アルゴリズム 9－3
（1989. 7. 27）

曲面に埋め込まれたグラフに対する近似アルゴリズム

浅野考平

関西学院大学　理学部

本論文では，固定された種数gをもつ曲面に埋め込まれたグラフGに対して，

(1) ｜S｜≦4g，

(2) G-Sが２つの外平面的グラフに分割可能である，

ような頂点の集合Sを見つける線形時間アルゴリズムを構成する．

このアルゴリズムを用いて，Gの頂点の彩色，独立点集合に対する近似アルゴリズムを提案する．

Approximation Algorithms for embedded graphs

Kouhei Asano

Faculty of Science, Kwansei Gakuin University
Nishinomiya, Hyogo 662, Japan

In this paper, a linear algorithm that will find a set S of vertices of a graph G embedded in the surface of fixed genus g such that

(1) ｜S｜≦ 4g,

(2) G-S can be decomposed into two outerplanar graphs,

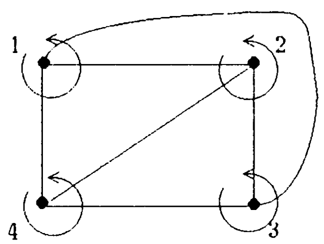
is described.

Using this algorithm, we will present approximation algorithms for a graph coloring and a maximam independent set.

1．まえがき

ここでグラフというとき，単純無向グラフを示す．

グラフを曲面に埋め込んだとき，各頂点vに対して v に隣接する頂点の巡回置換 $\pi(v)$が決まる．この巡回置換の列 $\{\pi(v) : v \in V\}$ を埋め込みのrotation schemeという．逆に任意の巡回置換の列に対して，それをrotation schemeとしてもつ埋め込みが存在する．（但し，この埋め込みの各領域は２胞体である．）



$\pi(1)$: 2，3，4
$\pi(2)$: 1，3，4
$\pi(3)$: 1，4，2
$\pi(4)$: 1，3，2

図１

グラフのデータ構造として，隣接リストを用いたとき，各頂点に対してその隣接リストをrotationと考えると，それに対応する曲面への埋め込みが丁度１つ決まる．またその曲面の種数は容易に決定することができる．

グラフの問題は外平面的グラフに制限すると，多くの問題が単純な多項式時間アルゴリズムによって解くことが可能である．[1][2][3]．また，平面グラフは２つの外平面的グラフに「分割」することが可能である．これらのことを使って平面グラフに対する簡単な「近似」アルゴリズムを構成することができる．例えば，外平面的グラフの独立点集合をもとめる線形時間アルゴリズムが存在するので，平面グラフの独立数の1/2以上の位数の独立点集合を求める線形時間アルゴリズムが存在する．

また，外平面的グラフの最適彩色を求めるアルゴリズムが存在し，その染色数は３以下であるから，平面グラフを６色で彩色するアルゴリズムが構成できる．

本論文では，これらの結果を一般のグラフの曲面への埋め込みに拡張する．

2．補題

グラフGが曲面Fに埋め込まれているとする．領域の集合 $\{r_1,\cdots,r_d\}$ に対して，Gの任意の頂点がこの集合に属する領域の境界上にあるとき，この集合は<u>領域被覆</u>であるという．

この節では，次の補題を証明する．

［補題１］

Gが種数gの曲面Fに２胞体的に埋め込まれているとする．
d個の領域によって，Gの頂点が被覆されているとき，Gの適当な頂点の集合Sが存在して，

(1) $|S| \leqq 2(2g+d-1)$

(2) G-Sは外平面的である．

証明

$\{r_1,\cdots,r_d\}$ を領域被覆とする．
$F - \cup\{r_i : 1 \leqq i \leqq d\}$ は図２のような円盤に2g+d-1本の「バンド」をつけた図形で表現することができる．ここで，$\{r_1,\cdots,r_d\}$ が領域被覆であることから，全ての頂点は，境界上にあることに注意する．図2g+d-1本のバンドを切るような辺または頂点の集合を考えると，高々2(2g+d-1)個の適

当な頂点を除くことにより外平面的グラフになることがわかる.

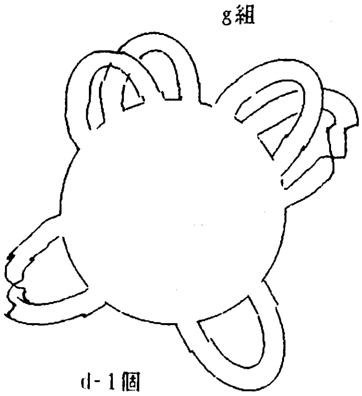


図2

注意

Sは次のようにして，線形時間で構成できる. $F - \cup \{r_i : 1 \leqq i \leqq d\}$ の各領域に頂点を対応させ，２つの領域が共有辺または共有点を持てば，辺で結ぶ. このようにして構成したグラフG'のspanning tree をとり，spanning treeに含まれない辺に対応する辺または頂点の集合Cを考える. Cの頂点に対応するGの頂点とCの辺に対応するGの辺の両端の集合をSとすれば，目的の頂点の集合ができる.

ここで，種数gの曲面に埋め込まれたグラフに対して，辺の数は，頂点数の１次不等式で抑えられることを用いた.

２. 曲面の分解

Gの曲面Fへの埋め込みを考える. １つの領域を選び内部に点pをおく. 以後この点pを含む領域を<u>外領域</u>と呼ぶことにする.

外領域の境界をD_1とし，D_1の頂点集合をL_1とする. $G-L_1=G_1$， G_1の外領域の境界をD_2，D_2の頂点集合をL_2とおく. 以下同様にして，空グラフになるまで，繰り返し，列$D_1, \cdots, D_k$， $L_1, \cdots, L_k$をつくる.

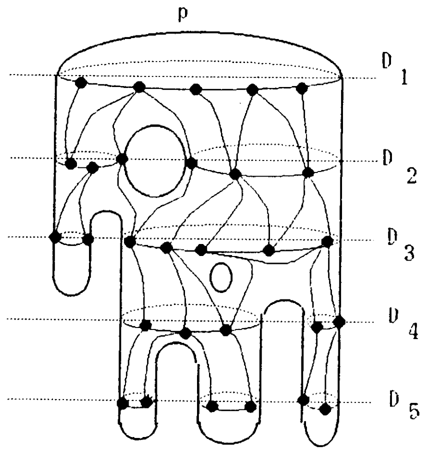


図３

曲面Fを$D_1, \cdots, D_k$にそって切り開く. できた曲面を順に$F_0, \cdots, F_k$とする. また，F_iの境界に円板を張り付けて，閉曲面にしておく. $F_0', \cdots, F_k'$とする. また，L_iによって誘導された部分グラフをH_iとする. H_iはF_i'上に埋め込まれたている. ここで，必要ならば，H_iのF_i'への埋め込みが２胞体埋め込みになるようにF_i'を変形しておく.

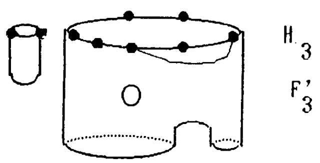


図４

［補題２］

g_i : F_i'の種数

d_i : D_iの成分の個数

w_i : 曲面F_i'の連結成分の個数

とすると，

$$\Sigma\ \{g_i+d_i-w_i : 1\leqq i\leqq k\} \leqq g$$

証明

オイラーの標数を計算することによってできる.

$\varepsilon(F)$を曲面Fのオイラーの標数とする.

$$\varepsilon(F)=\Sigma\ \{\varepsilon(F_i) : 0\leqq i\leqq k\}$$

$$\leqq 2+\Sigma\ \{\varepsilon(F'_i)-2d_i : 1\leqq i\leqq k\}$$

連結な曲面F'のオイラー標数は

$$\varepsilon(F')=2-2g(F')$$

であるから

$$\varepsilon(F)\leqq 2+\Sigma\ \{2w_i-2g_i-2d_i : 1\leqq i\leqq k\}$$

従って，

$$g(F)=2-\varepsilon(F)/2$$

$$\leqq \Sigma\ \{g_i+d_i-w_i : 1\leqq i\leqq k\}$$

である.

証明終り.

［定理３］

グラフGが種数gの曲面Fに埋め込まれているとする. 高々4g個の頂点の集合Sが存在して，G-Sは2つの外平面的グラフに分割できる.

証明

［補題２］の記号 F_i', D_i, H_i, g_i, d_i, w_iを用いる.

グラフH_iの頂点はD_i上にある. 従って，$H_i\subset F_i$'において，頂点集合はd_i個の領域で被覆されている. １. の［補題１］を用いると，高々$2(2g_i+d_i-w_i)$個の頂点からなる集合S_iが存在して，H_i-S_iは外平面的である.

また，［補題２］を用いると，

$$|\cup\ \{S_i : 1\leqq i\leqq k\}|$$

$$=\Sigma\ \{|S_i| : 1\leqq i\leqq k\}$$

$$\leqq \Sigma\ \{2(2g_i+d_i-w_i) : 1\leqq i\leqq k\}$$

$$\leqq \Sigma\ \{4(g_i+d_i-w_i) : 1\leqq i\leqq k\}$$

$$\leqq 4g$$

である. ここで$d_i\geqq w_i$を用いた.

$$G'_{odd}=\cup\ \{H_i-S_i : 1\leqq i\leqq k,\ i:\mathrm{odd}\}$$
$$G'_{even}=\cup\ \{H_i-S_i : 1\leqq i\leqq k,\ i:\mathrm{even}\}$$

とおくと，G'_{odd}, G'_{even}は共に外平面的である.

証明終り.

注意

$H_i\subset F_i$'を線形時間で求めることができる. 外領域を特定するために，用いた点pを頂点と考えて，pと外領域境界の頂点を辺で結ぶ. pを出発点とするBFSを行うと，pからの距離がiである頂点の集合がL_iになる. そして，元の$G\subset F$のrotation scheme (adjacency list) の順序にしたがって，構成したH_iのadjacency listは上記の$H_i\subset F_i$'のrotation schemeになる.

３．アルゴリズム

3.1 近似彩色

外平面的グラフの最適彩色をもとめる線形時間のアルゴリズムが知られている．例えば，[3]．そして，外平面グラフは３彩色可能である．

２の頂点の集合Sをもとめる．

G-Sを2つの外平面的グラフG'odd， G'evenに分割し，それぞれ，異なる色を用いて3色で彩色する．Sによって誘導される部分グラフの最適彩色をもとめる．

両方を合わせると高々χ(G)+6色でのGの彩色となる．

3.2 独立点集合

3.1と同様に集合Sをもとめる．G'_{odd}とG'_{even}の独立点集合を求め，位数の大きい方をIとする．このときIの位数は，Gの最大独立点数をi(G)とすると，（i(G)-4g）／2以上である．

3.3その他

同様のアルゴリズムによって，遺伝的な「パラメタ」であって，かつ外平面的グラフに制限したとき効率的なアルゴリズムが存在するようなものに対して近似アルゴリズムを構成することができる．

参考文献

[1]Baker, B.S.,Approximating for NP-complete problems on planar graphs, 24th Ann.Symp. on FOCS(1983) 265-273.

[2]Johnson, D.S., The NP-completeness Column, J.Algorithm 6,(1985), 435-451.

[3]Mitchell, S.L.,Algorithms on trees and maximal outerplanar, graphs, PhD. Thesis, Univ. Virginia, 1977.