

構造モデルに基づく格付リンククーポン社債の評価法

矢 萩 一 樹[†] 宮 崎 浩 一[†]

格付リンククーポン社債は、将来の格下げ時にはその時点の格付けに見合うクーポンを支払うことで、格下げに伴う信用力の低下によって投資家が被るキャピタルロスを低減するような仕組みとなっている。格付けを明示的に取り扱うことができる社債評価モデルに Jarrow, Lando and Turnbull モデル (以下 JLT モデル: 1997) があるが、格付け低下によるクーポン支払いの増加が企業財務の悪化をもたらす、将来のクーポン支払いの可能性を低下させるような影響を取り扱うことができない。本論文では、JLT モデルの類似を踏まえて、構造モデルのアプローチに基づく格付リンククーポン社債の評価モデルを提案する。数値実験からは、期待通り上記の影響が確認された。

A Structural Valuation Model of Credit-Rating Linked Coupon Bond

KAZUKI YAHAGI[†] and KOICHI MIYAZAKI[†]

A credit-linked coupon bond pays a coupon associated with its credit rating at the time of the coupon payment date, rather than an amount equal to the initially fixed coupon. The only existing corporate bond valuation model for credit-rating-triggered products was formulated by Jarrow, Lando, and Turnbull (1997). However, this model does not incorporate the fact that increases in the coupon payment resulting from downgrades may cause a further deterioration of credit ratings and of the likelihood that the company will be able to make future coupon payments. In this paper, we present a credit-linked coupon bond valuation model that considers this issue.

1. はじめに

本研究の分析対象である格付リンククーポン社債は、社債のクーポン支払い時点の格付けに依存してクーポンが変化するような社債である。特に、将来の格下げ時にはその時点の格付けに見合うクーポンを支払うことで信用力の低下から生じる投資家の損失を補うような仕組みとなっており、ある種の信用力に関するプロテクションを提供するものとなっている。先行研究の Aonuma¹⁾ では、格付リンククーポン社債では無く、金融機関等の第三者が社債格付け低下時にプロテクションを与える社債の評価を Jarrow, Lando and Turnbull²⁾ モデル (以下 JLT モデル) を参照して行っていた。しかし、本研究では社債発行企業がクーポン支払額を増加させることでプロテクションを与える為、企業財務の悪化が将来のクーポン支払い可能性に与える要因をモデルに組み込む必要があり、直接 Aonuma¹⁾ を用いて評価することが出来ない。

そこで、本研究では、格付けの推移を明示的に取り

扱うことができる JLT モデルのアナロジーを、企業財務の影響を取り扱うことが出来るである Merton³⁾ の枠組みで表現した、格付けリンククーポン社債の評価モデルを提案する。

2. 本研究で参照する社債評価モデル

2.1 Merton モデル (1974)

Merton モデルは、企業のバランシートの構造を明示的に取り上げて倒産のモデル化を行うものである。企業価値は株式 1 単位と割引債 1 単位の合計に等しいものとし、満期時点において企業価値が社債の額面を下回る状態を倒産と定義して、割引社債を評価を行う。企業価値は、リスク中立測度の下で以下の確率過程に従うと仮定する。

$$\frac{dV_t}{V_t} = r dt + \sigma d\tilde{W}_t. \quad (1)$$

ここで、 r は無リスク金利、 σ は企業価値のボラティリティ、 $\tilde{W}_t$ はリスク中立測度の下での標準ブラウン運動を示す。次に、満期 T において、社債のペイオフである $\min(V_T, B)$ (B は社債の額面) に関して、リスク中立測度の下で期待値計算を行い、最終的に、その値を現在価値に割り引くことで割引社債の価値が

[†] 電気通信大学大学院システム工学専攻
Graduate School of Systems Engineering, The University of Electro-Communications

求まる．評価に際しては，Black-Scholes 公式を利用できる．

2.2 JT モデル (1995) と JLT モデル (1997)

2.2.1 JT モデル

JT モデルでは，適切な確率空間の設定の下で，無リスク金利のプロセスと，倒産までの時間が従うプロセスが独立と仮定し，額面 1 の割引社債の評価を次式で与えている．

$$F(t, T) = p(t, T) (\delta + (1 - \delta) \tilde{Q}_t(\tau^* > T)) . \quad (2)$$

ここで， $\tilde{Q}_t(\tau^* > T)$ は，リスク中立確率の下で，倒産が社債の満期 T 以降に起こる確率を表し， $p(t, T)$ は無リスク割引債価値を表す．

2.2.2 JLT モデル

企業の信用状態を状態空間 $S = \{1, \dots, k\}$ で表し，状態 1 は最高の格付け，以後順次一つ低い信用状態を表し，最後の状態 k を倒産とする．ここで，斉時性を持つ単位時間当たりのエンピリカルな格付推移行列を，

$$Q = \begin{bmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,k} \\ q_{2,1} & q_{2,2} & \cdots & q_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k-1,1} & q_{k-1,2} & \cdots & q_{k-1,k} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} . \quad (3)$$

で与える．ただし， $q_{i,j}$ は単位期間において企業の信用状態が i から j へ推移する確率であり，全ての i, j において $q_{i,j} \geq 0$ ， $\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \geq 0$ ， $\tilde{q}_{i,i}(t, t+1) \equiv 1 - \sum_{j \neq i}^k \tilde{q}_{i,j}(t, t+1)$ となる．

次に，市場が完備であり，無裁定条件を満足する等の仮定の下で，同値なマルチンゲール測度において時刻 t から時刻 $t+1$ のリスク中立確率は，

$$\tilde{Q}_{t,t+1} = [\tilde{q}_{i,j}(t, t+1)] . \quad (4)$$

となる．ただし，全ての i, j において， $\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \geq 0$ ， $\tilde{q}_{i,i}(t, t+1) \equiv 1 - \sum_{j \neq i}^k \tilde{q}_{i,j}(t, t+1)$ ．このとき，リスク中立確率に次の制約を与え，リスクプレミアムを調節している．

$$\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) = \pi_i(t) q_{i,j} . \quad (5)$$

ただし， $\pi_i(t)$ は，全ての $i, j, i \neq j$ に対して $\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \geq 0$ 及び全ての信用状態 i に関して $\sum_{j \neq i}^k \tilde{q}_{i,j}(t, t+1) \leq 1$ を満たすような時点 t と信用状態 i に依存する確定値である．式 (5) を行列表示すると，

$$\tilde{Q}_{t,t+1} - I = \Pi(t) [Q - I] . \quad (6)$$

となる．ただし， I は $k \times k$ の単位行列， $\Pi(t) = \text{diag}(\pi_1(t), \dots, \pi_{k-1}(t), 1)$ ，全ての $i, j, i \neq j$ において $\pi_i(t) > 0$ である．また，時刻 0 で信用状態 i

である企業が n 期間後に信用状態 j へ推移する確率 $\tilde{q}_{i,j}(0, n)$ は，

$$\tilde{Q}_{0,n} = \tilde{Q}_{0,1} \tilde{Q}_{1,2} \cdots \tilde{Q}_{n-1,n} . \quad (7)$$

の (i, j) 成分として表現される．

リスク中立測度下，時刻 t において信用状態 i である企業 ($\eta_t = i$) が時刻 T において倒産していない確率 $\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T)$ (ここで， $\tau^* = \inf\{s \geq t : \eta_s = k\}$) は，

$$\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T) = \sum_{j \neq k} \tilde{q}_{i,j}(t, T) = 1 - \tilde{q}_{ik}(t, T) . \quad (8)$$

となる．このとき，式 (8) の $\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T)$ に $\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T)$ を代入することで，時刻 t で格付けが i の企業が発行する満期 T の社債価値 $F^i(t, T)$ を次式で評価できる．

$$F^i(t, T) = p(t, T) (\delta + (1 - \delta) \tilde{Q}_t^i(\tau^* > T)) . \quad (9)$$

3. 本研究モデルを構築する方向性

格付リンククーポン社債を評価する際，クーポン支払い量の増加が企業価値に及ぼす影響を考慮する必要がある．2 章で概観したように，JLT モデルは企業価値の変化が評価に及ぼす影響を表現できないので，その評価には適さない．そこで，本研究モデル構築のベースとして企業価値の影響を考慮できる Merton モデルを採用する．以下では，Merton モデルを評価に用いる際に生じる欠点を確認し，それに対してどのような工夫を施したか述べ，本研究モデルを提案する．

3.1 Merton モデルの欠点

Merton モデルを用いた格付リンククーポン社債評価に際して，5 つの欠点を挙げられる．

- (1) 格付けを明示的に取り扱うことができない．
- (2) 満期毎に格付け毎のクレジットスプレッドを柔軟に表現するにはパラメータ数が少なすぎる．
- (3) 状態推移確率を生み出す要素が存在しない．
- (4) クーボン社債を解析的に評価することが困難．
- (5) 無リスク金利期間構造をモデルに組み込めない．

これらの欠点について，JLT モデルでは評価することが可能である．そこで，本研究では 5 つめに示した，無リスク金利期間構造を社債評価モデルに組み込めないという点を除いた，他の 4 点を克服するようなモデルを JLT モデルとのアナロジーを想定し，構築する．

3.2 各欠点に対して改良を施した点

- (1) 欠点 1 に関して

仮想的に企業価値の大きさによって格付けが決まるものとし， k 個の格付けに対応する閾値 $V^{*(i)}$ ， $i = 1, \dots, k-1$ を設定することで格付けを表現した．

- (2) 欠点 2，欠点 3 に関して

企業価値プロセスのボラティリティに σ 関しては，格付け毎の柔軟な表現が可能になるように $\sigma^{*(i)}$ ，

$i = 1, \dots, k-1$ とした。 $i = k$ の場合には倒産を表すため企業価値の変動が停止する。初期時刻の企業価値 V_0 に関しても、同様に $V_0^i, i = 1, \dots, k-1$ とした。

(3) 欠点 4 に関して

モンテカルロ・シミュレーションを用い、解決した。

3.3 本研究モデル

上記の (1) ~ (3) を踏まえて、リスク中立確率の下での企業価値プロセスを次の式 (10), (11) に表現する。クーポン支払い時点以外:

$$dV_t^i = rV_t^i dt + \sigma^{*(1)} V_t^i dW_t : V_t^i > V^{*(1)} \quad (10)$$

$$dV_t^i = rV_t^i dt + \sigma^{*(j)} V_t^i dW_t : V^{*(j-1)} > V_t^i > V^{*(j)}$$

クーポン支払い時点 t_l :

$$V_{t_l}^i = V_{t_l-}^i - c^{(j)} : V^{*(j-1)} > V_{t_l-}^i > V^{*(j)} \quad (11)$$

ここで、 $V_{t_l-}^i$ は、社債発行時点において信用状態が i であった企業のクーポン支払い時点 t_l 直前における企業価値を、 $c^{(j)}$ は、社債発行時点で格付けが j であった社債のクーポンを表す。例として、サンプルパスを取り上げ、模式的に図 1 に示した。

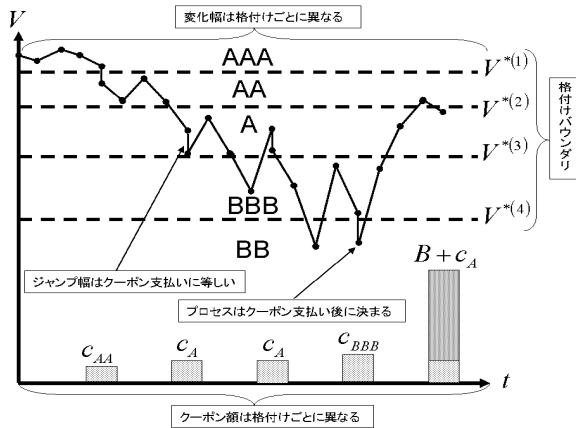


図 1 企業価値のサンプルパス

Fig. 1 The sample path of a firm value

3.4 本モデルのパラメータ

外生的に与えるパラメータ

格付け毎に与えられる企業価値のボラティリティー $\sigma^{*(i)}, i = 1, \dots, k-1$ と社債の額面 B とした。

推定すべきパラメータ

初期時刻の企業価値 $V_0^i, i = 1, \dots, k-1$ 及び倒産状態を除く $k-2$ 個の格付けに対応する閾値 $V^{*(i)}, i = 1, \dots, k-2$ の合計 $2k-3$ 個である。ただし、倒産状態を除く $k-1$ 個の格付けに対応する閾値 $V^{*(i)}, i = 1, \dots, k-2$ を初期時刻の企業価値 $V_0^i, i = 1, \dots, k-1$ を用いて、 $V^{*(i)} = (V_0^i + V_0^{i+1})/2$,

$i = 1, \dots, k-2$ と制約することで、推定するパラメータの個数を $k-1$ 個とした。

3.5 キャリブレーション手法

満期 T の格付け毎のクーポン社債の市場価格が、本研究モデルで算出した価格に一致する様に、満期 T に対応する初期時刻の企業価値 V_0^i を数値探索により求める。ただし、デフォルトが生じない限り得られるクーポンは初期時刻において市場で観測されるクーポンに設定される。

4. 数値実験

4.1 評価に用いるモデル

評価に用いるのは、以下の 3 モデルである。

- (1) JLT モデル JLT モデルの評価法を用い、各支払い時点におけるクーポンを格付けに応じて異なるものに変更する評価法。
- (2) モデル A 本研究モデルそのものである。
- (3) モデル B JLT モデルと本研究モデルを比較検討するために設定した。それは、本研究モデルを用いるが、格付けの変更に応じたクーポンの支払いを行っても、企業価値の低下幅は当初のクーポンに留めるものである。

4.2 数値実験で用いるデータや初期設定

- (a) 全モデルに共通な値

企業の格付: AAA, AA, A, BBB, BB, D(=k), 社債の年限: 5 年, 社債の額面: 70 円, クーポン: パー (5 年の利回りに等しい), 無リスク金利: 3.21%, 1.21% (JLT との比較の為, 金利期間構造はフラットとした), クレジットスプレッド: 表 1 のように 2 通り設定した。

- (b) JLT モデルに用いる値

統計測度の下での推移確率行列 Q は R & I 社が公表した 1994 年から 2004 年の各年毎の格付推移確率行列の平均値を用いた。

- (c) 本研究モデルに用いる値

格付けごとの企業価値プロセスのボラティリティーは表 2 に示すように 2 通り設定した。

- (d) 実験の組み合わせ

表 3 に示すように、全パラメータの組み合わせについて実験を行った。

4.3 数値実験結果とその考察

図 2 に示した Case5,6 の実験結果を基に考察する。

- (1) 分析結果から全般的に読み取れること

- 格付リンククーポン社債の価値は、発行時点に高格付けの場合、当該普通社債の価値を上回り、逆に、発行時点に低格付けの場合、当該普通社債の

表 1 ボラティリティー (Vol) の初期設定

Table 1 The Volatility values

格付け	AAA	AA	A	BBB	BB
スティーブ	5%	10%	20%	25%	35%
フラット	20%	20%	20%	20%	20%

表 2 クレジットスプレッドの初期設定

Table 2 The credit spread values

格付け	AAA	AA	A	BBB	BB
スティーブ	0.16%	0.26%	0.46%	1.12%	2.05%
フラット	0.18%	0.44%	0.92%	1.85%	4.69%

表 3 実験の組合せ

Table 3 The Cases of numerical experiments

クレジットスプレッド (フラット):

	Vol(フラット)	Vol(スティーブ)
無リスク金利 (1.21%)	Case1	Case2
無リスク金利 (3.21%)	Case3	Case4

クレジットスプレッド (スティーブ):

	Vol(フラット)	Vol(スティーブ)
無リスク金利 (1.21%)	Case5	Case6
無リスク金利 (3.21%)	Case7	Case8

価値を下回る傾向にある。

- JLT モデルとモデル A, B による評価値を比較すると、高格付けでは JLT モデルの評価値は低く、低格付けでは高くなる傾向が見られる。

第 1 点目については、高格付け社債に関しては格付けが低下することでクーポンが増加する影響の方が、信用力の低下を上回るのに対して、低格付け社債に関しては格付けが上昇することによりクーポンが減少する影響の方が、信用力の上昇を下回るからである。

第 2 点目については、JLT モデルでは支払われるクーポンの変更が何ら格付推移確率に与える影響が無いのに対して、モデル A, B では支払いクーポンが増加すると倒産確率は上昇するがその程度は格付けが低い社債の場合に大きく現れるためである。

(2) ボラティリティーに関する影響

- モデル A, B について、ボラティリティーの設定がフラットな場合、設定がスティーブな場合に比べ、全ての格付けにおいて格付リンククーポン社債の価値は相対的に大きくなる。

ボラティリティーの設定がフラットな場合、設定がスティーブな場合と比べて、高格付け社債に関してはボラティリティーが高く、逆に、低格付け社債に関してはボラティリティーが低い。これは、高格付け社債に関しては格付けの低下によるクーポンの増加の可能性が高くなること、また、逆に、低格付け社債に関しては倒産確率が低くなることを意味するので、その結果を得た。

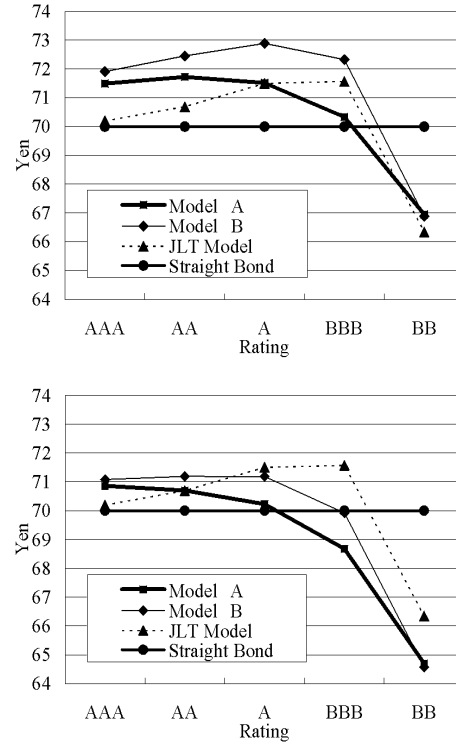


図 2 Case5(上) と Case6(下) の結果

Fig. 2 The result of case5(the upper part) and case6(the lower part)

5. まとめと結語

本論文では、格付け推移を明示的にモデル化に組み込んだ JLT モデルの類似を踏まえて、構造モデルのアプローチに基づく格付リンククーポン社債の評価モデルを提案した。提案モデルでは、格付け低下によるクーポン支払いの増加が企業財務の悪化をもたらし、将来のクーポン支払いの可能性を低下させるような影響も捉えることが可能となった。

参考文献

- 1) Aonuma, K.: An Evaluation Model for Downgrade Protection, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol. 18, pp. 627-646 (2001).
- 2) Jarrow, R., Lando, D. and Turnbull, S.: A Markov Chain Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, *Review of Financial Studies*, Vol. 10, pp. 481-523 (1997).
- 3) Merton, R.: On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, Vol. 29, pp. 449-470 (1974).