アルゴリズム５－４
（１９８９．１．２５）

Ｊａｃｏｂｉ－Ｐｅｒｒｏｎの アルゴリズムによるｎ乗根の高速発生法

海野啓明　　小沢一文

仙台電波工業高等専門学校

正の有理整数Ｌのｎ乗根をαとおき，数列α，α^2，…，α^{n-1}に対して Jacobi-Perronのアルゴリズム（ＪＰＡ）による展開を行うと，Ｌが特別のクラスに属するときこの展開が周期を持つことが L.Bernstein によって証明された．本報告では，Ｌ＝ D^n+dにおいてｎ，Ｄ，ｄが正整数で，ｄ｜Ｄかつ１≦ｄ≦Ｄ／（ｎ－２）の場合を考察する．ＪＰＡの展開にもとずいて構成される漸化式を解き，数列α，α^2，…，α^{n-1}の有理数近似列を生成する一般式を求める．この解を用いて，近以を加速する高次収束法の漸化式を導き，その有効性をマイコン用数式処理システムを用いて調べる．

A FAST METHOD FOR CALCULATING PERIODIC CONTINUED FRACTIONS OF IRRATIONALS OF DEGREE OF n BY JACOBI-PERRON ALGORITHM

KAINO Keimei and OZAWA Kazufumi

Sendai National College of Technology
kamiayasi, Sendai, Miyagi, 989-31 Japan

Abstract

It is proved that continued fractions for irrationals of degree n ($\alpha = \sqrt[n]{D^n+d}$, α, …, α^{n-1}) by Jacobi-Perron algorithm (JPA) is periodical, if d | D and $1 \leqq d \leqq D/(n-2)$ where D, d and n are positive integers. We solve the periodical recurrsion equation of JPA. By use of this solution, we derive an r'th order ($r \geqq 2$) converging algorithm for fast calculation of the irrationals and observe its efficiency on a microcomputer with the muMATH.

1.　まえがき

正の有理整数Lの n 乗根をαとおき，

$$1,\ \alpha,\ \cdots,\ \alpha^{n-1} \tag{1.1}$$

に対して Jacobi-Perronのアルゴリズム（ＪＰＡ）による展開を行うと，特別のＬのクラスに対して，展開が周期を持つことがわかっている[1]．この周期性を用いてＪＰＡの漸化式を解くと，(1.1) の数列の有理数近似列を任意の精度で求めることができる．このことは，数列 (1.1)を準乱数の生成子とするとき，十分な準乱数を生成することを保証する[2]．

本報告では，$L=D^n+d$，$\alpha=\sqrt[n]{L}$において，D，dおよびnが正整数で，$d\mid D$，$n\geqq 3$　かつ$1\leqq d\leqq D/(n-2)$の場合を考察する．2ではＪＰＡの漸化式が全てのnについて解けることを示す．3では2の結果を用いて，真の値(1.1)にｒ次収束（$r\geqq 2$）する有理数近似列を生成する漸化式を導く．4ではマイコン数式処理システムを用いてｒ次収束の漸化式の有効性を調べる．5はまとめである．

2.　n乗根の有理数近似

2.1 Jacobi-Perronのアルゴリズム（ＪＰＡ）

n個の実正数

$$1,\ \alpha_1^{(0)},\ \cdots,\ \alpha_{n-2}^{(0)},\ \alpha_{n-1}^{(0)} \tag{2.1}$$

から漸化式

$$\alpha_{k-1}^{(\nu+1)}=\frac{\alpha_k^{(\nu)}-a_k^{(\nu)}}{\alpha_1^{(\nu)}-a_1^{(\nu)}}\qquad (k=1,\cdots,n-1)$$

$$\alpha_{n-1}^{(\nu+1)}=\frac{1}{\alpha_1^{(\nu)}-a_1^{(\nu)}} \tag{2.2}$$

を用いて新しいn個の実正数

$$1,\ \alpha_1^{(\nu)},\ \cdots,\ \alpha_{n-2}^{(\nu)},\ \alpha_{n-1}^{(\nu)} \tag{2.3}$$

を生成する．但し，

$$a_k^{(\nu)}=[\alpha_k^{(\nu)}] \tag{2.4}$$

次の漸化式により$A_k^{(\nu)}$を定義する．

$$\begin{cases} A_k^{(\nu)}=\delta_{k\nu} & (k,\nu=0,\cdots,n-1)\\ A_k^{(\nu+n)}=A_k^{(\nu)}+a_1^{(\nu)}A_k^{(\nu+1)}+\cdots \\ \qquad +a_{n-1}^{(\nu)}A_k^{(\nu+n-1)} & (\nu=0,\cdots,n-1)\end{cases} \tag{2.5}$$

このとき，次式が成立する．

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{A_k^{(\nu)}}{A_0^{(\nu)}}=\alpha_k^{(0)} \tag{2.6}$$

もし$\nu\geqq 1$なる整数νにたいして，

$$a_k^{(\nu+m)}=a_k^{(\nu)}\quad (k=0,\cdots,n-1)$$

ならば，ＪＰＡは周期的である．一般に，最初のｌ行

$$1,\ a_1^{(\nu)},\ \cdots,\ a_{n-1}^{(\nu)}\quad (\nu=0,\cdots,l-1)$$

は”前周期”と呼ばれ，その後にｍ行

$$1,\ a_1^{(\nu)},\ \cdots,\ a_{n-1}^{(\nu)}\quad (\nu=1,\cdots,l+m-1)$$

の”周期”が現れる．

2.2 n乗根とＪＰＡの周期に対する Bernsteinの定理[3]

［定理１］ D，d，nは正の整数で，$d\mid D$，$n\geqq 3$
かつ$1\leqq d\leqq D/(n-2)$　のとき

$$\alpha=\sqrt[n]{D^n+d}$$

とおくと

$$1,\ \alpha,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

にたいするＪＰＡは周期的で，（n-1）行の前周期とｎ行の周期を持つ（表）．但し，$d=1$の場合は例外で周期は１行である．

［定理１の系］ pを素数とし，$n=p^\nu$，$d\mid D$および$D\geqq dp(n-2)$とする．

$$\alpha=\sqrt[n]{D^n+dp}$$

とおくと，

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

にたいするＪＰＡは周期を持ち，その展開は定理１においてdをdpで置き換えたものに等しい．

定理１と漸化式 (2.5)を用いると$A_k^{(\nu)}$が計算できる．(2.5) は線形であるから，その固有方程式は周期の行数分だけ連立したｎ次方程式となる．以下では，固有値を求め，$A_k^{(\nu)}$の一般式を示す．

The pre-period has the form

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} & \binom{1}{1}D & \binom{2}{2}D^2 & \cdots & \binom{n-2}{n-2}D^{n-2} & \binom{n-1}{n-1}D^{n-1}\\
\binom{1}{0} & \binom{2}{1}D & \binom{3}{2}D^2 & \cdots & \binom{n-1}{n-2}D^{n-2} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}\\
\binom{2}{0} & \binom{3}{1}D & \binom{4}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}\\
\cdots\cdots & & & & & \\
\binom{m}{0} & \binom{m+1}{1}D & \binom{m+2}{2}D^2\cdots\binom{n-1}{n-m-1}D^{n-m-1} & \binom{n}{n-m}\frac{D^{n-m}}{d} & \cdots & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}\\
\cdots\cdots & & & & & \\
\binom{n-2}{0} & \binom{n-1}{1}D & \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}
\end{array}$$

and the period has the form

$$\begin{array}{llllll}
\binom{n-1}{0} & \binom{n}{1}\frac{D}{d} & \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}\\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}D^{n-2} & \binom{n}{n-1}D^{n-1}\\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}D^{n-2} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}\\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}D^2 & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}\\
\cdots\cdots & & & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1}D & \binom{n}{2}\frac{D^2}{d} & \cdots & \binom{n}{n-2}\frac{D^{n-2}}{d} & \binom{n}{n-1}\frac{D^{n-1}}{d}.
\end{array}$$

表　定理におけるＪＰＡの前周期と周期．

2.3 $A_k^{(\nu)}$の一般式

2.3.1 $d=1$の場合

$\alpha = \sqrt[n]{D^n+1}$のとき，漸化式は

$$A_k^{(\nu+n)} = A_k^{(\nu)} + \binom{n}{1} D A_k^{(\nu+1)} + \cdots + \binom{n}{n-1} D^{n-1} A_k^{(\nu+n-1)} \tag{2.7}$$

固有方程式は，

$$\lambda^n - \binom{n}{n-1} D^{n-1}\lambda^{n-1} - \cdots - \binom{n}{1} D\lambda - 1 = 0 \tag{2.8}$$

$\omega = \exp(i2\pi/n)$を用いて因数分解をすると，

$$\Pi_j [(D\lambda+1) - \omega^j \alpha\lambda] = 0$$

となるから，固有値λ_jは，

$$\lambda_j = (\omega^j\alpha - D)^{-1} \quad (j=0,\cdots,n-1)$$

［補題1］(2.8)の固有値 λ_jは，

$$\lambda_j = (\omega^j\alpha - D)^{-1} \quad (j=0,\cdots,n-1) \tag{2.9}$$

で与えられ，次の性質を持つ．

(i) $\lambda_0 = \lambda(\alpha)$ とおくと，

$$\lambda_j = \lambda(\omega^j\alpha) \quad (j=0,\cdots,n-1)$$

(ii) $\Pi_j \lambda_j = 1$

(iii) $\lambda_0 > |\lambda_1| > \cdots > |\lambda_{[n/2]}|$，

$$\lambda_j = \overline{\lambda_{n-j}} \tag{2.10}$$

(iv) $$\lambda_0^\nu = \gamma_{n-1}^{(\nu)} + \gamma_{n-2}^{(\nu)}\alpha + \cdots + \gamma_0^{(\nu)}\alpha^{n-1} \tag{2.11}$$

とおくと$\gamma_{n-1}^{(\nu)}, \cdots, \gamma_0^{(\nu)}$ は正整数で，

$$\gamma_k^{(\nu)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda_j^\nu}{(\omega^j\alpha)^{n-1-k}} \tag{2.12}$$

$$(k=1,\cdots,n-1;\ \nu=0,1,\cdots)$$

特に，

$$\gamma_k^{(0)} = \delta_{k,n-1},\quad \gamma_k^{(1)} = D^k \tag{2.13}$$

［証明］ (i) は(2.9)から，(ii)は(2.8)式の根と係数の関係から示される．

(iii) $0 \leqq j < k \leqq [n/2]$ のとき，

$$|\omega^j\alpha - D|^2 - |\omega^k\alpha - D|^2$$
$$= 2\alpha D\,(\cos(2\pi k/n) - \cos(2\pi j/n))$$
$$= \alpha D\ \sin(\pi(j+k)/n)\ \sin(\pi(j-k)/n)$$
$$< 0$$

従って，

$$|\lambda_j| / |\lambda_k| = |\omega^k\alpha - D| / |\omega^j\alpha - D| < 1$$

(iv) $\lambda_0^0 = 1$，および(2.9)より，

$$\lambda_0 = D^{n-1} + D^{n-2}\alpha + \cdots + \alpha^{n-1} \geqq nD^{n-1}$$

従って，

$$\gamma_k^{(0)} = \delta_{k,n-1},\quad \gamma_k^{(1)} = D^k \quad (k=1,\cdots,n-1)$$

$\gamma_k^{(\nu)}$は$\nu=1$のときは正整数である．定義より，

$$\lambda_0^{\nu+1} = \gamma_{n-1}^{(\nu+1)} + \gamma_{n-2}^{(\nu+1)}\alpha + \cdots + \gamma_0^{(\nu+1)}\alpha^{n-1}$$

一方，$\lambda_0^{\nu+1} = \lambda_0^\nu \cdot \lambda_0$より，

$$\gamma_{n-1-k}^{(\nu+1)} = \Sigma_{j=0}^{k}\ \gamma_{n-1-j}^{(\nu)}\gamma_{j+n-1-k}^{(1)} + \alpha^n\ \Sigma_{j=k+1}^{n-1}\ \gamma_{n-1-j}^{(\nu+1)}\gamma_{j-1-k}^{(1)}$$

$\gamma_k^{(\nu)}$が正整数ならば$\gamma_k^{(\nu+1)}$も正整数となるので，帰納法により全ての$\gamma_k^{(\nu)}$は正整数であることがいえる．

(2.11)に(i)を適用すると，

$$\lambda_j^\nu = \gamma_{n-1}^{(\nu)} + \gamma_{n-2}^{(\nu)}\omega^j\alpha + \cdots + \gamma_0^{(\nu)}(\omega^j\alpha)^{n-1} \quad (j=0,1,\cdots,n-1)$$

これらを，$\Sigma_{j=0}^{n-1}\omega^j = 0$ であることを用いて，$\gamma_k^{(\nu)}$について解くと(2.12)をえる．

$A_k^{(\nu)}$は$\lambda_0^\nu, \cdots, \lambda_{n-1}^\nu$の1次結合で表されるが，(2.12)により$\gamma_0^{(\nu)}, \gamma_1^{(\nu)}, \cdots, \gamma_{n-1}^{(\nu)}$で表すこともできる．

$$A_k^{(\nu+n-1)} = \Sigma_{j=0}^{n-1}\ u_{k,j}\gamma_j^{(\nu)} \tag{2.14}$$

$A_k^{(\nu+n-1)}$，$\gamma_j^{(\nu)}$は共に正整数であるから，係数 $u_{k,j}$は有理数でなくてはならない．νが十分大きいとき，

$$A_k^{(\nu+n-1)} = \frac{1}{n}\,\Sigma_j\ u_{k,j}\,\frac{\lambda_0^\nu}{\alpha^{n-1-j}}\ \left(1 + O\left(\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right|^\nu\right)\right)$$

これを，(2.5)で$\alpha_k^{(0)} = \alpha_k$とおいた式に代入すると，

$$\Sigma_j u_{k,j}\alpha^j = \alpha^k \Sigma_j u_{0,j}\alpha^j \quad (k=1,\cdots,n-1)$$

$\alpha, \cdots, \alpha^{n-1}$がお互いに1次独立な無理数であるから，$\alpha$のべきの係数を比較すると，

$$u_{k,j} = \begin{cases} \alpha^n u_{0,n+j-k} & (j=0,\cdots,k-1) \\ u_{0,j-k} & (j=k,\cdots,n-1) \end{cases} \tag{2.15}$$

(2.14)において，$\nu=0$ とおき上式を用いると，

$$A_k^{(n-1)} = u_{k,n-1} = u_{0,n-1-k}$$

(2.4)により，

$$A_k^{(n-1)} = \delta_{k,n-1}$$

よって，$u_{0,j} = \delta_{0,j}$ すなわち，

$$u_{k,j} = \delta_{k,j} \quad (j,k=0,\cdots,n-1)$$

以上のことから，次の定理を得る．

［定理2］ 定理1において$d=1$の場合，漸化式(2.7)を解くと，$A_k^{(\nu+n-1)}$ は次式で表される．

$$A_k^{(\nu+n-1)} = \gamma_k^{(\nu)} = \frac{1}{n}\,\Sigma_{j=0}^{n-1}\ \frac{\lambda_j^\nu}{(\omega^j\alpha)^{n-1-k}} \quad (\nu=1,2,\cdots) \tag{2.19}$$

2.3.2 $d \geqq 2$の場合

$d \geqq 2$，$\alpha = \sqrt[n]{D^n+d}$のとき定理1により漸化式は，

$$A_k^{(n\nu+2n-1)} = A_k^{(n\nu+n-1)} + a_1^{(n-1)}A_k^{(n\nu+n)} + \cdots + a_{n-1}^{(n-1)}A_k^{(n\nu+2n-2)}$$

$$\cdots$$

$$A_k^{(n+3n-2)} = A_k^{(n+2n-2)} + a_1^{(2n-2)}A_k^{(n+2n-1)} + \cdots + a_{n-1}^{(2n-2)}A_k^{(n+3n-3)}$$

$$(k=0,\cdots,n-1;\ \nu=0,1,\cdots) \tag{2.17}$$

これらを行列形式で表すために，列ベクトル$A_k^{(\nu)}$を次式で定義する．

$$A_k^{(\nu)} = (A_k^{(n\nu+n-1)},\ A_k^{(n\nu+n)},\ \cdots,\ A_k^{(n\nu+2n-2)})^T \tag{2.18}$$

Tは転置を意味する．このとき(2.17)は，

$$L \cdot A_k^{(\nu+1)} = R \cdot A_k^{(\nu)} \tag{2.19}$$

または，

$$A_k^{(\nu+1)} = T \cdot A_k^{(\nu)} \tag{2.20}$$

である．ここに，L，RおよびTはn×n行列で，次式で与えられる．

$$R = \begin{bmatrix} 1 & a_1^{(n-1)} & a_2^{(n-1)} & \cdots & a_{n-1}^{(n-1)} \\ & 1 & a_1^{(n)} & \cdots & a_{n-2}^{(n)} \\ & & 1 & \cdots & a_{n-3}^{(n+1)} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -a_{n-1}^{(n)} & 1 & & & \\ -a_{n-2}^{(n+1)} & -a_{n-1}^{(n+1)} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -a_1^{(2n-2)} & -a_2^{(2n-2)} & -a_3^{(2n-2)} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = L^{-1} \cdot R$$

また，

$$|R| = |L| = |T| = 1$$

固有方程式は，

$$|R - \Lambda L| = |T - \Lambda I| = 0 \tag{2.21}$$

である．ただし，Iは単位行列である．固有方程式に関しては次の補題が成り立つ．

［補題２］ 固有方程式を展開し，

$$|T - \Lambda I| = \Sigma_{k=0}^{n}\ (-1)^k t_k \Lambda^k$$

とおくと，

(i) $t_n = t_0 = 1$

(ii) t_k ($k \leqq n-1$) は整数を係数とする$\Delta = D^n / d$ の高々k次の多項式である．

［証明］(i)は明かである．

(ii)固有方程式を変形すると，

$$|T - \Lambda I| = |R - \Lambda L|$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\Lambda & a_1^{(n-1)}d & a_2^{(n-1)}d & \cdots & a_{n-1}^{(n-1)}d \\ \dfrac{a_{n-1}^{(n)}\Lambda}{d} & 1-\Lambda & a_1^{(n)} & \cdots & a_{n-2}^{(n)} \\ \dfrac{a_{n-2}^{(n+1)}\Lambda}{d} & a_{n-1}^{(n+1)}\Lambda & 1-\Lambda & \cdots & a_{n-3}^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{a_1^{(2n-2)}\Lambda}{d} & a_2^{(2n-2)}\Lambda & a_3^{(2n-2)}\Lambda & & 1-\Lambda \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

行列の要素を $(R-\Lambda L)_{ij}=b_{ij}$とおくと，

$$b_{ii}=1-\Lambda$$

$$b_{ij}=\begin{cases}\binom{n}{j-i}D^{j-i} & (i<j)\\ \binom{n}{i-j}D^{j-i}\Delta\Lambda & (i>j)\end{cases}$$

ΔはDの0次であるとすると，ij要素はDについて(j-i)次となる．

$$|T-\Lambda I|=\Sigma\pm b_{\alpha 1}b_{\beta 2}\cdots b_{\lambda n}$$

Σ和はn！の順列$\alpha\beta\cdots\lambda$の上にわたり，各項の符号±は順列が偶ならば＋，奇ならば－である．

$$\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1+2+\cdots+n$$

であるから，各項はDについて0次となる．Λは対角要素と左下三角形の要素に現れる．Λの係数は，前者では－1，後者ではΔに比例する．従って，
$k\leqq n-1$　のときΛ^kの係数t_kに於けるΔの次数は高々kである．

例として，n＝3，4，5の場合の固有方程式を示す．ただし，Λの降べきの順にならべる．

(i) $\Lambda^3-3(3+3\Delta+\Delta^2)\Lambda^2+3\Lambda-1=0$
　ただし，　$\Delta=3D^3/d$

(ii) $\Lambda^4-4(1+17\Delta^2+24\Delta^3+8\Delta^4)\Lambda+$
　$+2(3-28\Delta-14\Delta^2)\Lambda-4(1+\Delta)\Lambda+1=0$
　ただし，$\Delta=2D^4/d^2$

(iii) $\Lambda^5-5(1+25\Delta+30\Delta^2+10\Delta^3+\Delta^4)\Lambda^4$
　$+5(2-75\Delta-15\Delta^2)\Lambda^3-5(2+25\Delta+5\Delta^2)\Lambda^2$
　$+5\Lambda-1=0$　　　ただし，$\Delta=5D^5/d$

［補題3］固有方程式(2.21)の固有値 Λ_j は，

$$\Lambda_j=d/(\omega^j\alpha-D)^n \quad (j=0,\cdots,n-1) \quad (2.23)$$

で与えられる．このとき，

(i) $\Lambda_0=\Lambda(\alpha)$とおくと，
$$\Lambda_j=\Lambda(\omega^j\alpha)$$

(ii) $\Pi_j\Lambda_j=1$

(iii) $\Lambda_0>|\Lambda_1|>\cdots>|\Lambda_{[n/2]}|$,
$$\Lambda_j=\overline{\Lambda_{n-j}} \quad (2.24)$$

(iv) $\Lambda_0{}^\nu=\Gamma_{n-1}{}^{(\nu)}+\Gamma_{n-2}{}^{(\nu)}\alpha+\cdots+\Gamma_0{}^{(\nu)}\alpha^{n-1} \quad (2.25)$

とおくと，$\Gamma_{n-1}{}^{(\nu)}$，$\Gamma_{n-2}{}^{(\nu)}$，…，$\Gamma_0{}^{(\nu)}$は正整数であり，

$$\Gamma_k{}^{(\nu)}=\frac{1}{n}\Sigma_{j=0}{}^{n-1}\frac{\Lambda_j{}^\nu}{(\omega^j\alpha)^{n-1-k}} \quad (2.26)$$

特に，$\Gamma_k{}^{(0)}=\delta_{k,n-1}$　　(k=0,…,n-1)　　(2.27)

［証明］　漸化式(2.17)を解くと，$A_k{}^{(\nu)}$は$\{\Lambda_j{}^\nu\}$の1次結合で表される．定理2より，d＝1のとき$A_k{}^{(\nu)}$は$\{\lambda_j{}^{n\nu}\}$の1次結合で表される．前者はd＝1のとき後者に一致しなくてはならない．従って，

$$\lim_{d\to 1}\Lambda_j=\lambda_j{}^n$$

補題2から固有値 Λ_jはΔのみの関数となる．この関数は上式から決定されるから，

$$\Lambda_j=(\omega^j\,{}^n\sqrt{\Delta+1}-{}^n\sqrt{\Delta})^{-n}$$
$$=d/(\omega^j\alpha-D)^n$$

固有値は次のように表すことが出来る．

$$\Lambda_j=\lambda'_j{}^n/d^{n-1},$$

$$\lambda'_j=d/(\omega^j\alpha-D) \quad (2.28)$$

(i)－(iv)は，(2.23)を用いて補題1と同様に証明できる．

3.2.2　$A_k{}^{(\nu)}$の一般式

Tの固有値Λ_jに対応する固有ベクトルをV_jとすると，

$$T\cdot V_j=\Lambda_j V_j \quad (2.29)$$

または，

$$R\cdot V_j=\Lambda_j L\cdot V_j \quad (j=0,\cdots,n-1) \quad (2.30)$$

このとき$A_k{}^{(\nu)}$は，

$$A_k{}^{(\nu)}=\Sigma_{j=0}{}^{n-1}c_{k,j}\Lambda_j{}^\nu V_j \quad (k=0,\cdots,n-1)$$

$\Gamma_j{}^{(\nu)}$を用いて書き直すと，

$$\begin{cases}A_k{}^{(\nu)}=\Sigma_{j=0}{}^{n-1}u_{k,j}\Gamma_j{}^{(\nu)} & (2.31)\\ u_{k,j}=\Sigma_{m=0}{}^{n-1}c_{k,m}(\omega^m\alpha)^{n-1-j}V_m & (2.32)\end{cases}$$

$A_k{}^{(\nu)}$の各要素および$\Gamma_k{}^{(\nu)}$は正整数であるから，$u_{k,j}$は有理数でなくてはならない．定理2の証明と同様にして，

$$u_{k,j}=\begin{cases}\alpha^n u_{0,n+j-k} & (j=0,\cdots,k-1)\\ u_{0,j-k} & (j=k,\cdots,n-1)\end{cases} \quad (2.33)$$

(2.31)において　$\nu=0$ とおき，(2.27)を用いると，

$$A_k{}^{(0)}=u_{k,n-1}=u_{0,n-1-k}$$

従って，

$$u_{0,k}=A_{n-1-k}{}^{(0)} \quad (k=0,\cdots,n-1) \quad (2.34)$$

右辺は漸化式の初期値であり，前周期により決定される．
特に(2.4)より，

$$(u_{0,k})_1=\delta_{k,0}$$

(2.33)から，

$$u_{k,j}=\delta_{k,j} \quad (j,k=0,\cdots,n-1)$$

よって，

$$A_k{}^{(n\nu+n-1)}=\Gamma_k{}^{(\nu)}$$
$$=\frac{1}{n}\Sigma_{j=0}{}^{n-1}\frac{\Lambda_j{}^\nu}{(\omega^j\alpha)^{n-1-k}} \quad (\nu=1,2,\cdots) \quad (2.35)$$

(2.32)を固有ベクトルV_jについて解き，(2.33)を代入すると，

$$c_{k,j}V_j=(\omega^j\alpha)^k\frac{1}{n}\Sigma_{m=0}{}^{n-1}\frac{u_{0,1}}{(\omega^m\alpha)^{n-1-m}}$$

従って，

$$c_{k,j}=(\omega^j\alpha)^k \quad (2.36)$$

$$V_j=\frac{1}{n}\Sigma_{k=0}{}^{n-1}\frac{A_k{}^{(0)}}{(\omega^j\alpha)^k} \quad (j,k=0,\cdots,n-1) \quad (2.37)$$

d＝1のとき，V_jを定理2を用いて計算すると，

$$V_j=\frac{1}{n(\omega^j\alpha)^{n-1}}(1,\lambda_j,\cdots,\lambda_j{}^{n-1})^T$$

$d \geqq 1$ のとき，V_j は次式で与えられる．

$$V_j = \frac{1}{n(\omega^j \alpha)^{n-1}} \times \left(1,\ \lambda'_j,\ \frac{\lambda'^2_j}{d},\ \cdots,\ \frac{\lambda'^{n-1}_j}{d^{n-2}}\right)^T$$

これは，上式を(2.30)に代入して両辺を比較すれば確かめられる．以上のことから次の定理を得る．

［定理３］　定理１において，漸化式(2.17)を解くと，$A_k^{(\nu+n-1)}$ は次式で表される．

$$\mathbf{A}_k^{(\nu)} = (A_k^{(n\nu+n-1)},\ A_k^{(n\nu+n)},\ \cdots,\ A_k^{(n\nu+2n-2)})^T$$
$$= \frac{1}{n} \Sigma_{j=0}^{n-1} \frac{\Lambda_j^{\nu}}{(\omega^j \alpha)^{n-1-k}} \times \left(1,\ \lambda'_j,\ \frac{1}{d}\lambda'^2_j,\ \cdots,\ \frac{1}{d^{n-2}}\lambda'^{n-1}_j\right)^T$$
$$(k=0,\cdots,n-1;\ \nu=0,1,\cdots) \qquad (2.38)$$

３．n乗根を生成する高次収束法

定理３を用いて，α，α^2，…，α^{n-1}の値に収束する有理数近似列の誤差を評価する．ここでは，(2.35)で表される数列を採用する．

［定理４］　$A_k^{(n\nu+n-1)} = A_k$　とおくと，漸化式，

$$A_k^{(rn\nu+n-1)} = \sum_p \sum_{k1=0}^{n-1} \cdots \sum_{kr=0}^{n-1} \alpha^{pn} A_{k1} \cdots A_{kr} \times \delta_{k1+\cdots+kr,\ r(n-1)+k-pn}$$
$$(k=0,\cdots,n-1;\ \nu=1,2,\cdots) \qquad (3.1)$$

によって生成される数列の比

$$A_k^{(rn\nu+n-1)} / A_0^{(rn\nu+n-1)}$$

は α^k にｒ次収束する．ここに，ｐ和は整数について取る．

［証明］　(2.35)を Λ_j^{ν} について解き，これを(2.35)の $n\nu$ を $rn\nu$ で置き換えた式に代入して整理すれば(3.1)をえる．

誤差 $\varepsilon_k^{(\nu)}$ を次式で定義する．

$$\varepsilon_k^{(\nu)} = \frac{A_k^{(n\nu+n-1)}}{\alpha^k A_0^{(n\nu+n-1)}} - 1 \qquad (3.2)$$

補題３(iii)より，ν が十分大きいときの主要な項は，

$$\varepsilon_k^{(\nu)} \sim 2 \mathrm{Re}\, \omega (\omega^k - 1)(\Lambda_1/\Lambda_0)^{\nu}$$
$$= -4 \sin(k\pi/n) \sin\{(k+2)\pi/n + \nu\theta\} \times |\Lambda_1/\Lambda_0|^{\nu}$$

ここで，$\Lambda_1 = |\Lambda_1| \exp(i\theta)$ とおいた．

$|\Lambda_1/\Lambda_0|^{\nu}$ の係数は，ν に依存して振動するが大きさは高々４である．$|\Lambda_1/\Lambda_0|$ の次数のみを問題にすれば，

$$\varepsilon_k^{(r\nu)} = O(\{\varepsilon_k^{(\nu)}\}^r) \qquad (3.3)$$

である．漸化式(3.1)はこの意味で，ｒ次収束である．

以下に立方根と４乗根に対する２，３次収束法の漸化式を示す．

3.1　立方根（ｎ＝３）の場合

$$A_k^{(3\nu+2)} = A_k$$
$$A_k^{(6\nu+2)} = A_k' \qquad (3.4)$$
$$A_k^{(9\nu+2)} = A_k''$$

とおくと，

(i) ２次収束法

$$A_0' = 2A_0A_2 + A_1^2$$
$$A_1' = \alpha^3 A_0^2 + 2A_1A_2 \qquad (3.5)$$
$$A_2' = 2\alpha^3 A_0A_1 + A_2^2$$

(ii) ３次収束法

$$A_0'' = 3(\alpha^3 A_0^2 A_1 + A_0 A_2^2 + A_1^2 A_2)$$
$$A_1'' = 3\{\alpha^3(A_0^2 A_2 + A_0 A_1^2) + A_1 A_2^2\} \qquad (3.6)$$
$$A_2'' = \alpha^6 A_0^3 + \alpha^3(6A_0A_1A_2 + A_1^3) + A_2^3$$

初期値は　$\Delta = 3D^3/d$　とおくと，

$$A_0^{(5)} = (3D/d)(1+\Delta)$$
$$A_1^{(5)} = (3D^2/d)(2+\Delta) \qquad (3.7)$$
$$A_2^{(5)} = 1+3\Delta+\Delta^2$$

近似の誤差は，

$$\varepsilon_k^{(3\nu+2)} = A_k/(\alpha^k A_0) - 1 \sim c_k \Lambda_0^{-3\nu/2} \qquad (3.8)$$
$$c_k = 2\sqrt{3} \sin\{(k-1)\pi/3 + \nu\theta\}$$
$$(k=1,2).$$

3.2　4乗根（$n=4$）

$$A_k^{(4\nu+3)}=A_k$$
$$A_k^{(8\nu+3)}=A_k' \qquad (3.9)$$
$$A_k^{(12\nu+3)}=A_k''$$

とおくと，

(i) 2次収束法

$$A_0'=2\,(A_0A_3+A_1A_2)$$
$$A_1'=\alpha^4A_0^2+2A_1A_3+A_2^2$$
$$A_2'=2\,(\alpha^4A_0A_1+A_2A_3) \qquad (3.10)$$
$$A_3'=\alpha^4(2A_0A_2+A_1^2)+A_3^2$$

(ii) 3次収束法

$$A_0''=3\alpha^4(A_0^2A_2+A_0A_1^2)+$$
$$+3A_0A_3^2+6A_1A_2A_3+A_2^3$$
$$A_1''=\alpha^4(3A_0^2A_3+6A_0A_1A_2+A_1^3)$$
$$+3\,(A_1A_3^2+A_2^2A_3) \qquad (3.11)$$
$$A_2''=\alpha^8A_0^3+3\alpha^4(2A_0A_1A_3+$$
$$+A_0A_2^2+A_1^2A_2)+3A_2A_3^2$$
$$A_3''=3\alpha^8A_0^2A_1+3\alpha^4(2A_0A_2A_3+$$
$$+A_1^2A_3+A_1A_2^2)+A_1^3$$

初期値は　$\Delta=2D^4/d$　とおくと，

$$A_0^{(7)}=(4D/d)(1+6\Delta+4\Delta^2)$$
$$A_1^{(7)}=(2D^2/d)(5+16\Delta+8\Delta^2) \qquad (3.12)$$
$$A_2^{(7)}=(4D^3/d)(5+10\Delta+4\Delta^2)$$
$$A_3^{(7)}=1+17\Delta+24\Delta^2+8\Delta^3$$

近似誤差は，

$$\varepsilon_k^{(4\nu+3)}=A_k/(\alpha^kA_0)-1$$
$$\sim c_k(\Lambda_0^3\Lambda_2)^{-\nu/2}, \qquad (3.13)$$
$$c_k=4\sin(k\pi/4)\sin\{(k-2)\pi/4+\nu\theta\}$$
$$(k=1,2,3)$$

4．高次収束法の計算効率．

3で導いた漸化式の計算効率を，マイコン数式処理システムmuMATHを用いて調べた．最も簡単な

$$n=3,\ D=d=1$$

の場合を，2，3次収束の漸化式を用いて$\{A_k^{(\nu)}\}$を計算した．図はνに対応する計算時間 T［sec］を両対数グラフに表したものである．νの最大は 12290で，このとき小数点以下 10785桁迄正確であることが保証される．グラフの傾きは，νの大きいところで2であるので，$T_r=C_r\nu^2$と仮定すると，

$$C_1=16\times10^{-6}$$
$$C_2=0.18\times10^{-6}$$
$$C_3=0.33\times10^{-6}$$

となる．2次収束収束法は1次収束法よりも90倍速く，3次収束法よりも2倍速い．結果の検討は講演時に述べる．

5．おわりに

定理1によりＪＰＡが周期をもつ場合に，数列

$$1,\ \alpha,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}$$

にたいする有理数近似列を生成する漸化式が解けることを示した．さらに，その結果を用いて有理数近似を効率よく求める高次収束法を導き，マイコン上で有効性を確かめた．

ＪＰＡが周期をもつ，他の種類のn乗根の数列にたいしても同様の考察をする必要がある．また，これらの数列を多次元上の準乱数として利用することも検討するつもりである[4]．

参考文献

(1) L.Bernstein: Lecture Notes in Mathematics, vol.207, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

(2)高橋，室谷:数値計算とその応用，コロナ社，1979.

(3) L.Bernstein: J.f.d.reine angew. Math., 213, pp.31-38, 1964.

(4) M.Sugihara , K.Murota: Math. Comp., 39, pp.549-554, 1982.

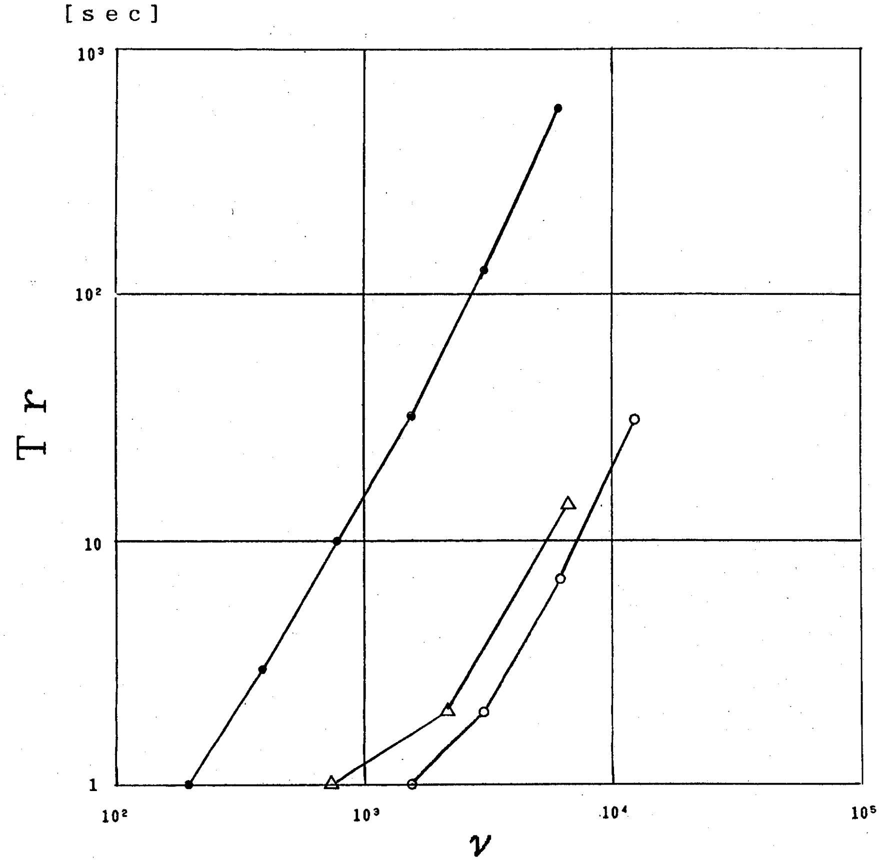

図　r次収束法による$A_k^{(\nu)}$の計算時間T_rの比較.
1次 ● ; 2次 ○ ; 3次 △