

下方への指値変更を許容した最適指値注文モデル

山田 辰徳[†] 宮崎 浩一[†]

既存指値注文モデル Mönch(2005) では、指値は売却期間を通して固定されていた。本論文では、株価がある下境界価格まで下落すれば下方への指値変更を許すようにモデルを拡張する (既存モデルを含む)。本研究モデルにおいて、既存モデルより高めの初期指値、下境界価格、指値の変更幅の3つの最適な組合せを決定することで、既存モデルと注文執行確率が等しい制約の下で、既存モデルより高い期待売却益を得られる。数値例では、注文枚数別、注文執行確率別に両モデルの期待売却益を検討し、本研究モデルにおける最適な初期設定パラメータ (初期設定指値、下境界価格、指値の変更幅) について分析する。

Optimal limit order model to allow re-specifying lower limit price

TATSUNORI YAMADA[†] and KOICHI MIYAZAKI[†]

Limit order execution model in the preceding research (Mönch (2005)) does not incorporate the change in the limit order price in the predetermined execution interval. In this paper, we try to extend the existing model so as to allow the lower shift of the limit order price when the equity price goes down to the pre-specified lower boundary and in the result our model includes the exiting model as a special case. Deriving the optimal combination of the three such as initial limit order price that is set a bit higher than the one in existing model, lower boundary and the amount of the lower shift when the equity price hits the lower boundary based on our proposed model, we can attain the higher expected profit under the same execution probability constraint. In numerical examples, we examine the difference in the expected profit emanating from the difference in the two models and analyze the optimal combination of the three parameters.

1. はじめに

現在の市場取引における株式売買の注文方法には、取引価格を指定する指値注文がある。高い指値を設定すればより高い価格で売却できるが、設定指値が高すぎると注文を行ってから取引が執行されるまでの時間が長くなってしまふ。近年、直感や経験則等に頼った注文方法のみでなく、取引の執行についてモデル化を行うなど定量的な観点からの分析、注文判断も見られる。Mönch(2005)¹⁾では、ある一定期間内に大量の売却注文を執行されなければいけないという状況を想定し、他の市場参加者への影響を小さくするために一度に全ての注文を行うのではなく全注文をいくつかに分割して注文する、アイスバーグ注文を提案している。

しかし、Mönch(2005)においては、注文指値決定後における注文指値の変更に関する議論はなされていない。実際のビッド価格は、上昇のみでなく下降する

場合も考えられ、ビッド価格が大きく下落した時に、短期間内に注文指値まで上昇する可能性は低く、この点を考慮したモデル化は重要な課題である。

そこで、本論文では Mönch(2005) 同様の設定の下で、ビッド価格がある境界価格まで下落する場合に設定していた注文指値を低く変更するという株価の下落に対応したモデルを考え、Mönch(2005)の指値変更を許容しないモデルに比べ、より実用性の高いモデルの提案を試みる。

2. 先行研究モデルの設定

2.1 注文方法の仮定

Mönch(2005)のモデル、本研究モデルともに次の3つの仮定を前提とする。

仮定 1 全注文枚数 ϕ_0 に対して、一度に見せる注文枚数 ϕ_p (但し $\phi_p \leq \phi_0$) と注文指値 \bar{s} を決定して注文を行い、一度に見せる注文枚数 ϕ_p 全ての注文が執行されたら次の注文を行う。

仮定 2 自らのアスク (売り) 注文 ϕ_p の前後には他の市場参加者の一定のアスク注文枚数 ϕ_a が入る。

[†] 電気通信大学大学院システム工学専攻
Department of Systems Engineering, The University of
Electro-Communications

仮定 3 最高ビッド価格が注文指値に到達したときには一定の取引枚数 ϕ_s のみが執行される。

2.2 前提モデルの定式化

注文の執行時点を決定する最高ビッド価格 $S(t)$ は次の確率過程に従うとする。

$$dS(t) = \mu_n S(t) dt + \sigma S(t) dW_t \quad (1)$$

$$S(t) < \bar{S}$$

$$S(t_n) = (1 - \varepsilon) \bar{S} \quad S(t) = \bar{S} \quad (2)$$

μ_n , σ はそれぞれドリフト, ボラティリティ・パラメータ, dW_t は標準ブラウン運動を示す。また, 最高ビッド価格 $S(t)$ が指値に n 回到達する時点 t_n においては, 指値 \bar{S} に定数 ε を乗じた価格分だけ下方にジャンプする。ドリフトパラメータ μ_n は, ビッドとアスク両方の注文枚数のバランス B_n によって決定する。

$$\mu_n = \mu_{n-1} + \beta (B_n - B_{n-1}) \quad n \geq 1 \quad (3)$$

$$\mu_0 = \beta (B_0 - \bar{B}) \quad n = 0 \quad (4)$$

$\beta (> 0)$ は定数。

$$B_n(\phi_{dp}) = \frac{c}{d + \phi_{dp}} \quad (5)$$

$$\bar{B} = \frac{c}{d} \quad (6)$$

c はビッドの注文枚数の合計, d はビッド, アスク両方の注文枚数の合計 (自らの注文は除く) を示し, ϕ_{dp} は自らの注文枚数の中で板状に残っている内の市場で公開されている注文枚数を表す。

2.3 最適化問題

$$\max_{\{\phi_p, \bar{S}\}} \phi_0 \bar{S}$$

$$s.t. P^+ \leq P(M \geq n^*) = \int_0^T f_{0,n^*}(t) dt$$

$$S_0 \leq \bar{S}$$

$$\phi_p \leq \phi_0$$

ここで, P^+ は目的の期限内に全ての注文枚数 ϕ_0 が執行される確率であり, 注文者が直接設定するものである。 M は実際に売却期間において最高ビッド価格 $S(t)$ が注文指値に到達する回数を示している。 $f_{0,n^*}(t)$ は, 最高ビッド価格 $S(t)$ が 0 時点において一度も指値に到達しておらず, 時点 t において指値への到達回数が合計 n^* 回となる確率密度関数である。 n^* は自らの全注文枚数 ϕ_0 を全て売却するために必要な取引回数であり, T は売却期限である但し, $f_{0,n}(t)$ は $f_{0,1}(t)$, $f_{j,j+1}(t)$ を基に次のように与えられる。

$$f_{0,1}(t) = \frac{\ln(\bar{S}/S_0)}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{[\ln(\bar{S}/S_0) - (\mu_n - \sigma^2/2)t]^2}{2\sigma^2 t}\right\} \quad (7)$$

$$f_{0,n}(t) = \int_0^t f_{0,n-1}(t-u) f_{n-1,n}(u) du$$

$$= (f_{0,1} \cdot f_{1,2} \cdot \dots \cdot f_{n-1,n})(t) \quad (8)$$

但し, $(f_{j-1,j} \cdot f_{j,j+1})(t) = \int_0^t f_{j-1,j}(t-u) f_{j,j+1}(u) du$ であり, $f_{j,j+1}(t)$ は式 (7) における S_0 を $(1 - \varepsilon) \bar{S}$ と置き換えれば得られる。以後この最適化モデルを既存モデルと呼ぶ。

3. 本研究モデル

3.1 本研究最適化モデル

3.1.1 最適化モデルの定式化

本研究で提案する最適化問題は, 次の通りである。

$$\max_{\{\phi_p, \bar{S}, a, b\}} \frac{\phi_0 \bar{S}' \int_0^T f_{0,n^*}(t) dt}{\phi_0 P(M \geq n^*)}$$

$$s.t. P^+ \leq P(M \geq n^*) = \int_0^T \sum f_{0,n^*}(t) dt$$

$$S_0 \leq \bar{S}$$

$$\phi_p \leq \phi_0$$

目的関数の分子は, 注文指値の変更も考慮して求めた n^* 個の各注文指値の期待値 \bar{S}' にその事象が起きる確率 $\int_0^T f_{0,n^*}(t) dt$ と全注文枚数 ϕ_0 を乗じた期待売却益を表しており, 分母は, 期待執行枚数を表している。この目的関数では, 一度に見せる注文量 ϕ_p , 注文指値 \bar{S} , 下境界係数 a , 指値変更係数 b の 4 つのパラメータを変化させ, 期待執行枚数 1 当たりの期待売却益の最大化を図っている。制約条件 $P^+ \leq P(M \geq n^*) = \int_0^T \sum f_{0,n^*}(t) dt$ については, $2n^*$ 通りある最高ビッド価格 $S(t)$ が n^* 回注文指値に到達する確率 $\int_0^T f_{0,n^*}(t) dt$ の合計 $\int_0^T \sum f_{0,n^*}(t) dt$ が, 目的の期限内に全注文枚数が執行される確率 P^+ を上回るという制約を課している。

3.1.2 $f_{0,n}(t)$ の導出

$f_{0,n}(t)$ は

- (I) 最高ビッド価格 $S(t)$ が下境界を下回らずに期限内に注文指値に到達する
 - (II) 最高ビッド価格 $S(t)$ が下境界を一度下回りかつ, その後に変更後の注文指値に到達する
- の二つのケースで導出される確率密度関数 $f_{0,1}(t)$, $f_{j,j+1}(t)$ を基に算出する。ここでは () のケースの $f_{0,1}(t)$ のみを示す。

$$\begin{aligned}
f_{0,1}(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln(\bar{S}/a^{2(i-1)}S_0)}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} \\
&\times \exp\left[-\frac{\ln(\bar{S}/S_0) - (\mu_n - \sigma^2/2)t^2}{2\sigma^2 t}\right. \\
&\quad \left.- \frac{\{\ln a^{2(i-1)}\} \left\{\ln(\bar{S}/a^{(i-1)}S_0)\right\}^2}{2\sigma^2 t}\right] \\
&+ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\ln(a^{2i}\bar{S}/S_0)}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}} \\
&\times \exp\left[-\frac{\ln(\bar{S}/S_0) - (\mu_n - \sigma^2/2)t^2}{2\sigma^2 t}\right. \\
&\quad \left.+ \frac{(\ln a^{2i}) \left\{\ln(a^i\bar{S}/S_0)\right\}^2}{2\sigma^2 t}\right] \quad (9)
\end{aligned}$$

$f_{j,j+1}(t)$ (但し $j \geq 1$) であるが、注文指値を変更した回数 k (但し $k \leq j$) に応じて、初期値を $S(t_j) = (1-\varepsilon)b^k\bar{S}$ とし、さらに、下境界は $a^{k+1}\bar{S}$ 、注文指値は $b^k\bar{S}$ と変化させることで導出できる。そして注文指値を変更しない場合と変更する場合、それぞれの場合の確率密度関数 $f_{0,1}$ 、 $f_{j,j+1}$ を $f_{0,1}^j$ 、 $f_{j,j+1}^j$ と $f_{0,1}^{j_1,j_2,\dots,j_n}$ 、 $f_{j_1,j_2,\dots,j_n}^{j_1,j_2,\dots,j_n}(t)$ というように記述すると、確率密度関数 $f_{0,n}^{j_1,j_2,\dots,j_n}(t)$ は 2^n 通り考えられ、各確率密度関数は

$$\begin{aligned}
&f_{0,n}^{j_1,j_2,\dots,j_n}(t) \\
&= \int_0^t f_{0,n-1}^{j_1,j_2,\dots,j_n}(t-u) f_{n-1,n}^{j_n}(u) du \\
&= (f_{0,1}^{j_1} \cdot f_{1,2}^{j_2} \cdot \dots \cdot f_{n-1,n}^{j_n})(t) \quad (10)
\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで j_m ($m \leq n$) は指値を変更しない場合は 1、指値を変更する場合は 2 の値をとる。従って、指値変更も考慮した最高ビッド価格 $S(t)$ が n 回注文指値に到達する確率 $\int_0^T \sum f_{0,n}(t) dt$ は、 2^n 個の $\int_0^T f_{0,n}(t) dt$ の和、式 (11) で表される。

$$\begin{aligned}
\sum f_{0,n}(t) &= \int_0^t \sum_{j_n=1}^2 f_{0,n-1}(t-u) f_{n-1,n}^{j_n}(u) du \\
&= \sum_{j_1,j_2,\dots,j_n=1}^2 (f_{0,1}^{j_1} \cdot f_{1,2}^{j_2} \cdot \dots \cdot f_{n-1,n}^{j_n})(t) \quad (11)
\end{aligned}$$

4. 数値実験

4.1 データ、シミュレーション設定

- 最適化部分を除くモデル設定は Mönch(2005) の設定と同様とし、全注文を売却するために必要な取引回数 n^* 、最高ビッド価格 $S(t)$ のドリフトパ

ラメータ μ_n を決定するために必要な自らの注文以外の各注文枚数と売却期限 T については表 1 に示し、最高ビッド価格 $S(t)$ についてのパラメータは表 2 のように与える。

表 1 自らの注文以外の注文枚数、全注文売却期限

ϕ_s (枚)	ϕ_a (枚)	c (枚)	d (枚)	T (時間)
868.2	100	166465.87	291657.18	50

表 2 最高ビッド価格パラメータ

S_0 (sen)	σ	ε	β
2855	0.7	0.00090724	116.647882

- 全注文枚数 ϕ_0 、一度に見せる注文枚数 ϕ_p の組合せ (ϕ_a, ϕ_p) として (500,500)、(2000,2000)、(5000,3000) の 3 通りを考慮する。
- 期待売却益を最大化する、一度に見せる注文枚数 ϕ_p 以外のパラメータに関しては、既存モデルにおいては、設定指値について 2860(sen) から 3020(sen) まで 1(sen) ずつ変化させた 161 通り、本研究モデルにおいては初期設定指値について 2860(sen) から 3020(sen) まで 10(sen) ずつ変化させた 17 通り、指値変更係数 b について 90% から 99% まで 10 通り、下境界係数 a について 85% から 99% まで 15 通り (但し $a \leq b$) を考え、両モデルにおいての、期待執行枚数 1 枚当たりの期待指値 (既存モデルの場合は設定した指値) を比較する。

4.2 実験結果と考察

全注文枚数 ϕ_0 別の結果

全注文枚数 ϕ_0 別の両モデルの期待指値の乖離 (本研究モデル-既存モデル) に関して、次の結果を得た。

- 全注文枚数 ϕ_0 が少ないほど、両モデルの期待指値の乖離は大きい。

本研究モデルにおいて、各係数 $a = 95\%$ 、 $b = 98\%$ として初期指値 \bar{S} を 2910、2920、2930、2940(sen) の 4 通りを考えた場合で、導出された注文執行確率に

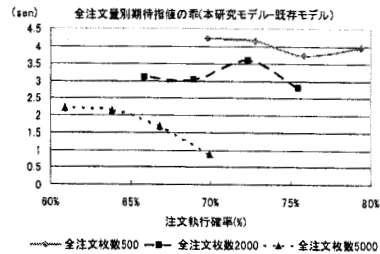


図 1 モデルの期待指値の乖離

おける両モデルの期待指値の乖離を図1に示した。例えば、図1の全注文枚数70%の場合を比較すると、全注文枚数が500の場合の乖離は約4.2(sen)であるのに対し、全注文枚数が5000の場合の乖離は約0.9(sen)である。実際の売却価格を考慮すると、注文執行期間が50時間であり、全注文枚数が500の場合には、既存モデルに対して0.144(=4.2/2910)%の超過収益が得られ、短期間における投資において提案モデルの有用性が伺える。

全注文枚数 $\phi_0 = 500$ における注文執行確率別の結果

- 注文執行確率が60%から90%程度において両モデルの期待指値の乖離(本研究モデル-既存モデル)は約4(sen)で最大となり、90%以上に大きく、または60%以下に小さくなるに従って乖離は小さくなった。(図2参照)
- 初期指値と既存モデルの指値との差、指値の変更幅は、注文執行確率が高くなるほど大きい値をとり、最高ビッド価格の初期値 S_0 と下境界の差は注文執行確率による影響を受けなかった。(図3参照)

注文執行確率0%から100%まで5%ごとに区切り、各区分において、最も大きい期待指値の乖離(本研究モデル-既存モデル)を1つずつプロットして図2に示した。図2を見ると、期待指値の乖離は注文執行確率が比較的高い60%から90%で最大となっている。注文執行確率を高く設定しすぎると、両モデルとも指値は低く設定されるため、指値を低く変更する有効性が低くなってしまふ。逆に、注文執行確率を低くすぎる場合、両モデルとも期待指値は高く設定されるが、本研究モデル指値の変更幅は小さくなってしまふ(変更幅が大きい場合は注文執行確率が高くなってしまふ)。本研究モデルは、最高ビッド価格 $S(t)$ が下落した場合に指値を低く変更して注文執行確率を高めるモデル

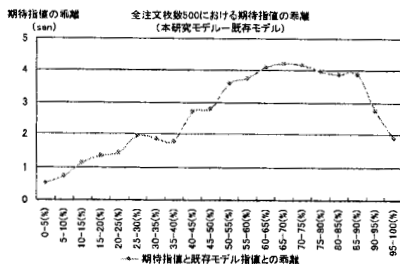


図2 両モデルの期待指値とその乖離 (注文執行確率5%毎の最大値)

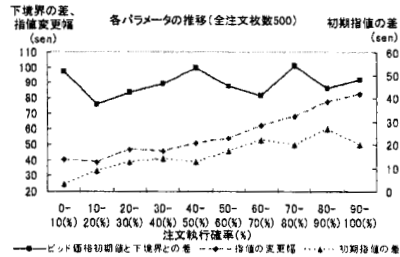


図3 各パラメータの推移 (注文執行確率10%毎の平均値)

であり、注文執行確率が低くすぎる場合も既存モデルに対する優位性は見えにくくなる。

また、両モデルにおいて全てのパラメータの組合せから得られた注文執行確率を0%から100%まで注文執行確率を10%ごとに区切った場合の各区分における、実際の指値の変更幅、最高ビッド価格の初期値 S_0 と下境界との乖離幅、本研究モデルでの初期指値と既存モデルでの指値の乖離幅の平均値を図3にそれぞれ示した。図3を見ると、実際の指値の変更幅、初期指値と既存モデルでの指値の乖離幅は注文執行確率が高くなるほど大きくなっており、最高ビッド価格の初期値 S_0 と下境界との乖離幅は注文執行確率によってぶれはあるが、ほぼ一定の値をとっている。これらの結果から、各パラメータの組合せの値が注文執行確率に与える影響は整合的であることが確認できる。

5. まとめと結語

本論文では、株価の下落に対して下方への指値変更を許容した指値注文モデルを提案し、全注文枚数、注文執行確率別に、指値の変更を許容しない指値注文モデルとの比較を行った。数値実験では、注文枚数、注文執行確率別に両モデルの期待指値の乖離、そのときの下境界係数、指値変更係数、初期指値を決定し、注文枚数が小さい場合は比較的高い注文執行確率において既存モデルより大きい期待売却益を得られることが確認できた。

参考文献

- 1) B.Mönch: The Navigation of an Iceberg: Strategic Trading in Illiquid Markets, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems(2005)