

空間的相関を持つコーシー分布とガウス分布によるノイズが混在した画像修復について

綴木 馴^{†,††} 酒井 英昭^{††}

本論文では、空間的相関を持つガウス分布と、同じく空間的相関を持つコーシー分布に従うノイズが重畳されている画像から、それらを除去することを目指す。重畳されたノイズは、ガウス分布とコーシー分布に従うノイズの線形和になるが、本研究では、画像修復の際のカーネルとしてガウス分布を用いることで、ガウス分布に従うカーネルの頑強性について調べる。

Image restoration under spatially correlated noise generated by a mixture of Cauchy and Gaussian distributions

JUN TSUZURUGI^{†,††} and HIDEAKI SAKAI^{††}

In this paper, we treat two types of noise which obey Cauchy distribution and Gaussian distribution, to be removed from a distorted image in image restoration. The distorting noise is a linear combination of the above two types of noise, but in this research, we use only the Gauss kernel in a restoration procedure. For this procedure, we investigate and show the strength and flexibility of the the Gaussian kernel.

1. はじめに

近年、確率モデルを用いた関数近似問題の研究が盛んになり、画像修復^{1),2)}やガウス過程への応用がなされている。その一方でそれらの研究における、統計力学を用いた数理解析も行われている¹⁾。本論文では、計算の簡単化と高速化のために周期境界条件を課し、カーネル行列を対角化することで高速フーリエ変換を用いる。また本論文では、ガウス分布とコーシー分布の2つの空間的な相関を持つノイズが混在した場合の画像修復モデルを考える。ガウス分布とコーシー分布の形は見た目によく似ているが、コーシー分布は平均と分散を持たない。本研究では、特に空間的相関を持つガウス分布に従うノイズを修復するためのカーネルとして用いて、コーシー分布にも対応できるかを調べる事により、ガウスカーネルの頑強性について調べる。

2. モデル

画像は通常2次元格子上で定義されるが、ここでは一般化してd次元格子上の画像を考える。d次元立方

格子の一边あたりの画素数をLとする。この場合、素子の総数Nは $N = L^d$ となる。

格子点*i*上の原画像の画素値 ξ_i は、以下の多重ガウス分布に従い生成されるとする、

$$P(\xi) = \frac{1}{Z_{\text{prior}}(\beta, h)} \exp[-H(\xi, \beta, h)], \quad (1)$$

$$H(\xi, \beta, h) = \xi^T (\beta G + h I) \xi. \quad (2)$$

ただし、 β, h は正のスカラーである。 G は行列、 I は単位行列であり、 $Z_{\text{prior}}(\beta, h)$ は

$$Z_{\text{prior}}(\beta, h) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} |\beta G + h I|^{-\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

である。

今回は行列 G が並進対称行列であるとし、その要素 $G_{i,j}$ を

$$G_{i,j} = 2d\delta_{(i-j),0} - \sum_{\delta} \delta_{(i-j),-\delta} - \sum_{\delta} \delta_{(i-j),\delta}, \quad (4)$$

とした場合を議論する^{?)}。ただし、 i, j は素子の位置ベクトルで、d次元ベクトル δ は次の値をとる、

$$\delta = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1). \quad (5)$$

一方で式(4)の $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタである。 $G_{i,j}$ は最近接画素間のみ相互相互作用が存在することを意味する。

† 岡山理科大学

Okayama University of Science

†† 京都大学大学院情報学研究科

Graduate School of Informatics, Kyoto University

本論文で取り扱う画像にはすべて周期境界条件が成り立つと仮定する。周期境界条件を持つ定常ランダム信号 $x(m, n)$ を 2 次元信号とすると周期的境界条件は L を周期として、

$$x(m+L, n) = x(m, n) \quad (6)$$

$$x(m, n+L) = x(m, n) \quad (7)$$

ただし、

$$m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8)$$

である。

本論文では、 $\tau = \{\tau_i\}$ を劣化画像とし、 θ をガウス分布による劣化過程 (原画像+ノイズ)、 $\frac{\gamma}{\sigma}$ をコーシー分布によるノイズとする。これを式であらわすと、以下の様になる。

$$\tau = \theta + \frac{\gamma}{C} \quad (9)$$

まず、ガウス分布による劣化過程を次のように置く。

$$P_{\text{out}}(\theta|\xi) = \frac{1}{Z_{\text{noise}}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\theta - \xi)^T R^{-1}(\theta - \xi)\right] \quad (10)$$

ただし、

$$Z_{\text{noise}}(R) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} |R|^{-\frac{1}{2}} \quad (11)$$

である。 R はノイズの相関行列であり、並進対称性を持つとする。本論文ではピクセル間の距離の二乗 $(i-j)^2$ に対して \exp で減少する項を用いて次のような相関行列 R を議論する。

$$R_{ij} = b^2 \exp\left[-\frac{(i-j)^2}{\kappa^2}\right] \quad (12)$$

式 (12) にはある種のかなり複雑な対称性がある。信号 $x(m, n)$ が実数のときは、

$$R_{L-p, q} = E[x(m+L-p, n+q)x(m, n)] \quad (13)$$

$$= E[x(m-p, n+q)x(m, n)] \quad (14)$$

$$= R_{-p, q} = R_{p, -q} \quad (15)$$

$$R_{p, L-q} = R_{p, -q} = R_{-p, q} \quad (16)$$

$$R_{L-p, L-q} = R_{p, q} \quad (17)$$

が相関関数に課せられる制約条件となる。

b および κ は実数である。また i, j は素子の位置ベクトルである。コーシー分布については後で述べる。

3. 理 論

式 (4), (12) で与えられる相関行列はいずれも並進対称行列であり、これらは後述するようにフーリエ変換により対角化できる。本論文では、この対角化を利用して計算を簡単化する。

離散フーリエ変換を次で定義する。

$$\tilde{\xi}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_j \xi_j e^{-ik \cdot j} \quad (18)$$

i は虚数単位である。 k も j と同じ d 次元ベクトルであり、自由度は L^d である、

$$\sum_j = L^d = N, \quad \sum_k = L^d = N. \quad (19)$$

また、 k の各成分は以下のような値をとる。

$$0, \frac{2}{L}\pi, \frac{4}{L}\pi, \dots, \frac{2(L-1)}{L}\pi \quad (20)$$

式 (18) を用いると、式 (1) の \exp 内をフーリエ表記することができて、

$$P(\xi) = \frac{1}{Z_{\text{prior}}(\beta, h)} \exp\left[-\sum_k (\beta \tilde{G}_k + h) \tilde{\xi}_k \tilde{\xi}_{-k}\right], \quad (21)$$

$$\tilde{G}_k = \sum_{\delta} [2 - 2 \cos(k \cdot \delta)], \quad (22)$$

となる。式 (10) の \exp 内も式 (1) と同様にフーリエ表記できるので、

$$P_{\text{out}}(\tau|\xi) = \frac{1}{Z_{\text{noise}}} \times \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_k \tilde{R}_k^{-1} (\tilde{\tau}_k - \tilde{\xi}_k) (\tilde{\tau}_{-k} - \tilde{\xi}_{-k})\right], \quad (23)$$

となる。

次に、空間的相関を持つコーシー分布によるノイズについて考える。 X, Y が式 (10) に従い発生させた 2 つの独立な画像の同じ位置のピクセル値だとすると、式 (10) の周辺分布である、 X, Y の分布は平均 0、分散 D のガウス分布に従う。ただし、 D は位置により異なる。よって、 $\frac{\gamma}{\sigma}$ はどの位置でもコーシー分布に従う。コーシー分布に従うデータを本論文では γ と置く。式 (9) の C は、ガウス分布に従うデータとコーシー分布に従うデータの影響力を調節するための定数である。本論文では、ガウス分布によるノイズとコーシー分布によるノイズとが混ざった画像をガウス分布のカーネルで修復することを目的としている。

4. 修復過程

ここで σ を修復画像としよう。ペイズの公式を用いると、劣化画像 τ が与えられた場合の修復画像 σ の

事後確率が計算できる,

$$\begin{aligned} P(\sigma|\tau) &= \frac{P_{\text{out}}(\tau|\sigma)P(\sigma)}{\int d\sigma P_{\text{out}}(\tau|\sigma)P(\sigma)} \quad (24) \\ &= \frac{\exp[-H_{\text{eff}}]}{\int d\sigma \exp[-H_{\text{eff}}]}. \quad (25) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= \xi^T(\beta G + hI)\xi \\ &\quad + \frac{1}{2}(\tau - \xi)^T R^{-1}(\tau - \xi), \quad (26) \end{aligned}$$

である.

式(25)の事後確率 $P(\sigma|\tau)$ に基づく期待値を $\langle \cdot \rangle$ であらわす. 修復画素 σ_j の期待値は,

$$\langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \rangle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}}, \quad (27)$$

となる. フーリエ成分 $\sigma_{\mathbf{k}}$ の期待値は, 式(25)を用いて,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \rangle &= \int \prod_{\mathbf{k}'} d\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}'} \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} P(\sigma|\tau) \quad (28) \\ &= \frac{\int \prod_{\mathbf{k}'} d\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}'} \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} e^{-\hat{H}_{\text{eff}}}}{\int \prod_{\mathbf{k}'} d\tilde{\sigma}_{\mathbf{k}'} e^{-\hat{H}_{\text{eff}}}}, \quad (29) \end{aligned}$$

となる. ただし, \hat{H}_{eff} は式(26)をフーリエ表記したもので,

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{eff}} &= \sum_{\mathbf{k}} (\hat{\beta} G_{\mathbf{k}} + \hat{h}) \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}} (\tilde{\tau}_{\mathbf{k}} - \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}})(\tilde{\tau}_{-\mathbf{k}} - \tilde{\sigma}_{-\mathbf{k}}), \quad (30) \end{aligned}$$

である. また, ここでは画像やノイズの生成確率をあらわす $\beta, h, \tilde{R}_{\mathbf{k}}$ が既知ではないとしている. ただし, それらの関数形は既知であるとし, それらに対応するハイパーパラメータを $\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{\tilde{R}}_{\mathbf{k}}$ としている. ここで,

$$\begin{aligned} \hat{A}_{\mathbf{k}} &= \hat{\beta} \hat{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}, \\ \hat{B}_{\mathbf{k}} &= \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}, \quad (31) \end{aligned}$$

を式(29),(30)に代入すれば,

$$\langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{\hat{B}_{\mathbf{k}}}{\hat{A}_{\mathbf{k}}} \tilde{\tau}_{\mathbf{k}}, \quad (32)$$

となり, 式(27)の $\langle \sigma_j \rangle$ は,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j \rangle &= \\ &= \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{i}} \frac{\tau_{\mathbf{i}} \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}} \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{i})]}{\hat{\beta} \hat{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}}}, \quad (33) \end{aligned}$$

となる. 本論文では式(33)を修復画像とする.

5. 画像修復

5.1 ハイパーパラメータ推定

式(33)を用いて画像修復するには, β, h, b, κ などのハイパーパラメータを求めなくてはならない. ここでは, ハイパーパラメータ推定方法として, 周辺尤度最大化を用いる. 劣化画像 τ の生起確率 $P(\tau)$ は,

$$P(\tau) = \int d\xi P_{\text{out}}(\tau|\xi)P(\xi) \quad (34)$$

となる. $P(\tau)$ を周辺尤度と呼ぶ. 周辺尤度 $P(\tau)$ はハイパーパラメータの関数である. 劣化画像 τ が与えられた場合に, 周辺尤度 $P(\tau)$ に最大値をとらせるハイパーパラメータの値を, 周辺尤度最大化による推定値とする. $\ln(P(\tau))$ を $\hat{\beta}, \hat{h}, \hat{b}^2$ および $\hat{\kappa}^2$ で偏微分し, $\ln(P(\tau))$ の停留点が満たす方程式を求めると,

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \left(\sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\tilde{G}_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{h}}{\hat{\beta}}} \right) \left[\sum_{\mathbf{k}} \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\tilde{G}_{\mathbf{k}}}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^4 \left(\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right]^{-1} \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{h} &= \left(\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{1 + \frac{\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}}}{\hat{h}}} \right) \left[\sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^4 \left(\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right]^{-1} \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{b}^2 &= \left[\sum_{\mathbf{k}} \left\{ + \sum_{\mathbf{l}} e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right\} \frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\tilde{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \left(\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right)}{\left(\hat{\beta} \tilde{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2\hat{R}_{\mathbf{k}}^2} \right)^2} \right] \quad (37) \end{aligned}$$

$$\hat{\kappa}^2 = \left[-\frac{\hat{b}^2}{\hat{\kappa}^2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{R_{\mathbf{k}}} \sum_l l^2 e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \right] \times \left[\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}}}{\hat{\beta} \hat{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2R_{\mathbf{k}}}} + \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{\beta} \hat{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right) |\hat{\tau}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\frac{\partial}{\partial \hat{\kappa}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} \left(\hat{\beta} \hat{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} \right)}{\left(\hat{\beta} \hat{G}_{\mathbf{k}} + \hat{h} + \frac{1}{2R_{\mathbf{k}}} \right)^2} \right]^{-1} \quad (38)$$

となる。さらに、

$$\frac{\partial}{\partial \hat{b}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{\hat{\kappa}^2} \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\kappa}^2} \hat{Q}_{\mathbf{k}} = -\frac{\hat{b}^2}{\hat{\kappa}^4 R_{\mathbf{k}}} \sum_l e^{-\frac{l^2}{\hat{\kappa}^2}} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{l}) \quad (40)$$

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{R_{\mathbf{k}}} \quad (41)$$

である。式(35), (36), (37), (38)に初期条件を与え、漸化式として収束するまで帰帰的に回す。

5.2 平均二乗誤差

ピクセルごとの修復画像と原画像の差の平均二乗誤差 E_1 の期待値は、

$$E_1 = \left\langle \left\langle \frac{1}{N} \sum_j (\xi_j - \langle \sigma_j \rangle)^2 \right\rangle \right\rangle \quad (42)$$

となる。ここで、 $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$ は同時分布 $P(\tau, \xi) = P_{out}(\tau|\xi)P_o(\xi)$ に関する平均である。同様に劣化画像と原画像の平均二乗誤差 E_2 を求めることができる。

$$E_2 = \left\langle \left\langle \frac{1}{N} \sum_j (\xi_j - \tau_j)^2 \right\rangle \right\rangle \quad (43)$$

6. 結 果

図1, 2に、式(9)において、それぞれ $C = 100$, $C = 1.0$ とした場合における画像修復の様子を示す。図1, 2のいずれの場合においても、原画像のハイパーパラメータを、それぞれ $\beta = 0.5$, $h = 10^{-4}$ とし、ノイズのハイパーパラメータを、それぞれ $\tau = 0.75$, $\kappa = 7.0$ とした。また、画像のサイズは $L = 64$ とした。図1に $C = 100$ とした場合の画像修復の様子を示す。図1では、コーシー分布の影響が出はじめており、修復は $E_2 = 0.86$ から $E_1 = 0.64$ とわずかにしか成功していない。このことから、ガウスカーネルはコーシー分布に対応できないことが分かる。図2に

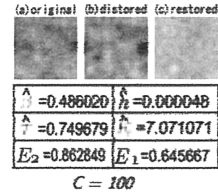


図1 ガウス分布によるノイズとコーシー分布によるノイズによって劣化した画像を修復する様子。(a)に原画像、(b)に劣化画像、(c)に修復画像を示す。式(9)において、 $C = 100$ とした。

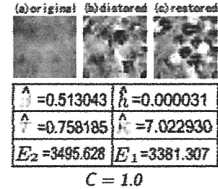


図2 ガウス分布によるノイズとコーシー分布によるノイズによって劣化した画像を修復する様子。(a)に原画像、(b)に劣化画像、(c)に修復画像を示す。式(9)において、 $C = 1.0$ とした。

$C = 1.0$ とした場合の画像修復の様子を示す。図2の劣化画像(b)と修復画像(c)は数値誤差的にも見た目にもほとんど同じで、修復が全くうまく行っていないことが分かる。このことから、やはりガウスカーネルだけではコーシー分布に従うノイズに対応できないことが分かる。

7. ま と め

本論文では、空間的相関を持つコーシー分布と、同じく空間的相関を持つガウス分布に従う2つのノイズを重畳させた場合において、これら2つのノイズを同時に除去することを試みた。シミュレーション実験の結果、空間的相関を持つガウスモデルでは、同じく空間的相関を持つコーシー分布のノイズに対応できないことが判明した。このことから、いくら輝度ヒストグラムの分布の形が似ていても、それぞれの分布に対応した修復モデルを構築する必要があることが分かった。

参 考 文 献

- 1) J. Tsuzurugi, M. Okada, "Statistical mechanics of Bayesian image restoration under spatially correlated noise," Physical Review E, vol.66, 066704, 2002.
- 2) 綴木 剛, 英保 茂, "空間的相関のあるノイズによって劣化した画像の修復," 電子情報通信学会論文誌 Vol. J88-A, No3, Mar, 2005.