

一般システム理論を応用した弾性体の応力解析

第2報 円孔を有する帯板の引張り

江口吉象†

本研究は一般システム理論または数理システム理論を応用した二次元弾性問題の近似計算法を提案する。第2報は円孔を有する有限板に引張力を負荷した場合の応力分布を計算する方法について述べる。帯板内のある点に発生する応力は、その点の周囲の境界線上に作用する力から計算できる。弾性学の簡単な式によって、力と応力を関係づけることができる。一般システム理論はある点の応力が周囲の影響を受けてディスクリートな時刻毎に変化する状態を記述する。求めた結果は円孔を有する無限板の応力分布を解析的に求めた結果と比較した。

Stress Analysis of Elastic Bodies based on the Mathematical Theory of General Systems.

Second report : Stress distributions in a finite plate with a circular hole subjected to tension.

Yoshikata Eguchi †

Abstract The paper presents an approximate calculation method for two-dimensional elastic deformation with the aid of the mathematical theory of general systems. The 2nd report deals with calculating the stress distributions in a finite plate with a circular hole subjected to tension. The stresses at any point in a plate can be calculated from the force on the boundaries around the point. Simple formulae in elasticity establish relationship between the force and the stresses. General system theory suggests the stresses at a point evolve at discrete times under the influence of the circumference. The results were compared with analytical solutions for the stress distributions in an infinite plate with a circular hole.

1. はじめに

第1報において、システム理論を応用して、直線状のほりに純粋曲げを行った場合の応力、ひずみ等を求める方法について述べた。円孔を有する帯板の引張問題は、この方法をそのまま適用できない。理由は、ほりの純粋曲げのような一次元弾性問題では、動的システム表現の式を差分表示にすれば外力と応力・ひずみ等の関係を容易に定式化できる。

しかし円孔を有する帯板のような二次元弾性問題では、動的システム表現の式は2階の偏微分方程式となり、解析的に解くことはできない。そこで外力等の入力と応力等の関係を既存の比較的簡単な弾性学の式で

†東北大学流体科学研究所

Institute of Fluid Science, Tohoku University

記述し、これらの式を繰り返し使用することにより計算の精度を高めることにした。

実際の計算手順は、帯板上の円孔の中心に原点をおき、長手方向をx軸、幅方向をy軸とする直交座標系をとる。次ぎに時間の経過とともに、順次適当な弾性学の式を用いてx軸、y軸の応力分布が求めていく。さらにx軸、y軸の応力分布から、円孔縁の応力を求めた。最後に本論文の方式による計算結果を、円孔を有する帯板の引張問題の解としてよく知られているKirsch¹⁾、Howland²⁾の解と比較して検証した。また円孔を有する帯板の引張り問題では、y軸と円孔縁の交点で生じる応力集中係数を知ることのみ実務上必要であることが多い。そこでy軸と帯板側面の交点の応力を推定し、応力集中係数を簡略に求める方法を提案する。

2. 一般システム理論の適用

一般システム理論の動的ダイナミック表現³⁾⁴⁾は

$$\dot{p} = \{p_i : C_i \times X_i \rightarrow Y_i \text{ \& } t \in T\} \quad (2.1)$$

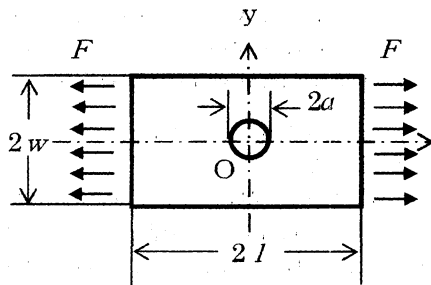
$$\dot{\phi} = \{\phi_{ii} : C_i \times X_{ii} \rightarrow C_i \text{ \& } t, t \in T \text{ \& } t < t'\} \quad (2.2)$$

と表せる。式(2.1)は試料が外部に仕事をしないので使用しない。式(2.2)は第1報で述べた一次元弾性問題では、この式を展開して試料の応力などを求めることができた。しかし円孔を有する帯板の引張問題のような二次元弾性問題では、式(2.2)を微分方程式の形に書き換えるとテンソルを変数とする2階の偏微分方程式になり、解くことはできない。しかし式(2.2)は時間軸上のディスクリートな区間 $t \sim t' \in T$ の間に、試料が入力 X_{ii} を受けると、状態量すなわち試料内の応力分布等が C_i から $C_{i'}$ に変化する。動的システム表現は、このような時間軸をディスクリートな区間に分割したとき、状態量の区間毎の変化で表せるということを述べている。そこで既存の比較的簡単な弾性学の式を借りて入力と状態量の変化を関係づけることにした。

3. 帯板の応力分布を求める手順

3-1. 試料の寸法と座標軸

中心に円孔を有する帯板として Fig.1 に示す試料を計算の対象とする。



- 円孔直径 $2a$
- 帯板長 $2l=20a$ または $40a$
- 帯板幅 $2w=10a$ または $5a$
- 帯板厚み 単位長
- 帯板の両端に負荷される引張力 F
- 帯板の縦弾性係数 E
- 帯板のポアソン比 ν

Fig.1 試料の寸法、弾性定数と座標軸

座標軸は帯板の中心に原点をとり、帯板の長さ方向を x 軸、幅方向を y 軸とする直交座標をとる。帯板の寸法が応力分布に及ぼす影響を調べるため、円孔直径を $2a$ とするとき、長さについては $20a, 40a$ の2種類、幅については $10a, 5a$ の2種類、計4種類の寸法について計算した。

3-2. 帯板の応力分布を求める手順

円孔を有する帯板の長さ方向に引張荷重を負荷した場合の応力分布を近似計算で求めるために、帯板内の状態量すなわち応力は次の5ステップを経て最終的な応力分布になると仮定した。なお Fig.3はその際使用する弾性学の問題と計算手順を図式に表したものである。説明を簡単にするため、 y 軸の応力分布を求める方法で説明する。

(1) 第1ステップ($t_0 \rightarrow t_1$)…… Fig.3(a)

円孔の存在が帯板の応力に及ぼす影響を計算する。

Fig.2 に示す擬似四角形 ABLE を x 軸に平行な n 本の幅の等しい細い角柱に分割する。頂点の集中荷重を受けるくさびの式⁵⁾⁶⁾を用いて、荷重を受ける角柱毎に y 軸上の点の応力を計算し、この結果を各点毎に加算して y 軸の応力分布を求める。

(2) 第2ステップ($t_1 \rightarrow t_2$)…… Fig.3(b)

“等分布圧力を受ける半無限板”の式⁶⁾を用いて帯板端面に受ける荷重が y 軸に及ぼす影響を計算し、第1ステップで求めた y 軸の応力分布に加算する。

(3) 第3ステップ($t_2 \rightarrow t_3$)…… Fig.3(c),(d)

第1、第2ステップで求めた応力分布は Fig.2 の点 D および点 E における境界条件を満足していない。そこで点 D に対しては“等分布圧力を受ける半無限板”の式⁶⁾(Fig.3(c))を用いて応力分布を修正し、境界条件を満足させる。点 E に対しては“半円状分布圧力を受ける半無限板”の式⁶⁾(Fig.3(d))を用いて応力分布を修正し、境界条件を満足させる。

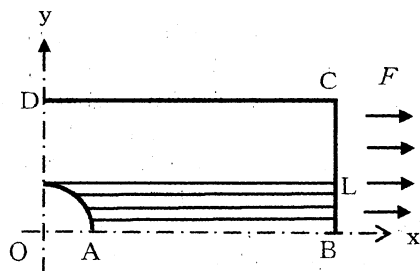
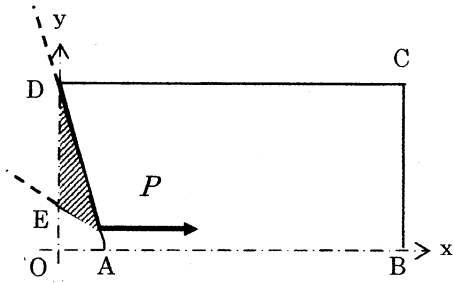
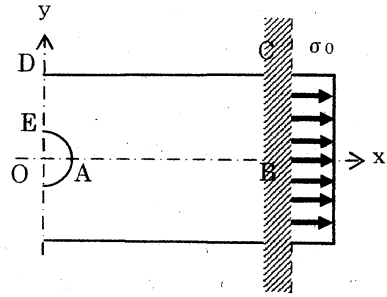


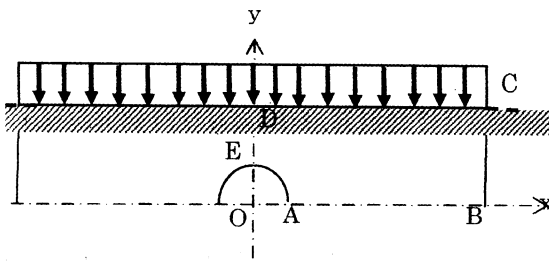
Fig.2 擬似四角形 ABLE を x 軸に平行な直線で細い角柱に分割した図



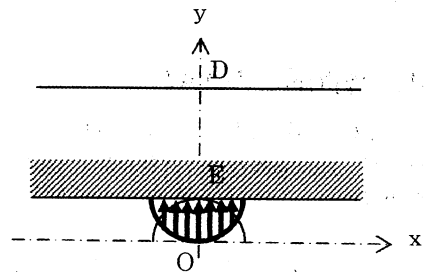
(a) 頂点に集中荷重を受けるくさび
(第1ステップ)



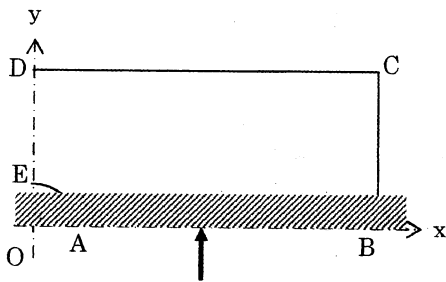
(b) 表面の一部に等分布圧力を受ける半無限板
(第2ステップ)



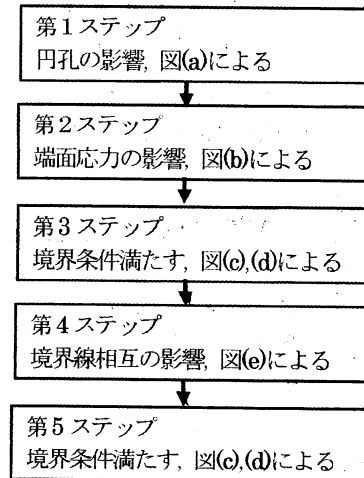
(c) 表面の一部に等分布圧力を受ける半無限板
(第3ステップと第5ステップ)



(d) 半円状分布圧力を受ける半無限板
(第3ステップと第5ステップ)



(e) 表面に集中荷重を受ける半無限板
(第4ステップ)



(f) 計算手順のフロー

Fig.3 試料の応力分布を計算するのに用いる弾性学の問題の図式表現と計算手順

(4)第4ステップ($t_3 \rightarrow t_4$)…………Fig.3(e)

以上の計算をy軸、x軸、帯板側面に対して行えばそれぞれの境界上の応力分布が求まる。第4ステップでは、境界線上の応力が他の境界線上の応力に及ぼす影響を計算する。計算は「軸集中荷重を受ける半無限板」の式⑨を用いる。

(5)第5ステップ($t_4 \rightarrow t_5$)…………Fig.3(c),(d)

第4ステップの計算の結果を第1～3ステップの計算結果に加算すると、再びFig.8に示す境界条件を満足しなくなる。そこで第3ステップと同じ計算を行い、第1～4ステップの計算結果に加算すれば、最終的に各境界線上の応力分布を求めることができる。

4. 解析解との比較

本論文の提案する方法によって計算した結果をKirsch¹⁾、Howland²⁾の解と比較したグラフがFig.4、Fig.5である。この計算の精度は十分である。

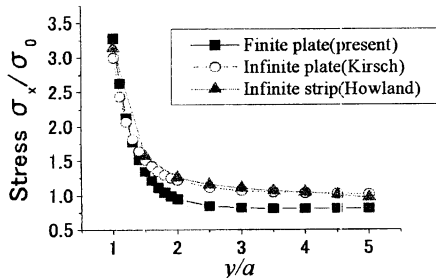


Fig.4 y軸のx方向の応力分布
(帯板幅/2=5a, 帯板長/2=10a)

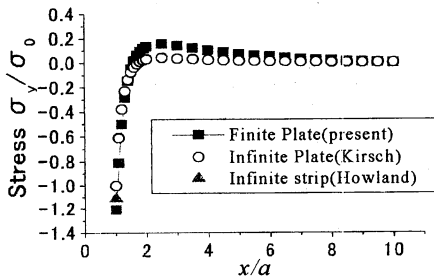


Fig.5 x軸のy方向の応力分布
(帯板幅/2=5a, 帯板長/2=10a)

5. 応力集中係数の簡易計算法

実務上応力集中係数のみ求めればよい場合がある。このような場合にy軸の応力分布と応力集中係数を簡

略に求めることができる。y軸上のx方向応力に関して第3章第1ステップは同様に求めて、第3ステップにおいて点Dのy軸のx方向応力は、y軸の点Dの応力を近似的に $\sigma_x = \sigma_0 = F/2w$ とする。このようにすると他の境界上の応力分布を求めなくても、y軸上の応力分布が求まる。結果をFig.6に示す。

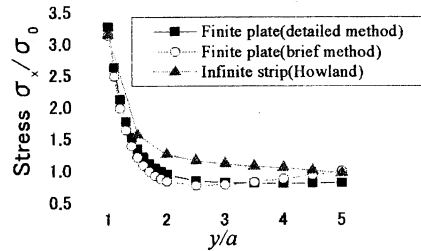


Fig.6 y軸のx方向応力分布：簡易計算法と他の方法の比較(帯板幅/2=5a, 帯板長/2=10a)

6. 結論

二次元弾性問題である「円孔を有する帯板の引張り」問題では、帯板の応力分布を簡単な弾性学の式を利用して、ディスクリットな時間毎に入力と状態量すなわち荷重と応力の関係を求めることができる。この結果時間の経過とともに、計算精度を高めることができる。この方法による計算結果は十分実用に耐えられる精度である。

参考文献

- 1) Kirsch, G., Die Theorie der Elastität und die Bedürfnis der Festigkeitslehre, Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure, Band 42, pp.797 ~807(1898)
- 2) Howland, R. C. J., On the Stress in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip Under Tension, Philosophical Transaction of the Royal Society of London, Vol.229, PP.49~86(1930)
- 3) 高原康彦, システム工学の理論, 日刊工業新聞社, 1974
- 4) 高原康彦, 飯島淳一, システム理論, 共立出版, 1990
- 5) 倉田正嗣, 弾性学, 日本機械学会, 1948
- 6) 中原一郎, 渋谷寿一, 土田栄一郎, 笠野英秋, 辻 知章, 井上裕嗣, 弾性学ハンドブック, 朝倉書店, 2001