アルゴリズム 5−12
(1989. 1. 26)

高連結確率グラフの設計法について

孫 正　永持 仁　楠 菊信

豊橋技術科学大学 情報工学系

グラフの節点数nおよび枝数eが与えられたとき，枝連結度λを最大にするグラフ，つまりλ(G)=⌊2e/n⌋を満たすグラフGの構成法は1962年Hararyにより与えられている．最近，λ(G)=⌊2e/n⌋を満たすグラフの中で，基数⌊2e/n⌋のカットセットの総数を最小にする問題が解かれた．これらは，枝故障を考慮した確率ネットワークの連結確率を最大にするとき現われる重要な問題である．
本論文では，一般に，x=2あるいはx≦2⌊2e/n⌋−3のとき基数xのカットセットの総数を最小にするグラフの必要十分条件を明らかにする．

A Design of Reliable Stochastic Graphs

Sun Zheng, Hiroshi Nagamochi and Kikunobu Kusunoki

Dept. of Information & Computer Sciences, Toyohashi University of Technology, Toyohashi 440 Japan.

A graph G with n nodes and e edges maximizing the edge-connectivity λ (i.e., satisfying λ(G)=⌊2e/n⌋) has been obtained by Harary in 1962.
Recently, the problem for finding a graph G with λ(G)=⌊2e/n⌋ which minimizes the number of cut-sets with ⌊2e/n⌋ edges has been solved. Such graphs play an important role in analysis and maximization of network reliability.
In this paper, we present the necessary and sufficient condition of a graph to minimize the number of cut-sets with x edges, where x=2 or x≦2⌊2e/n⌋−3.

1. まえがき

通信網を始めとする様々な情報ネットワークが，近年急速に発展しつつあり，その社会的重要性は非常に高くなっている．そうした中で，信頼性の高いネットワークを提供することは必要不可欠である．このために，ネットワークの信頼度解析，高信頼性ネットワークの設計などのグラフ理論的研究がこれまでに盛んに行われてきている[2]．

例えば，通信網は，その局および回線を各々グラフの節点，枝で表わし，回線（あるいは局）の信頼度（故障率）をグラフの要素に重みとして付与することでモデル化される．ネットワークの信頼度の最も一般的な評価尺度としては，全節点間が通信可能な確率（連結確率）が知られている．これまで，高連結確率グラフの設計法の研究は1962年のHararyグラフの登場以来，信頼度解析法の研究例[5]に対し比較的少なかったが，最近では，Hararyグラフを特別な場合として含むCirculant と呼ばれる正則グラフのクラスの連結度等の性質が明らかにされている[1,2]．

本論文では，与えられた節点数，枝数を持つグラフの中で連結確率を最大にするグラフの構成法について考える．連結確率 $1-P(G,\rho)$ は，グラフGの枝はどれも同じ確率 ρ で故障すると仮定するとき以下のように定義できる．

$$P(G,\rho)=\sum_{i=0}^{e} m_i(G)\rho^i(1-\rho)^{e-i} \qquad (1.1)$$

ただし，eはGの枝数，$m_i(G)$ はi本の枝をグラフGから除去したときGが連結でなくなるようなi本の枝の選び方の総数である．ところで，任意の故障率 $0<\rho<1$ に対して一様に $P(G,\rho)$ を最小にするグラフGが存在するか否かは，$e\leqq n+2$（nは節点数）という特別な場合[6]を除いて知られていない[2]．ところが，現実的には ρ は十分に0に近いと仮定できるので，この場合，$m_i(G)$ を添字iの小さい順に最小化しておくことが，$P(G,\rho)$ の最小化のための必要条件になることがわかる．

グラフGの枝連結度を $\lambda(G)$ とすると明らかに $m_i(G)=0$ $(0\leqq i<\lambda(G))$ である．従って，$\lambda(G)$ を最大にしておくことは先決問題となるが，これは $\lambda(G)=\lfloor 2e/n \rfloor$ のとき最大であることがHararyにより示されている[4]．

最近，最大化された枝連結度 $\lambda(G)=\lfloor 2e/n \rfloor$ を持つグラフの中で，$m_a(G)>0$ $(a=\lfloor 2e/n \rfloor)$ を最小にする枝数e，節点数nのグラフの構成法が報告された[1]．本論文では，この結果を拡張し，枝数e，節点数nの任意のグラフの中で，$m_i(G)$ $(i=\lfloor 2e/n \rfloor$ または $i\leqq 2\lfloor 2e/n \rfloor-3)$ を最小にするグラフの必要十分条件を明らかにする．

2. 定義

本章ではグラフや連結度についての用語を定義しておく．無向グラフを $G=(V,E)$ で表す．ここで，Vは節点集合，Eは枝集合である．無向グラフGが自己閉路や多重枝を持たないとき単純(simple)であると言い，節点数n，枝数eの単純グラフの集合を $\mathbb{G}(n,e)$ で表わす．両端点が $x,y\in V$ である枝は非順序対 (x,y) $(=(y,x))$ で表わす．$(u,v)\in E$ であるとき，節点uとvは隣接(adjacent)していると言い，枝 (u,v) はvに接続(incident)していると言う．節点vに接続している枝の本数をvの次数(degree)と呼び，次数0の節点を孤立点と呼ぶ．グラフGの次数 $\delta(G)$ とは，全ての節点の次数の最小値とする．全ての節点次数がdに等しいグラフはd−正則（d-regular）であると言う．次のような，節点 v_i と枝 (v_i,v_{i+1}) の交代系列を v_1 から v_n への道(path)と呼ぶ（特に，$v_1=v_n$ のとき閉路と呼ぶ）．

$v_1,\ (v_1,v_2),\ v_2,\ (v_2,v_3),\cdots,v_{n-1},\ (v_{n-1},v_n),\ v_n$

グラフ $G=(V,E)$ が連結（connected）とはGの任意2節点u，v間に道が存在することである（$|V|=1$ のときも連結とする）．グラフ $G=(V,E)$ から枝集合 $U\subseteq E$ を除去したグラフ $(V,E-U)$ をGの生成サブグラフと呼び簡単に $G-U$ で表わす．$G-U$ が非連結になるとき，Uをカットセット(cut set)と呼ぶ．特に，$|U|=k$ のとき，Uをk−カットセットと呼ぶ．

また，$X\cup Y\subseteq V$，$X\cap Y=\phi$ に対して，

$$E(X;Y)\triangleq\{(u,v)\in E \mid u\in X \text{かつ} v\in Y\},$$

特に，$E(X;V-X)$ を $E(X)$ と表わし，$E(\{u\})$，$u\in V$ を $E(u)$ と表わす．

グラフGの枝連結度(edge-connectivity) $\lambda(G)$ とは，Gのカットセットを与える最小枝数である．$k\leqq\lambda(G)$ を満たすときGはk−枝連結と言う．任意の $G\in\mathbb{G}(n,e)$ において，明らかに次の関係式が成立する[4]．

$$\lfloor 2e/n \rfloor\geqq\delta(G)\geqq\lambda(G) \qquad (2.1)$$

さて，以下では $m_i(G)$ を最小にするグラフ $G\in\mathbb{G}(n,e)$ の構成について考えるが，$e\leqq n-1$ のときの結果は自明であり，$n(n-1)/2<e$ のときは $\mathbb{G}(n,e)=\phi$ である．また，$e=n(n-1)/2$ のとき構成できる単純グラフは唯一(完全グラフ)である．従って，本論文を通して，

$$n\leqq e<n(n-1)/2 \qquad (2.2)$$

（つまり，$2\leqq\lfloor 2e/n \rfloor\leqq n-2$）を仮定する．

3. λ(G)を最大にするグラフ

まえがきで述べたように(1.1)の非連結確率 $P(G,\rho)$ を任意の故障 ρ に対して厳密に最小にする $G\in\mathbb{G}(n,e)$ を構成することは困難であるので，$m_i(G)$ を最小iの順に最小にする問題を考える（十分小さい ρ に対してはこれで十分である）．

明かに $0\leqq m_i(G)\leqq\binom{e}{i}$ である．

ただし，$\binom{x}{y}=\dfrac{x!}{(x-y)!\cdot y!}$，$x\geqq y\geqq 0$

（$y=0$ のとき1の値をとることに注意）．また，常に

$$m_i(G)=0, \qquad (i\leqq\lambda(G)-1)$$

$$m_i(G)=\binom{e}{i}, \quad (i\geqq e-n+2)$$

である．従って，$\lambda(G)$ を最大にする $G\in\mathbb{G}(n,e)$ を構成することは重要な問題である．ここで，節点数n，$\lambda(G)=a$ のグラフGの中で枝数eを最小にするものとしてHararyグラフ $H(n,a)$ が知られている（$\lambda(H(n,a))=a$ であることが示されているので，$H(n,a)$ の枝数 $e=\lceil na/2\rceil$ の最小性は(2.1)より明らかである）[4]．

【定義3.1】 Hararyグラフ$H(n,a)\in\mathbb{G}(n,\lceil na/2\rceil)$のn個の節点を順に0,1,…,n-1としたとき.

(i)全ての節点iと$i\pm1, i\pm2,\cdots, i\pm\lfloor a/2\rfloor \pmod n$ $(0\leqq i\leqq n-1)$は隣接している.

(ii)しかもaが奇数であれば，節点iと$i+\lfloor n/2\rfloor$ $(i=0,1,\cdots,\lfloor(n-1)/2\rfloor)$も隣接している(この枝を対角線を呼ぶ). □

(a nが偶数のとき$H(n,e)$はa－正則であるが，a nが奇数のときは節点$\lfloor n/2\rfloor(=\lfloor(n-1)/2\rfloor)$の次数だけa+1となることに注意).

$H(n,a)$では常に，iと$i\pm1 \pmod n$が隣接しているので節点0,1,…,n-1を順に通るハミルトン閉路が存在する（以下，これを外周と呼ぶ）．$H(12,5)$を図1に示す.

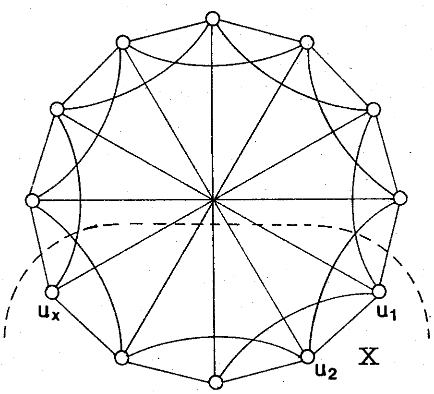

図1．Hararyグラフ$H(12,5)$

【定義3.2】 $\mathbb{HG}(n,e)\subset\mathbb{G}(n,e)$を以下のように，定義する.

(i)$\lfloor 2e/n\rfloor=2$のとき．**(a)** $e=n$のときは$H(n,2)$を$\mathbb{HG}(n,e)$で表わす．**(b)** $e\geqq n+1$のとき．任意の3-枝連結グラフ$G_0\in\mathbb{G}(2(e-n),3(e-n))$に対し，この$G_0$の枝に節点を$n-2(e-n)>0$個挿入すると(節点が1つ挿入されると枝数も1つ増加することから)生じるグラフG'は$G'\in\mathbb{G}(n,e)$，$\lambda(G)=2$を満たす．特に，G_0の各枝に挿入される節点数が，どの枝の間でも差が1以下になるよう均等に配分されたグラフ$G'\in\mathbb{G}(n,e)$の集合を$\mathbb{HG}(n,e)$で表わす.

(ii)$\lfloor 2e/n\rfloor\geqq3$のとき．$\lambda(G)$を最大にするグラフ$G\in\mathbb{G}(n,e)$としては，まず$H(n,a)$，$a=\lfloor 2e/n\rfloor$を作り，余った$e-\lceil na/2\rceil$本の枝を適当に加えてやることで得られるが，特に，グラフGの最小次数(＝a)の節点個数が最小になるように(同じことであるが，a+2次以上の次数が生じないように)，$H(n,a)$に余った枝を加えて得られるグラフ$G\in\mathbb{G}(n,e)$の集合を$\mathbb{HG}(n,e)$で表わす. □

これまでに，m_iを最小にするグラフについて以下の性質3.1，3.2が知られている.

【性質3.1】[2] 任意の$G_1\in\mathbb{HG}(n,e)$は$a=\lfloor 2e/n\rfloor$ $(\geqq2)$とすると，次を満たす.

$m_a(G)=\min\{m_a(G)\mid G\in\mathbb{G}(n,e),\ \lambda(G)=a\}$ □

【性質3.2】[3:Sec.3] $a=\lfloor 2e/n\rfloor(\geqq2)$とするとk $(\geqq4)$が偶数のとき，任意の$a\leqq x\leqq 2k-3$に対して，

$m_x(H(n,kn/2))=\min\{m_a(G)\mid G\in\mathbb{G}(n,kn/2)$は$\lambda(G)=a$，かつk－正則グラフ$\}$． □

しかし，実際には，次のような$\mathbb{G}(n,e)$上でm_xを最小にしたグラフやこのときのm_xの最小値が求まるほうが望ましい.

$$m_x[n,e]\triangleq\min\{m_x(G)\mid G\in\mathbb{G}(n,e)\}$$

$$\mathbb{G}_x[n,e]\triangleq\{G\in\mathbb{G}(n,e)\mid m_x(G)=m_x[n,e]\}$$

本論文では，性質3.1,3.2が以下の命題1，2のように拡張できることを示す.

［命題1］ $\lfloor 2e/n\rfloor=a(\geqq2)$としたとき，
(i) 任意の$G\in\mathbb{G}_a[n,e]$に対し，$\lambda(G)=a$.
(ii) $\mathbb{HG}(n,e)\subseteq\mathbb{G}_a[n,e]$. □

［命題2］ $\lfloor 2e/n\rfloor=a\geqq3$としたとき，任意の$a\leqq x\leqq 2a-3$に対し
(i) 任意の$G\in\mathbb{G}_x[n,e]$に対し，$\lambda(G)=a$.
(ii) $\mathbb{HG}(n,e)\subseteq\mathbb{G}_x[n,e]$. □

また，このときの$\mathbb{G}_x[n,e]$の必要十分条件も明らかにする.

4. 命題1(a＝2)の証明

命題2は6章で証明を与えるが，これは命題1(a≧3)を含むので，本章では命題1(a＝2)を証明する.

【補題4.1】 任意の$G\in\mathbb{G}_i[n,e]$，$1\leqq i\leqq e-n+1$に対し，$\lambda(G)\geqq2$.

(証明) (2.2)の$n\leqq e$の仮定から，明らかに$G\in\mathbb{G}_i[n,e]$ $(0\leqq i\leqq e-n+1)$に対し$\lambda(G)\geqq1$.

$\lambda(G')=1$を満たす$G'=(V,E)\in\mathbb{G}_i[n,e]$が存在すると仮定する．G'は$e\geqq n$より必ず閉路を持つつまり2－枝連結サブグラフ$G_0=(V_0,E_0)$を少なくとも1つ含む．ここで$G_0$は極大とする.

さて，G'は2－枝連結でないので，図2のように，G_0には橋(＝1－カットセット)$a=(u,v)$，$u\in V_0$，$v\in V-V_0$が接続している．このとき，節点uに接続しているG_0内の枝は2本以上存在するが，その1本を$b=(u,w)$とする．ここで，bを除き枝$b'=(v,w)$を加えたグラフ$(V,E\cup\{b'\}-\{b\})$をG''とする．このとき，G_0からbを除きb'を加えたグラフ$G''_0=(V_0\cup\{v\},E_0\cup\{b'\}-\{b\})$は2－枝連結である(何故なら，$G_0$で枝bを通る道の代りに$G''_0$で枝b'とaを通る道を考えれば，2節点間に2本以上の枝素な道が存在することに変わりがないから).

次に，$m_i(G')>m_i(G'')$を示す．$G'=(V,E)$の任意の連結生成サブグラフ$S=(V,E')$は必ず枝aを含む．さて，$b\notin E'$のとき，このSはG''の連結生成サブグラフである．$b\in E'$のときは，$S'=(V,E'\cup\{b'\}-\{b\})$も連結であり，S'はG''の生成サブグラフである．従って，$m_i(G')\geqq m_i(G'')$．ところが，G''_0の2－連結性から$G''-\{a\}$は連結であり，$i\leqq e-n+1$より$G''-\{a\}$から枝を$i-1$本除去しても連結なグラフS''が必ず存在する．S''はG''

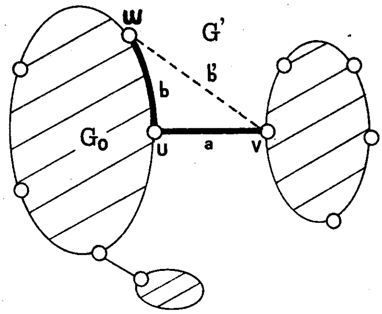

図2．補題4．1の証明

の生成サブグラフであるが，S''は枝aを含まないためG'の生成サブグラフではないことから，$m_i(G')>m_i(G'')$．これはG'∈$\mathbb{G}_i$[n,e]に反する．□

次の定理は，補題4.1および性質3.1(a=2)[1:定理4]から導けるが証明を与えておく．

【定理4．1】 $\lfloor 2e/n \rfloor = 2$のとき

(i) 任意の$G \in \mathbb{G}_2[n,e]$に対し，$\lambda(G)=2$．

(ii) $\mathbb{H}\mathbb{G}(n,e)=\mathbb{G}_2[n,e]$.

(iii)

$$m_2[n,e]=\begin{cases} n(n-1)/2 & (e=n\text{のとき}) \\ (e-y)(3n-2e+y)/6(e-n) & (e>n\text{のとき}) \end{cases}$$

ただし，yは$(3n-2e)/3(e-n)$の余数である．

（証明）(i)および(iii)(e＝n)は補題4.1より明らか．以下e＞nを考える．

まず，$m_2(G')$，$G' \in \mathbb{H}\mathbb{G}(n,e)$を計算する．G'はグラフの次数が2と3のみであるので，次数3の節点を2(e-n)個，次数2の節点を3n-2e個持つ．また，G'は，ある3－枝連結グラフG_0の3(e-n)本の各枝に3n-2e個の節点を均等に挿入することで作られているが，G_0のある枝(u,v)にx個の節点が挿入されたとすると，G'ではuv間に2次の節点がx個，枝がx+1本直列している(以下，これを2次節点シリーズと呼ぶ)．このとき，明らかに，このx+1本の中の任意の2本は2－カットセットになり得るので，そのような2－カットセットは$\binom{x+1}{2}$だけある(ただし，$\binom{1}{2}=0$とする)．

ところが，枝を2本だけしか除去しない場合には，G_0の3－枝連結性から2次節点シリーズ上で2本除く以外に2－カットセットは存在しない．従って，いま3(e-n)個ある2次節点シリーズ上の2次節点数をx_i，i=1,2,…,3(e-n)とすると，一般に，

$$m_2(G')=\sum_{i=1}^{3(e-n)}\binom{x_i+1}{2} \qquad (4.1)$$

ただし，

$$\sum_{i=1}^{3(e-n)} x_i = 3n-2e \qquad (4.2)$$

である．ところが，いまG'においてx_iの値は均等に配分されていることから$x_i=k,\ k+1$ ($k=\lfloor(3n-2e)/3(e-n)\rfloor$，$x_i=k+1$なるiは3n-2eを3(e-n)で割った余りyだけある)．このとき，$m_2(G')$は以下のようになるが，実は，これは(4.2)の下で(4.1)の右辺を最小にしている(付録1(a)参照)．

$$m_2(G')=(2(e-n)-y)\cdot\binom{k+1}{2}+y\binom{k+1}{2}$$
$$=(e-y)(3n-2e+y)/6(e-n).$$

さて，(i)よりm_2を最小にするグラフGは$\lambda(G)=2$でなければならないので，$\lambda(G)=2$である任意の$G \in \mathbb{G}(n,e)-\mathbb{H}\mathbb{G}(n,e)$に対して，$m_2(G')<m_2(G)$を示せば，$G' \in \mathbb{G}_2[n,e]$かつ，$G \notin \mathbb{G}_2[n,e]$，(つまり，(ii))が導びかれる．$\lambda(G)=2$より$\delta(G)\geqq 2$．Gにおいて，2次の節点で隣接する2本の枝を1本に置き代える操作を繰り返すと3次以上の節点だけのグラフG_oができる．rをこのG_oの枝数とする（つまり，rはGの持つ2次節点シリーズの数である）．Gの各2次節点シリーズの2次節点数をx_i，i＝1,2,…,rとする．

(1)Gが2次と3次の節点のみを持つ場合．このとき，常にr＝3(e-n)．さて，各x_iが均等でない(最大個数と最小個数の差が2以上)ときは，(4.1)の右辺を最小にしないので

$$m_2(G)\geqq\sum_{i=1}^{3(e-n)}\binom{x_i+1}{2}>m_2(G')$$

となる．逆にx_i，i＝1,2,…,rが均等のときは，G_oは3－枝連結でないので2次節点シリーズの場合以外の2－カットセットが存在し，このときも，$m_2(G')<m_2(G)$．

(2)Gが4次以上の節点を含む場合．このとき，Gの2次節点数sはG'より少なくとも1つ多い(つまり，s>3n-2e)．また，そのためr＜3(e-n)である．従って，付録1(b)から

$$m_2(G)\geqq\min_{x}\sum_{i=1}^{r}\binom{x_i+1}{2}=L(s,r)\geqq L(s,3(e-n))$$
$$>L(3n-2e,3(e-n))=m_2(G').$$

ただし，L(w,z)は$\sum_{i=1}^{z}x_i=w$のもとでの$\sum_{i=1}^{z}\binom{x_i+1}{2}$の最小値を表わす．□

5．Hararyグラフの性質

本章では，命題2の証明の準備として，Hararyグラフのx－カットセットを調べる．

【補題5．1】 HararyグラフH(n,a)＝(V,E)(2≦a≦n)は次の性質(a)を満たす．

(a) 2≦|X|≦n－2である任意の節点集合X⊂Vは|E(X)|≧2a－2を満たす．

（証明）HararyグラフH(n,a)では，全ての節点の次数がa以上であるので，任意の節点u(∈X)に対して，

|E(u)∩E(X)|≧a-(x-1)が成り立つ(x＝|X|)．

さらに，|E(X)|≧x(a-(x-1))．従って，

|E(X)|－(2a-2)≧x(a-(x-1))-(2a-2)=(x-2)(a-x-1)

であるので，2≦x≦a-1のとき，|E(X)|≧2a-2が成立する．2≦|V－X|＝n-x≦a-1のときも同様に成立する．

以下，x≧a，n-x≧aの場合を示す．簡単のためu∈Xに対し，|E(u)∩E(X)|をe(u)で表わす．

Case-1：図1のようにX内の全ての節点がHararyグラフの

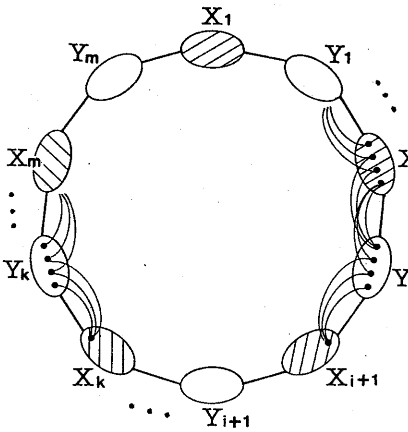

図3．補題5．1の証明

外周上で連続するとき．これらを順に$u_1, u_2, \cdots, u_x$と記す．(i) aが偶数のとき，$E(u_i)$の内a/2本はu_iの右側(左側)に連続して隣り合うa/2個の各節点に接続しているので，

$e(u_1)=a/2,\ e(u_2)=a/2-1,\ \cdots,\ e(u_{a/2})=1.$
$e(u_{x-a/2+1})=1, \cdots, e(u_{x-1})=a/2-1, e(u_x)=a/2.$

従って，

$$|E(X)|=\sum_{i=1}^{x} e(u_i)=2\sum_{i=1}^{a/2} i=(a^2+2a)/4$$
$$=(a-2)(a-4)/4+(2a-2)\geq 2a-2\ (a=2,4,\cdots).$$

(ii) aが奇数である場合は，対角線の枝は数えずに$e(u_1)\geq(a-1)/2$, $e(u_2)\geq(a-1)/2-1, \cdots, e(u_{(a-1)/2})\geq 1$. $e(u_{x-(a-1)/2+2})\geq 1, \cdots, e(u_{x-1})\geq(a-1)/2-1$, $e(u_x)\geq(a-1)/2$が成立する．次に，X内の節点は連続していることからXとV－Xの間には対角線が少なくとも

$\min\{|X|, |V-X|\}\ (\geq a)$ 本は存在するので，

$$|E(X)|=\sum_{i=1}^{x} e(u_i)\geq a+2\sum_{i=1}^{(a-1)/2} i=a+(a^2-1)/4$$
$$=((a-2)^2+3)/4+(2a-2)>2a-2$$

Case-2：X内の全て節点が外周上で連続してないとき．このとき，Xを図3のように連続する極大な集合に分割しX_i, $i=1,2,\cdots,m\ (m\geq 2)$と表わす．V－Xについても同様に，$Y_i$, $i=1,2,\cdots,m$と表わす．ただし，図3のようにX_i, Y_iは連続しているとする．明らかに，

$$\sum_{i=1}^{m}|X_i|=|X|\geq a,\quad \sum_{i=1}^{m}|Y_i|=|V-X|\geq a.$$

(i) $|X_i|\leq a/2\ (i=1,2,\cdots,m)$のとき．$X_i$に最も近い$u\in Y_i$から$X_i$の全ての節点に枝が存在するので$|E(X_i;Y_i)|\geq|X_i|$であり，同様に，$|E(X_i;Y_{i-1})|\geq|X_i|$．従って，

$$|E(X)|\geq\sum_{i=1}^{m} 2|X_i|\geq 2a>2a-2.$$

$|Y_i|\leq a/2\ (i=1,2,\cdots,m)$のときも同様に成り立つ．

(ii) $|X_i|>a/2$, $|Y_k|>a/2\ (k\neq i, i-1)$のとき．$X_i$と$X_i$に最も近い$u\in Y_i$の間に枝が少なくとも$\lfloor a/2\rfloor$本ある．同様に$|E(X_i;Y_{i-1})|\geq\lfloor a/2\rfloor$, $|E(X_k;Y_k)|\geq\lfloor a/2\rfloor$, $|E(X_{k+1};Y_k)|\geq\lfloor a/2\rfloor$である．従って，

$|E(X)|\geq 4\lfloor a/2\rfloor\geq 4(a-1)/2=2a-2.$

(iii) $|X_i|>a/2$, $|Y_i|>a/2$を満たすiが存在するとき．Y_iの各節点をX_iに近い順に考えれば$|E(X_i;Y_i)|\geq\lfloor a/2\rfloor+(\lfloor a/2\rfloor-1), \cdots, +1=\lfloor a/2\rfloor(\lfloor a/2\rfloor+1)/2$,
同様に，$|E(X_i;Y_{i-1})|\geq\lfloor a/2\rfloor$, $|E(X_{i+1};Y_i)|\geq\lfloor a/2\rfloor$を得る．$X_{i+1}$と$Y_{i+1}$($=Y_{i-1}$のときもある)の間もに少なくとも外周の枝が1本あり，

$|E(X)|\geq\lfloor a/2\rfloor(\lfloor a/2\rfloor+1)/2+\lfloor a/2\rfloor+\lfloor a/2\rfloor+1.$

aが偶数であるとき，

$|E(X)|-(2a-2)$
$\geq(a^2+10a+8)/8-(2a-2)=((a-3)^2+15)/8>0$

aが奇数であるとき（$a=3,5,\cdots$），

$|E(X)|-(2a-2)$
$\geq(a^2+8a-1)/8-(2a-2)=(a-3)(a-5)/8\geq 0$．□

【補題5．2】 ある$G\in\mathbb{G}(n,e)$および，$a=\lambda(G)$が補題5.1の性質(a)を満たすとする．このとき，任意のi－カットセット($1\leq i\leq 2a-3$)によって生じる連結成分は高々2つであり，そのうち1つは孤立点，残りは$n-1\ (\geq 2)$以上の節点を持つ．

（証明）2個以上の孤立点を作るにはGが単純グラフであることから少なくとも$2a-2\ (>i)$本の枝を除く必要があるので，孤立点は生じても高々1つである(従って，$n\geq 3$)．また，i－カットセットによって連結成分が3個以上現われるとすると，この中のうち少なくとも2つの連結成分C_1, C_2は孤立点ではない．従って，C_1, C_2の節点数x_1, x_2は$x_1\geq 2$, $n-x_1\geq x_2\geq 2$を満たし，補題5.1よりC_1を分離するには少なくとも2a-2本の枝を必要とするが，これは$i\leq 2a-3$に反する．従って，生じる連結成分は高々2個である．また，このとき，両方とも孤立点でないとすると，いまと同様の議論で$i\leq 2a-3$に反することが示せる．□

6． 命題2の証明

以下では，(2.2)および$\lfloor 2e/n\rfloor\geq 3$を満たす$\mathbb{G}(n,e)$を対象とする．このとき，n，eおよびグラフ$G\in\mathbb{G}(n,e)$の次数$d_i$, $i=1,2,\cdots,n$は明らかに次の条件A(i)，(ii)を満たす．

［条件A］ (i) n，eは正整数であり，$e<n(n-1)/2$．$a=\lfloor 2e/n\rfloor$としたとき，$e\geq an/2$, $n\geq a+2$, $a\geq 3$.

(ii)数列d_i,（$i=1,2,\cdots,n$)は$2e=\sum_{i=1}^{n} d_i$および，$1\leq d_i\leq n-1$, $i=1,2,\cdots,n$を満たす．

(iii) xは$a\leq x\leq 2a-3$を満たす整数である．□

任意のグラフGのx－カットセット数を正確に表わすのは難しいので，ここでは代わりに条件Aを満たすn，e，x，$d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$に対し次の正整数値関数$M(x,d)$を定義する．

$$M(x,d)\triangleq\sum_{i=1}^{q}\binom{e-i+1-d_i}{x-d_i}+\sum_{i=q+1}^{r}\binom{e-q-d_i}{x-d_i}$$

ただし，q(またはr)は$d_i<a$(または$d_i\leq x$)を満たす最大の添字iである．($a\leq d_1$のとき第1項はなくなり，a

$\leqq d_i \leqq x$ となる d_i が存在しないとき第2項はなくなる).
ところで任意の i に対して,

$$e-i+1-d_i \geqq x-d_i \geqq 0 \qquad (1 \leqq i \leqq q)$$
$$e-q-d_i \geqq x-d_i \geqq 0 \qquad (q+1 \leqq i \leqq r)$$

でなければ,関数 $M(x,d)$ は正しく定義されない.このためには $x \geqq d_i$ は明らかなので, $e-q-x \geqq 0$ であれば良く,これは次の補題で保証される.

【補題6.1】 条件Aの下では $e-q-x \geqq 2$.
(証明) まず,各 d_i は高々 $d_i \leqq a-1$ $(1 \leqq i \leqq q)$, $d_i \leqq n-1$, $(q+1 \leqq i \leqq n)$ であるので, $an \leqq 2e = \sum_{i=1}^{n} d_i \leqq (a-1)q+(n-1)(n-q)$, よって

$$q \leqq n(n-a-1)/(n-a)$$

従って, $e-q-x \geqq an/2-n(n-a-1)/(n-a)-(2a-3)$ (*)
ここで, $n=\beta a$ $(\beta>1)$ とおくと, (*) は

$$\tfrac{1}{2}\{(a(a-2)(\beta-1)+2/(\beta-1)+(a-3)^2-1\}$$
$$\geqq \tfrac{1}{2}\{2\sqrt{2a(a-2)}+(a-3)^2-1\}>1.9. \quad \square$$

【補題6.2】 $a(=\lfloor 2n/e \rfloor) \geqq 3$ を満たす $G=(V,E) \in \mathbb{G}(n,e)$ の次数を $d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_n$ としたとき,任意の $a \leqq x \leqq 2a-3$ に対し, $m_x(G) \geqq M(x,d)$ が成立する.
(証明) d_i $(i=1,2,\cdots,n)$ の次数を持つ節点を i とする.Gにおいて次のような x −カットセット U を考える.まず,ある節点 j $(d_j \leqq x)$ に接続している全ての枝 $E(j)$ を除去し,残りの $U-E(j)$ の $x-d_j$ 本の枝は,グラフの残りの $E-E(j)$ の $e-d_j$ 本の枝の中から選ぶ.ただし, $1 \leqq i \leqq j-1$ なる節点 i については,これらが孤立点とならないように(各 i に最低1本は枝が接続しているように)残りの $U-E(j)$ 本の枝を選ぶとする.
すると,節点 j を孤立点とし, $1 \leqq i \leqq j-1$ の節点は孤立点としない x −カットセットの数は少なくとも,
(1) $d_j<a$ のとき

$$\binom{e-d_j-(j-1)}{x-d_j}$$ だけ取り方がある.

(2) $a \leqq d_j \leqq x$ のとき.このときは,次数が a 以上の節点を2つ以上孤立点とするには少なくとも $2a-1(>x)$ 本以上の枝を除去しなければならないので, j を孤立点にすると,次数が a 以上の他の節点 i $(q \leqq i \leqq j-1)$ は孤立点になり得ない.従って,このときは少なくとも,

$$\binom{e-d_j-q}{x-d_j}$$ だけ取り方がある.

(1)〜(2)の x −カットセットは全て互いに異なるので,Gは少なくとも,これらの和,すなわち $M(x,d)$ 個以上の x −カットセットを持つ. $\square$

以下では,関数 $M(x,d)$ の性質を調べるが,このとき与えられた系列 d_i, $i=1,2,\cdots,n$ を次数として持つ単純グラフが実現可能である必要はないことに注意する.

【補題6.3】 条件A(i),(iii)を満たす任意の n, e, x に対し,条件A(ii)を満たす任意の $d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_n$ が, $M(x,d)$ の値を最小にするためには, $d_1+1 \geqq d_n$ でなければならない(つまり,各 d_i は a または $a+1$ である).
(証明) 付録2参照. $\square$

【定理6.1】 $a=\lfloor 2e/n \rfloor \geqq 3$ のとき,任意の $a \leqq x \leqq 2a-3$ に対し,
(i) $G \in \mathbb{G}_x[n,e]$
$\leftrightarrows \lambda(G)=a$, Gの節点の最大次数が $a+1$, かつGは孤立点を発生しない x −カットセットを持たない.
(ii) $\mathbb{H}\mathbb{G}(n,e) \subseteq \mathbb{G}_x[n,e]$.
(iii) $\mathbb{G}_x[n,e] \subseteq \mathbb{G}_y[n,e]$ $(0 \leqq y \leqq x)$.
(iv)

$$m_x[n,e]=\begin{cases}(a+1)n-2e & (x=a\text{のとき})\\ \binom{e-a}{x-a}\{(a+1)n-2e\}+\binom{e-a-1}{x-a-1}(2e-an) & \\ & (x>a\text{のとき})\end{cases}$$

(証明) $G' \in \mathbb{H}\mathbb{G}(n,e)$ は a 次の節点を $(a+1)n-2e$ 個, $a+1$ 次の節点を $n-(a+1)n+2e$ 個持つ.さて,このグラフ G' の x −カットセットを考えると, $2a-2>x$ であるので補題5.1,5.2より, G' の任意の x −カットセットにより生じる連結成分は高々2つであり,一方は必ず孤立点である.つまり, $m_x(G')$ は孤立点を発生させる x −カットセットの数だけであるので,この数は明らかに,上記の $m_x[n,e]$ のように与えられる.ところで,この $m_x(G')$ の値は条件(ii)を満たす d_i, $(i=1,2,\cdots,n)$ が次数 a と $a+1$ のみから成るときの $M(x,d)$ の値に等しい.
従って,補題6.2,6.3より a や $a+1$ でない次数の節点を含むグラフの x −カットセットの数は, $m_x(G')$ より多いことがわかる.また,次数が a と $a+1$ のみでも,孤立点を作らない x −カットセットが存在するとき(例えば, a −枝連結でない場合) x −カットセット数は $m_x(G')$ より多くなる.以上より(i),(ii),(iv)が示された.(iii)については, $a \leqq y$ のとき(i)より明らか, $0 \leqq y \leqq a-1$ のときは,(i)の $\lambda(G)=a$ (つまり, $\mathbb{G}_x[n,e] \subseteq \mathbb{G}_i[n,e]$, $0 \leqq i \leqq a-1$)より明らか. $\square$

7. まとめ

本論文では, $\mathbb{H}\mathbb{G}(n,e) \subseteq \mathbb{G}_x[n,e]$, $(x=\lfloor 2e/n \rfloor$ または $x \leqq 2\lfloor 2e/n \rfloor-3)$ を示し,このときの m_x の最小値およびクラス $\mathbb{G}_x(n,e)$ の必要十分条件も明らかにした.
これによれば性質3.1,3.2における $\lambda(G)$ 最大の仮定は m_x の最小化に伴い自然に充足されるので排除できることがわかる.また, $m_x[n,e]$ の値は与えられたグラフの連結確率の上限の解析に役立つと考えられる.
今後の課題としては $G \in \mathbb{G}_x[n,e]$, $x \geqq 2\lfloor 2e/n \rfloor-2$ を満たすグラフGの構成法が考えられる.ところが,そのようなグラフGは孤立点を生じない x −カットセットを持ち,一般に, $\mathbb{H}\mathbb{G}(n,e) \not\subseteq \mathbb{G}_x[n,e]$ である.これは,つまりHararyグラフ(あるいはこれを一般化したCirculantグラフ)に枝を加えて得られるグラフでは,もはや m_x を最小にしないことを意味し,全く新しい構成法が必要となる.これまで, $\mathbb{G}_4[n,e]$, $\lfloor 2e/n \rfloor=3$ については若干の結果が得られており別途報告する予定である.

付録1.(a) $\sum_{i=1}^{z} x_i = w$(正整数)を満たす非負整数系列 x_i $(i=1,2,\cdots,z)$ の中で,$\sum_{i=1}^{z}\binom{x_i+1}{2}$ の最小値 $L(w,z)$ を求める.まず,このとき系列 x_i 中で最大値の項と最小値の項との差が1以下でなければならないことを示す(ただし,$\binom{1}{2}=0$ とする).明らかに

$$\min\sum_{i=1}^{z}\binom{x_i+1}{2}=\min\sum_{i=1}^{z}(x_i^2+x_i)/2=\frac{1}{2}w+\frac{1}{2}\min\sum_{i=1}^{z}x_i^2.$$

ここで,$k=\lfloor w/z \rfloor$, $y=w-kz$ とし,$x_i=k+t_i$ と記す(t_i は整数であり,負でもよい).明らかに $\sum_{i=1}^{z}t_i=y$.このとき,

$$\sum_{i=1}^{z}x_i^2=\sum_{i=1}^{z}(k+t_i)^2=zk^2+2ky+y+\sum_{i=1}^{z}t_i(t_i-1)$$

t_i は整数であるので,$t_i(t_i-1)\geq 0$.従って,$t_i=0$ または1 $(i=1,2,\cdots,n)$(つまり,$|x_i-x_j|\leq 1$, $i\neq j$)のとき最小となり,$L(w,z)=(w+y)(w+z-y)/2z$ を得る.

(b) ① $L(w,z)\geq L(w,z')$, $z<z'$ および② $L(w',z)>L(w,z)$, $w'>w$ を示しておく.$L(w,z)$ を与える系列を $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_z$ とする.

① $w\leq z$ のとき,$x_z\leq 1$ であり $L(w,z)=L(w,z+1)$.$w>z$ のときは,$x_z\geq 2$ であり $z+1$ 個の系列 $x_1,x_2,\cdots,x_z-1,1$ を考えると

$$L(w,z+1)\leq L(w,z)-\binom{x_z+1}{2}+\binom{x_z}{2}+1$$
$$=L(w,z)-\binom{x_z}{1}+1<L(w,z)$$

② $L(w+1,z)$ を与える系列は付録1(a)から $x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_z$ のどれかの x_i に1を加えたものであるから,明らかに,$L(w+1,z)>L(w,z)$. □

付録2.補題6.3の証明 ある正整数列 $d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_n$ が与えられたとき,これが $d_i+2\leq d_j$ を満たす $i<j$ を持つとする.このとき,$\bar{d}_i\leftarrow d_i+1$, $\bar{d}_j\leftarrow d_j-1$, $\bar{d}_k\leftarrow d_k$ $(k\neq i,j)$ とした正整数列 $\bar{d}$ が,常に,$\triangle=M(x,d)-M(x,\bar{d})>0$ となることを示せば十分である.

そのような $i<j$ は表1のように分類できる.ここで,

Case-2($d_i\leq a-2$, $d_j=a$)については $an\leq 2e=\sum_{i=1}^{n}d_i\leq an+n-1$ より,**Case-3**または**4**が生じる.同様に**Case-9** $(x+1\leq d_i)$ については,**Case-4,6,8**のいずれかが生じるので,以下の**Case-1,3~8**の場合について$\triangle>0$を示せば良い.

以下,$d_i+2\leq d_j$ なる i,j は一般性を失わず,$d_i<d_{i+1}$, $d_{j-1}<d_j$ を満たすとする.また,q を $d_i<a$ を満たす最大の添字 i,r を $d_i\leq a$ を満たす最大の添字 i とする.**Case-1,3,4,7,8**は d と $\bar{d}$ について q の値が変化しない場合である.**Case-5,6**では $d_i=a-1$ であるので,$M(x,\bar{d})$ において,a より小さい $\bar{d}_i$ の個数はが q より1つ少なくなることに注意する.

Case-1:$d_j<a$ のとき,

$$\triangle=\binom{e-(i-1)-d_i}{x-d_i}-\binom{e-(i-1)-(d_i+1)}{x-(d_i+1)}$$

表1.i,jの分類

d	1~a-2	a-1	a	a+1~x	x+1~n-1	併発するケース
Case-1	i	j				
Case-2	i		j			Case-3,4
Case-3	i			j		
Case-4	i				j	
Case-5		i		j		
Case-6		i			j	
Case-7			i	j		
Case-8			i		j	
Case-9					i j	Case-4,6,8

$$+\binom{e-(j-1)-d_j}{x-d_j}-\binom{e-(j-1)-(d_j-1)}{x-(d_j-1)}$$

公式,$\binom{z+1}{y+1}-\binom{z}{y+1}=\binom{z}{y}$ を用いて,

$$\triangle=\binom{e-(i-1)-(d_i+1)}{x-d_i}-\binom{e-(j-1)-d_j}{x-(d_j-1)}$$
$$>\binom{e-(j-1)-(d_i+1)}{x-(d_i+1)+1}-\binom{e-(j-1)-d_j}{x-d_j+1}$$
$$\geq\binom{e-(j-1)-(d_j-1)}{x-(d_j-1)+1}-\binom{e-(j-1)-d_j}{x-d_j+1}$$
$$=\binom{e-(j-1)-d_j}{x-(d_j-1)+1}>0$$

Case-3:$d_i\leq a-2$, $a+1\leq d_j\leq x$ のとき:

$$\triangle=\binom{e-(i-1)-d_i}{x-d_i}-\binom{e-(i-1)-(d_i+1)}{x-(d_i+1)}$$
$$+\binom{e-q-d_j}{x-d_j}-\binom{e-q-(d_j-1)}{x-(d_j-1)}$$
$$=\binom{e-(i-1)-(d_i+1)}{x-d_i}-\binom{e-q-d_j}{x-(d_j-1)}$$
$$\geq\binom{e-q-(d_i+1)}{x-(d_i+1)+1}-\binom{e-q-d_j}{x-d_j+1}$$
$$\geq\binom{e-q-(d_j-1)}{x-(d_j-1)+1}-\binom{e-q-d_j}{x-d_j+1}>0$$

Case-4:$d_i\leq a-2$, $d_j>x$ のとき:

(1) $d_j=x+1$ のとき

$$\triangle=\binom{e-(i-1)-d_i}{x-d_i}-\binom{e-(i-1)-(d_i+1)}{x-(d_i+1)}+0-\binom{e-q-x}{x-x}$$
$$=\binom{e-(i-1)-(d_i+1)}{x-d_i}-1$$
$$>\binom{e-q-x}{x-(x-1)}-1=e-q-x-1\geq 1 \text{(補題6.1より)}$$

(2) $d_j>x+1$ のとき,$\triangle$は(1)の第4項がないときであるので,$\triangle>0$ は明らか.

Case-5:$a-1=d_i$ $(=d_q)$, $a\leq d_j\leq x$ のとき.

このときは,$d_i+2\leq d_j$ より $a+1\leq d_j$.従って,$x\geq a+1$, $a\geq 4$ である.

$$\triangle=\binom{e-(q-1)-(a-1)}{x-(a-1)}-\binom{e-(q-1)-a}{x-a}$$
$$+\binom{e-q-d_j}{x-d_j}-\binom{e-(q-1)-(d_j-1)}{x-(d_j-1)}$$

$$+\sum_{k=q+1}^{j-1}\left\{\binom{e-q-d_k}{x-d_k}-\binom{e-(q-1)-d_k}{x-d_k}\right\}$$

$$+\sum_{k=j+1}^{r}\left\{\binom{e-q-d_k}{x-d_k}-\binom{e-(q-1)-d_k}{x-d_k}\right\}$$

$$=\binom{e-(q-1)-a}{x-(a-1)}+\binom{e-q-d_j+1}{x-d_j+1}-\binom{e-q-d_j}{x-d_j+1}$$

$$-\binom{e-q-d_j+2}{x-d_j+1}-\sum_{k=q+1}^{j-1}\binom{e-q-d_k}{x-d_k-1}-\sum_{k=j+1}^{r}\binom{e-q-d_k}{x-d_k-1}$$

$$\geqq\binom{e-(q-1)-a}{x-a+1}-\binom{e-q-d_i}{x-d_i+1}-\binom{e-q-d_i+1}{x-d_i}$$

$$-(n-q-1)\binom{e-q-a}{x-a-1}$$

$$\geqq\binom{e-q-a+1}{x-a+1}-\binom{e-q-a-1}{x-a}-(n-q)\binom{e-q-a}{x-a-1}$$

$$>\binom{e-q-a}{x-a+1}-(n-q)\binom{e-q-a}{x-a-1}$$

$$=\frac{1}{(x-a)(x-a+1)}\binom{e-q-a}{x-a-1}\times$$

$$\{(e-q-x)(e-q-x+1)-(n-q)(x-a)(x-a+1)\}$$

>0 （付録３参照）

Case-6：$a-1=d_i(=d_q)$，$x<d_j$のとき：

（１）$a-1=d_i$，$d_j=x+1$，$a=x$のとき

$$\triangle=\binom{e-(q-1)-(a-1)}{x-(a-1)}-\binom{e-(q-1)-a}{x-a}$$

$$+\sum_{k=q+1}^{r}\binom{e-q-a}{x-a}-\sum_{k=q+1}^{r}\binom{e-(q-1)-a}{x-a}-\binom{e-(q-1)-x}{x-x}$$

$$\geqq\binom{e-(q-1)-a}{x-a+1}-1=e-q-x+1-1\geqq 2$$ （補題6.1より）

（２）$a-1=d_i, d_j=x+1, x\geqq a+1$（従って，$a\geqq 4$）のとき

$$\triangle=\binom{e-(q-1)-(a-1)}{x-(a-1)}-\binom{e-(q-1)-a}{x-a}$$

$$+\sum_{k=q+1}^{r}\binom{e-q-d_k}{x-d_k}-\sum_{k=q+1}^{r}\binom{e-(q-1)-d_k}{x-d_k}-\binom{e-(q-1)-x}{x-x}$$

$$=\binom{e-(q-1)-a}{x-a+1}-\sum_{k=q+1}^{r}\binom{e-q-d_k}{x-d_k-1}-1$$

$$=\binom{e-q-a+1}{x-a+1}-(n-q)\binom{e-q-a}{x-a-1}-1$$

$$>\binom{e-q-a}{x-a+1}-(n-q)\binom{e-q-a}{x-a-1}>0$$ （**Case-5**と同様）

（３）$a-1=d_i$，$d_j>x+1$のとき，△は（１）あるいは（２）の第５項がないときであるので，$\triangle>0$は明らか．

Case-7：$a\leqq d_i$，$d_i\leqq x$のとき，

$$\triangle=\binom{e-q-d_i}{x-d_i}-\binom{e-q-(d_i+1)}{x-(d_i+1)}+\binom{e-q-d_j}{x-d_j}-\binom{e-q-(d_j-1)}{x-(d_j-1)}$$

$$\geqq\binom{e-q-(d_j-1)}{x-(d_j-1)+1}-\binom{e-q-d_j}{x-d_j+1}>0$$

Case-8：$a\leqq d_i\leqq x$，$d_j>x$のとき：

（１）$d_i<x$，$d_j=x+1$のとき

$$\triangle=\binom{e-q-d_i}{x-d_i}-\binom{e-q-(d_i+1)}{x-(d_i+1)}+0-\binom{e-q-x}{x-x}$$

$$=\binom{e-q-(d_i+1)}{x-d_i}-1>e-q-x-1\geqq 1$$ （補題6.1より）

（２）$d_i<x$，$d_j>x+1$のとき，△は（１）の第４項がないときであり，$\triangle>0$は明らか．

（３）$d_i=x$のとき，△は（１）の第２，４項がないときであり，$\triangle>0$は明らか．□

付録３． $4\leqq a\leqq n-2$，$an/2\leqq e$，$a\leqq x\leqq 2a-3$，$1\leqq q\leqq n-1$を満たす任意の整数a，n，e，x，qに対して，次式が正であることを示す．

$$(e-q-x)(e-q-x+1)-(n-q)(x-a)(x-a+1) \quad (A1)$$

まず，$(e-q-x)\geqq an/2-(n-1)-(2a-3)=\{(a-2)n-4a+8\}/2$

$$\geqq(a^2-4-4a+8)/2\geqq 2 \quad (A2)$$

(A1)式を，$y=x-a$の２次式と見ると（ただし，$t=e-q-a$）．

$f(y)=-(n-q-1)y^2-(2t+n-q+1)y+t^2+t$.

$0\leqq y\leqq a-3$ における$f(y)$の増減を考えると

$f'(y)=-2(n-q-1)y-(2t+n-q+1)$

となるが，(A2)より$t=e-q-a\geqq 2$であり$f'(y)$の定数項は常に負．よって$-2(n-q-1)\leqq 0$より$f'(y)\leqq 0$，$0\leqq y\leqq a-3$．つまり，$f(y)\geqq f(a-3)$，$0\leqq y\leqq a-3$．次に$f(a-3)>0$であることを示す．

$f(a-3)=(e-q-2a+3)(e-q-2a+4)-(n-q)(a-3)(a-2)$

これをqの２次式$g(q)$とみると，$1\leqq q\leqq n-1$において減少関数であることが，以下のように示せる．

$g'(q)=2q+a^2-a-1-2e\leqq 2q-a(n-a+1)-1$

$g'(q)\leqq g'(n-1)\leqq 2(n-1)-a(n-a+1)-1$

$=(n-a-1)(2-a)-1<0$．

従って，$g(q)\geqq g(n-1)$，$1\leqq q\leqq n-1$．次に$g(n-1)=(e-q-x)(e-q-x+1)-(n-q)(x-a)(x-a+1)$において(A2)より，$e=an/2$のとき$g(n-1)$は最小となるので，

$$g(n-1)\geqq\frac{1}{4}\{(an-2n-4a+8)(an-2n-4a+10)-4(a-2)(a-3)\}$$

$$=\frac{1}{4}(a-2)(n-2)((a-3)(n-6)+(n-4))\geqq 4$$ ．□

文献

(1) D. Bauer, F. Boesch, C. Suffel, R. Tindell, "Combinatorial optimization problems in the analysis and design of probabilistic networks", Networks, Vol. 15, 1985, pp257-271.

(2) F. Boesch, "Synthesis of reliable networks — a survey", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-35, No. 3, 1986, pp240-246.

(3) T. Evans, D. Smith, "Optimally reliable graphs for both edge and vertex failures", Networks, Vol. 16, 1986, pp199-204.

(4) F. Harary, "The maximun connectivity of a graph", proc. Nat. Acsd. of Sci. USA, Vol. 48, 1962, pp1142-1146.

(5) J. S. Provan, "Bound on the reliability of netwoks", IEEE Trans. Reliability, Vol. R-35, No. 3, 1986, pp260-268

(6) 孫，永持，楠："連結確率を最小にする節点数ｎ，枝数ｅ（≦n+2）のグラフ"，豊橋技術科学大学，楠研究室報告会資料，1988.