\Delta p_{s-1}|^2 \rangle \langle a \rangle^2 \langle n_s^2 \rangle, \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。(13) 式の第一項 $\langle (k_s - K_s)^2 \rangle$ は $s-1$ 時点での分散 $\langle \Delta p_{s-1}^2 \rangle$ に比例し、第二項は正の定数、第三項は $s-1$ 時点での価格差の 2 乗に比例している。このことから、(13) 式は (1) 式で示した GARCH 過程に非常によく似た構造を持っている。

この近似はディーラー数 N が大きいことによって自由度が十分大きくなるため、実際には決定論的に決まる c_i, a_i, k_s, K_s, n_s といった変数が確率変数に近い振舞いをすると仮定し、価格差の発展方程式は近似的に確率過程と見做して得た。この自由度の高さが市場価格にゆらぎが生じるメカニズムと考えることができる。

6. 結 論

金融工学や計量経済学で研究されてきた GARCH 過程を紹介し、巨視的モデルとしてこの確率過程が実証論的に証明されてきた経済時系列のいくつかの統計的性質を満足することを述べた。次に、決定論的ディーラーモデルを改良し、数値的に実証論的性質を満足する微視的モデルを提案した。更に、このモデルは計量経済学で研究されてきた GARCH 過程を近似的に導出できることを示した。

この近似を行うことができる必要条件のひとつとして、モデルにある種のフィードバックループが存在することが上げられる。更に、このことは、金融市場

における微視的立場と巨視的立場の橋渡しが可能であることを示唆している。

今後、微視的なディーラーモデルと金融工学や計量経済学で使われている巨視的な確率過程への極限的な収束に関する研究は、オープンマーケットの複雑系科学による接近方法の基礎を固める研究として益々重要性を増していくであろう。

謝辞 ここで、本稿を執筆するにあたり、お世話になった方々にお礼を述べます。青木正直氏 (UCLA)、高安秀樹氏 (ソニー CSL)、高安美佐子氏 (東京工業大学)、宗像豊哲氏 (京都大学)、森谷博之氏 (オックスフォード・ファイナンシャルエデュケーション)(アイウエオ順) 各氏に謝辞を表明致します。また、この場をお借りし、統数研/総研大「経済物理学とその周辺」研究会の参加者の皆様から有益なご意見を頂戴致しました。ここに感謝の意を表明致します。

参 考 文 献

- 1) トニス・ヴァーガ著, 新田功, 永原裕一訳: 複雑系と相場, 白桃書房 (1999).
- 2) Mantegna, R. and Stanley, H.: *An Introduction to Econophysics Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press (2000).
- 3) 高安秀樹, 高安美佐子: エコノフィジックス 市場に潜む物理法則, 日本経済新聞社 (2001).
- 4) デイディエ・ソネット著, 森谷博之監訳: [入門] 経済物理学, PHP 研究所 (2003).
- 5) 和泉潔: 人工市場, 森北出版 (2003).
- 6) Takayasu, H., Miura, H., Hirabayashi, T. and Hamada, K.: Statistical properties of deterministic threshold elements – the case of market price, *Physica A*, Vol. 184, pp. 127–134 (1992).
- 7) D.F. デローザ著, 森谷博之, 及川茂訳: 外国為替のオプション, 東洋経済新報社 (2000).
- 8) 渡部敏明: ボラティリティ変動モデル, 朝倉書店 (2000).
- 9) Sato, A.-H. and Takayasu, H.: Dynamical models of stock market exchanges : from microscopic determinism to macroscopic randomness, *Physica A*, Vol. 250, pp. 231–252 (1998).
- 10) Sato, A.-H. and Takayasu, H.: Derivation of ARCH(1) process from market price changes based on deterministic microscopic multi-agent, *Empirical Science of Financial Fluctuations: The Advent of Econophysics* (Takayasu, H.(ed.)), Tokyo, Nikkei, Springer-Verlag, pp. 171–178 (2002).
- 11) Sato, A.-H.: Time interval between successive trading in foreign currency market: from microscopic to macroscopic, *Physica A*, Vol. 344, pp. 211–215 (2004).