

## 最近点距離が最大となる点分布

河関宏志† 鈴木康弘†† 榎原博之† 中野秀男†

† 大阪大学工学部  
†† 阪神電鉄(株)

2次元平面上に点が分布したとき、最も近い距離にある2点(最近点对)間の距離(最近点距離)が最大となる点分布について考察する。まず、このような点分布が満たすべき必要条件「2次元平面上に最近点距離が最大となるように点が分布すると、最近点对を構成する2点のうち少なくとも1点は他の点とも最近点对を構成する」を示し、これを満たす点分布として六角格子状分布と正方格子状分布を提案する。また、これらの点分布が円の内部に存在する時の最近点距離の最大値の上限と下限を導出し、点の数が1174点より多くなると常に六角格子状分布の方が正方格子状分布よりも最近点距離の最大値が大きくなることを示す。

## POINT DISTRIBUTIONS THAT MAXIMIZE THE DISTANCE OF THE NEAREST PAIR

Hiroshi KOUZEKI† Yasuhiro SUZUKI†† Hiroyuki EBARA† Hideo NAKANO†

† Faculty of Engineering, Osaka University  
Suita-shi, Osaka, 565, Japan

†† Hanshin Railway Co. Ltd.

We consider point distributions that maximize the distance of the nearest pair of points in the plane. At first, we show a necessary condition for such point distributions and suggest a *square distribution* and a *hexagonal distribution* as the candidates. Then we lead the upper and lower bound for the maximum distance of the nearest pair for each distribution, when points are distributed in a circle. Furthermore, we show that the hexagonal distribution always constitutes the farther maximum distance of the nearest pairs than the square distribution, when the number of points is more than 1174.

## 1 まえがき

2次元平面上に点が分布したとき、最も近い距離にある2点(最近点对)を求める問題は、計算幾何学の中で最も基本的な問題の一つである。この問題を最近点对間の距離(最近点距離)の上界値を考えるという観点からみると、2次元平面上にできる限り一様に点を分布させる問題と考えられ、等しい半径の円をできる限り密にパッキングする円の配置を求める問題と等価になる。このような最近点距離が最大となる点分布を求める問題は応用例も多く、例えば2次元における符号設計を考える際に1つの円に対し1つの符号を割り当て、決められた符号空間において符号の数を最大にしたり、ある誤り訂正能力を持った符号の数を最大にする問題に適用できる。更に、数本のワイヤーを束ねて1本のケーブルを作るとき、ケーブルの径を最小にするようなワイヤーの配置を求める問題にも適用できる。

ところで、2次元平面上に円を密にパッキングするという観点からみた場合、R.L.Graham & N.J.A.Sloaneが、2次元モーメントを最小にするような2次元平面への円のパッキング(Penny-Packing)についての考察を行なっている。[1]この文献の中で彼らは、最適なパッキングを求めるための3つのヒューリスティックな方法を示し、点の数が1から500までのそれぞれの場合に対しどの方法が良いかを実験的に示している。更に、与えられた点集合に対する2次元モーメントの下限を示し、それを証明している。

本報告では、ある領域内に点が分布したとき、最近点距離が最大となる点分布を求めるためにその点分布が満たすべき必要条件を、「2次元平面上に最近点距離が最大となるように点が分布すると、最近点对を構成する2点のうち少なくとも1点は他の点とも最近点对を構成する」として示し、最近点对が必ず2つ以上存在することを証明する。更に、最近点对を枝で結んだグラフには線度1の点が存在しないことを示し、そして、これらの条件を満たすものとして正方格子状分布と六角格子状分布を提案する。次に、 $n$ 点が半径  $R$ の円の中にこれらの点分布をしたときの、最近点距離の最大値の上限と下限を求め、点の数が174以上になると常に六角格子状分布のほうが最近点距離の最大値が大きくなることを示す。

## 2 最近点距離が最大となるための必要条件

本章では、最近点距離が最大となる点分布に対する必要条件を定理として示し、それを満たす点分布について考察する。

### 2.1 定理と証明

#### 【定理】

2次元平面上に最近点距離が最大となるように点が分布すると最近点对を構成する2点のうち少なくとも1点は他の点とも最近点对を構成する。

#### [略証]

2次元平面上に最近点距離が最大となるように点が分布した時、点Aと点Bが最近点对を構成し、点A,Bは共に別の点とは最近点对を構成しないと仮定する。今、AB間の距離を $e$ とおき直線ABをX軸、線分ABの垂直二等分線をY軸、線分ABの中点を原点Oとする。また、点Bからみて点Aの次に近い点をCとして(但し、 $AC \geq BC$ を満たす)BC間の距離を $e + \Delta e$ とすると点Cの存在範囲は図2.1の点線上である。

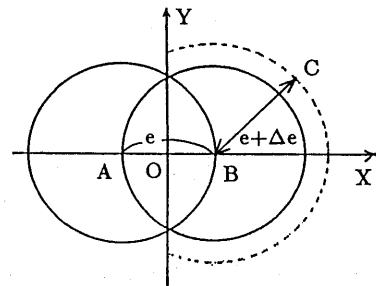


図2.1 Cの存在範囲

このとき、点Cが点線上のどこにあっても点BをX軸正方向に微小距離動かすことによってAB間の距離がBC間の距離を上回ることなく、つまりABが最近点对であるまま、最近点距離の最大値を $e$ より大きくすることができる。これは最近点距離が最大となるように点が分布していることに矛盾する。

従って、2次元平面上に最近点距離が最大となるように点が分布すると最近点を構成する2点のうち少なくとも1点は別の点とも最近点对を構成することが証明できる。

Q.E.D.

## 2.2 最近点距離が最大となる点分布

本節では、2.1節において導かれた定理をもとに最近点距離が最大となるような点分布について考察する。まず、最近点对を枝で結んだグラフ（最近点距離は $e$ とする）を考える。グラフを不連続な領域に分けることが出来る場合は明らかに最近点距離を大きくできる。（図2.2）

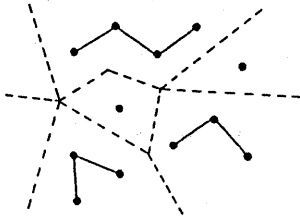


図2.2 不連続な領域に分けることのできるグラフ

また連続なグラフには次のようなものが考えられる。

- (1) グラフの中に線度が1である点が存在する（図2.3）
- (2) グラフの中に線度が1である点が存在しない（図2.4）

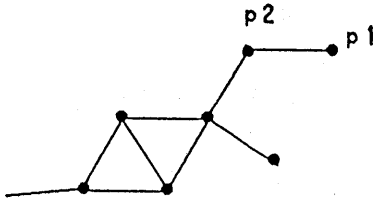


図2.3 線度が1の点が存在するグラフ

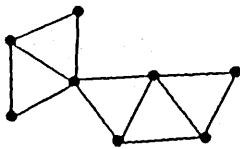


図2.4 線度が1の点が存在しないグラフ

しかし(1)の場合において線度1の点 $p1$ 、及び $p1$ と最近点对を構成する点 $p2$ に定理を適用すると $p1$ を動かすことによりその2点を結ぶ枝は長くすることができる。（図2.3）よって、枝 $p1p2$ は $e$ より大きくなるのでグラフより削除される。以下同様に考えて線度1の点につながる枝は全て削除される。よって(1)の場合は不適となる。

従って定理の条件を満たす点分布は(2)の場合、言い換えれば、線度2以上の点のみで構成されるグラフをなす点分布の場合である。そこで、そのような点分布を更に次のように場合分けする。

- 分布1 最近点距離を不変のまま新たに点を加えることができる分布（図2.5）
- 分布2 最近点对を構成しない点が存在する分布（図2.6）
- 分布3 分布1、2の条件を満たさない分布

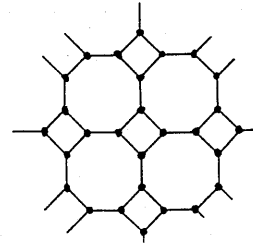


図2.5 分布1

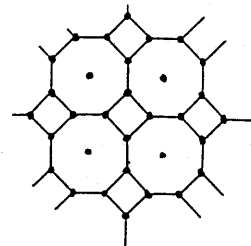


図2.6 分布2

分布1,分布2では、最近点距離が更に大きくなるように点を動かすことは可能であると思われる。よって、最近点距離が最大となる点分布は分布3に含まれると考えられる。分布3に属する点分布として、正方格子状分布（図2.7）、六角格子状分布（図2.8）の2つの分布が考えられる。

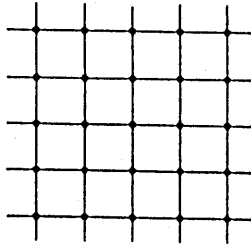


図 2.7 正方向格子状分布

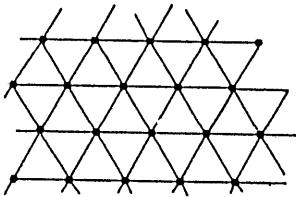


図 2.8 六角格子状分布

### 3 最近点距離の最大値の上限と下限

本章では、半径Rの円の内部にn個の点が正方向格子状に、または六角格子状に分布したとき、それぞれの最近点距離eがどのような値をとることができるかを考察し、比較を行なう。

#### 3.1 正方向格子状分布

##### [命題3.1]

半径R、原点Oの円の内部に1辺eの正方形が最大m個含まれるとする。このとき、(1)の式が導かれる。

$$\pi (R - \sqrt{2}e)^2 < m e^2 < \pi R^2 \quad (1)$$

##### [(1)式左辺の略証]

点Oを中心とする半径Rの円(円 $R_{out}$ とする)を考え、この内部に入る1辺eの正方形の個数の最大値をmとする。この正方形の集合をSとしたとき、Sが半径 $(R - \sqrt{2}e)$ の円を内部に含むことが証明できれば(1)式左辺は成立する。またSは円の内部に含まれる図形でありSの中心に対して点対称になる。そこでSの中心を円の中心に重ね、正方形の直交する2辺をX,Y座標軸と平行にして考察するが、一般性を失うことはない。次に、S

の外周をCとおきCを時計回りにたどると、線分が左折れ、右折れを繰り返しながらCを構成していることが分かる。(但し、4ヶ所においては右折れ点が2個続く)更にCを構成している線分上を時計回りに動く点 $P_C$ を考える。(図3.1)

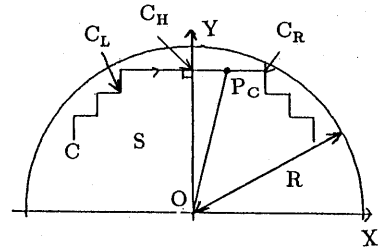


図 3.1 Sの構成

中心Oと点 $P_C$ との距離 $d(O, P_C)$ に着目すると、始点が右折れ点 $C_R$ 、終点が左折れ点 $C_L$ の、線分 $E(C_R C_L)$ 上を点 $P_C$ が動く時、距離 $d(O, P_C)$ は減少し、始点が $C_L$ 、終点が $C_R$ の線分 $E(C_L C_R)$ 上を点 $P_C$ が動くときは、 $d(O, P_C)$ は増加する。(但し、連続する $C_R$ を結ぶ線分 $E(C_R C_R)$ 上においては、 $E(C_R C_R) \perp OC_H$ となる  $E(C_R C_R)$  上の点 $C_H$ で $d(O, P_C)$ は減少から増加に転じる。) Cを接点でつながる線分の連続と考え、更に、中心Oからの距離 $d(O, P_C)$ の増減という点から線分を分類すると、表1ようになる。

表 1 Cの構成

...  $C_L \uparrow C_R \downarrow C_L$  ...  $C_L \uparrow C_R \downarrow C_H \uparrow C_R \downarrow C_L$  ...

$C_R$ : 右折れ点

$C_L$ : 左折れ点

$C_H$ :  $E(C_R C_R) \perp OC_H$ となる  $E(C_R C_R)$ 上の点

$\uparrow$ :  $d(O, P_C)$ が増加する線分

$\downarrow$ :  $d(O, P_C)$ が減少する線分

表1より、Cにおける全ての $C_L, C_H$ が中心O、半径 $(R - \sqrt{2}e)$ の円(円 $R_{in}$ とする)の外側にあるとすると、 $C_R$ の位置に関係なくCは全て  $R_{in}$ の外側に存在する。(図3.2)

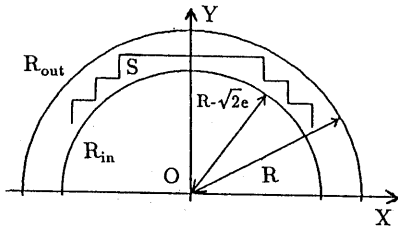


図3.2 Cの位置

そこで、図形Sにおいて $C_L$ か $C_H$ のうち1点でも円 $R_{in}$ の内側に存在するものがあつたと仮定すると、円 $R_{out}$ の中に更に正方形が存在することが容易に証明される。これは、円 $R_{out}$ の中に入れることのできる正方形の数の最大値が $m$ であることに矛盾する。従つて、 $C_L, C_H$  はすべて $R_{in}$ の外側に存在する。よつて、

$$\pi (R - \sqrt{2} e)^2 < m e^2$$

Q.E.D.((1)式左辺)

[(1)式右辺の証明]

半径 $R$ の円の内部に $m$ 個の正方形が含まれるから面積を比べると明らかに  $m e^2 < \pi R^2$  が成立する。

Q.E.D.((1)式右辺)

以上の通り(1)式

$$\pi (R - \sqrt{2} e)^2 < m e^2 < \pi R^2$$

は証明される。

Q.E.D.(命題3.1)

[命題3.2]

$m$ 個の正方形を構成する点の数 $n$ の上限、下限に関して次に示す(2)式が導かれる。

$$(\sqrt{m+1})^2 \leq n < m + 2\sqrt{2m+2} \quad (2)$$

[(2)式左辺の証明]

$m$ 個の正方形を構成する点の数を考えると点の数が最も少なくなるのは $m$ が  $m = m'^2$  ( $m'$ : 自然数) を満たしかつ、正方形が縦、横、それぞれ  $m'$ 個ずつ並んだ場合である。そのときの $n$ は  $n = (\sqrt{m+1})^2$  で表される。よつてこの場合が $n$ の下限となり  $(\sqrt{m+1})^2 \leq n$  が成立する。

Q.E.D.((2)式左辺)

[(2)式右辺の証明]

実際に円の内部に正方形が含まれる場合は図3.3の様になる。(図3.3)

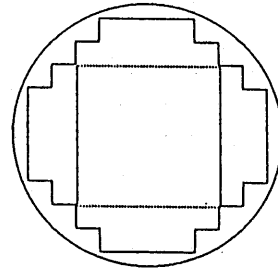


図3.3 円の内部に含まれる正方形

この時、原点 $O$ が正方形の頂点に重なるか、中心に重なるかで場合分けすることができる。(図3.4)

- (a) 原点 $O$ が正方形の頂点と重なる場合
- (b) 原点 $O$ が正方形の中心と重なる場合

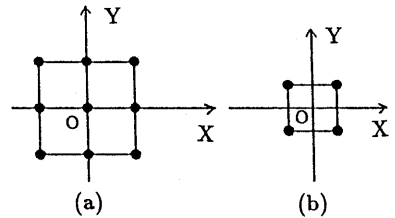


図3.4 原点Oの位置

(a)の場合

図3.4(a)の様な並び方を中心としてこの外側の辺を囲むように階段状に正方形を並べる操作を繰り返す。(図3.5)

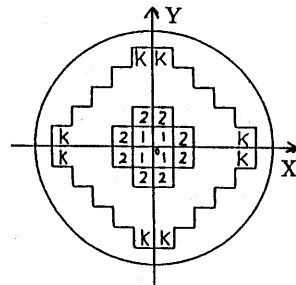


図3.5 第k層までの構成

k層並べたときの点の数nと、正方形の数mを調べると表2の様になる。

表2 第k層までの点の数(n)と正方形の数(m)

k	1	2	3	4	...	k
n	9	21	37	54	...	$2k^2 + 6k + 1$
m	4	12	24	40	...	$2k^2 + 2k$

表2より、

$$n = 2k^2 + 6k + 1$$

$$m = 2k^2 + 2k$$

が成立する。しかし、実際に最大数の正方形が円の内部に含まれるときには、この図形と円とのすき間に、更に正方形を加えてSを構成する。この正方形を加えていく操作を次のように考える。つまり点 $P_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) に対しそれぞれ正方形 $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ) を加えていく。(図3.6)

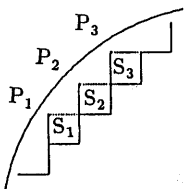


図3.6 加える点 $P_i$ と正方形 $S_i$

従って、加える点の数と正方形の数は同数となりこれをともにkの関数と考え、 $a(k)$ とおくと

$$n = 2k^2 + 6k + 1 + a(k) \quad (3)$$

$$m = 2k^2 + 2k + a(k) \quad (4)$$

となる。ここで、nとmの関係を調べる。 $a(k)$ は  $0 \leq a(k)$  を満たすので(4)より

$$m \geq 2k^2 + 2k$$

$$\therefore 8m \geq 16k^2 + 16k \quad (5)$$

(3) - (4)より

$$n - m = 4k + 1$$

$$(n - m)^2 = 16k^2 + 8k + 1$$

ここで、 $k \geq 1$ より  $8k - 1 > 0$

従って、

$$(n - m)^2 < 16k^2 + 8k + 1 + (8k - 1) = 16k^2 + 16k$$

$\therefore$ (5)より

$$(n - m)^2 < 8m$$

$$n - m < 2\sqrt{2m}$$

$$n < m + 2\sqrt{2m} \quad (6)$$

(b)の場合

(a)の場合と同様に考えて、

$$n < m + 2\sqrt{2m} + 2 \quad (7)$$

を導くことができる。

従って、(a),(b)の両方の場合をまとめると常に

$$n < m + 2\sqrt{2m} + 2$$

が成立する。

Q.E.D. ((2)式右辺)

以上の通り(2)式

$$(\sqrt{m} + 1)^2 \leq n < m + 2\sqrt{2m} + 2 \quad (2)$$

は証明される。

Q.E.D.(命題3.2)

以上で証明した(1),(2)式をまとめる。

$$\pi(R - \sqrt{2}e)^2 < me^2 < \pi R^2 \quad (1)$$

$$(\sqrt{m} + 1)^2 \leq n < m + 2\sqrt{2m} + 2 \quad (2)$$

これよりeの範囲を求めると、

$$R \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{2\pi}} < e < R \frac{\sqrt{2\pi} + \sqrt{n\pi}}{n-2} \quad (8)$$

(8)式が、正方格子状分布の場合の最近点距離eの上限と下限である。

### 3.2 六角格子状分布

【命題3.3】

原点Oを中心とする半径Rの円(円 $R_{out}$ とする)の内部に1辺eの正3角形が最大m個含まれるとする。このとき、(9)式は成立する。

$$\pi(R - e)^2 < \frac{\sqrt{3}}{4} me^2 \quad (9)$$

[略証]

円 $R_{out}$ の内部に含まれる正3角形の集合を $S$ としたとき $S$ が半径 $(R - e)$ の円を内部に含むことが証明できれば(9)式は成立する。ところで、円 $R_{out}$ の内部に正3角形が含まれる時、原点 $O$ に正3角形の頂点が存在する場合と、正3角形の重心が存在する場合とがある。(図3.7)

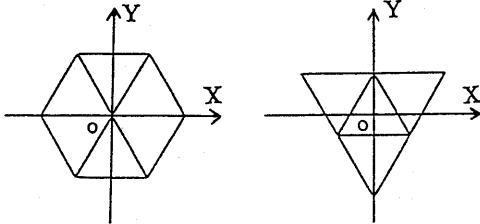


図3.7 原点Oの位置

しかし、どちらの場合にもこの証明は正方格子状分布のところで考察したのと同様の方法で証明することができる。

Q.E.D.(命題3.3)

[命題3.4]

$m$ 個の正3角形を構成する点の数の下限は(10)式のように導かれる

$$3 \left[ \sqrt{\frac{m}{6}} \right]^2 + 3 \sqrt{\frac{m}{6}} + 1 \leq n \quad (10)$$

[略証]

正3角形の頂点が原点に存在するように正3角形を並べて正6角形を作る操作を繰り返す。(図3.8) $k$ 層並べたときの点の数 $n$ と、正3角形の数 $m$ を調べると表3の様になる。

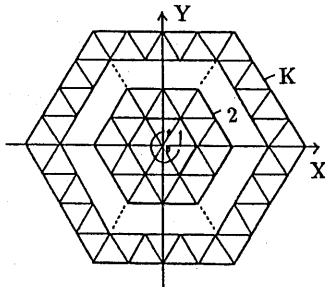


図3.8 第 $k$ 層までの構成

表3 第 $k$ 層までの点の数( $n$ )と3角形の数( $m$ )

$k$	1	2	3	4	...	$k$
$n$	7	19	37	61	...	$3k^2 + 3k + 1$
$m$	6	24	54	96	...	$6k^2$

表3より、

$$n = 3 \left[ \sqrt{\frac{m}{6}} \right]^2 + 3 \sqrt{\frac{m}{6}} + 1$$

$$\left[ \because k = \sqrt{\frac{m}{6}} \right]$$

で表される。しかし、実際に円の内部に正3角形が含まれる場合は図3.9の様に円と正6角形のすき間に更に正3角形が加わる。

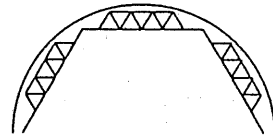


図3.9 円の内部に含まれる正3角形

よって、この場合を $n$ の下限としてが成立する。

Q.E.D. (命題3.4)

以上証明した(9),(10)式をまとめておくと

$$\pi (R - e)^2 < \frac{\sqrt{3}}{4} m e^2 \quad (9)$$

$$3 \left[ \sqrt{\frac{m}{6}} \right]^2 + 3 \sqrt{\frac{m}{6}} + 1 \leq n \quad (10)$$

これより $e$ の下限を求めると、次のようになる。

$$\frac{R}{\sqrt{\frac{\sqrt{3}(4n-1)}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} \sqrt{6\sqrt{3}\pi} + 1}}} < e \quad (11)$$

次に、 $e$ の上限を求める。まず半径 $R$ の円に外接する正6角形を考える。(図3.10)

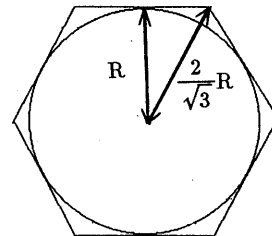


図3.10 円に外接する正6角形

この時、円の中心と正六角形の中心は一致していると考えても問題はない。正六角形の中心から頂点までの距離は  $\frac{2}{\sqrt{3}} R$  となるので、一般に半径  $R$  の円を内部に含むような正六角形を、図 3.8 のように一辺  $e$  の正三角形を  $k$  層重ねて作る場合には、 $k e > \frac{2}{\sqrt{3}} R$  を満たすような  $k$  でなければいけない。従って、このような  $k$  のうち最小のものは  $k = \lceil \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R}{e} \rceil$  すなわち

となる。従って、表 3 より

$$n < 3 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R}{e} + 1 \right)^2 + 3 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R}{e} + 1 \right) + 1$$

これを解くと  $e$  の上限が次のように得られる。

$$e < R \frac{4}{\sqrt{4n-1} - 3\sqrt{3}} \quad (12)$$

(12),(11)式が、六角格子状分布の場合の最近点距離  $e$  の上限と下限である。

### 3.3 正方格子状分布と六角格子状分布の最近点距離の最大値の比較

3.1 節, 3.2 節において正方格子状分布、六角格子状分布の最近点距離  $e$  の範囲を求めた。

正方格子状分布

$$R \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n-1} + \sqrt{2\pi}} < e < R \frac{\sqrt{2\pi} + \sqrt{n\pi}}{n-2}$$

六角格子状分布

$$R \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{3}(4n-1)}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} \sqrt{6\sqrt{3}\pi} + 1}}} < e$$

$$e < R \frac{4}{\sqrt{4n-1} - 3\sqrt{3}}$$

ここで各々の  $e$  の大きさを比較すると  $n \geq 1174$  の範囲で常に六角格子状分布の最近点距離の最大値の値の方が大きくなった。(図 3.1 1)

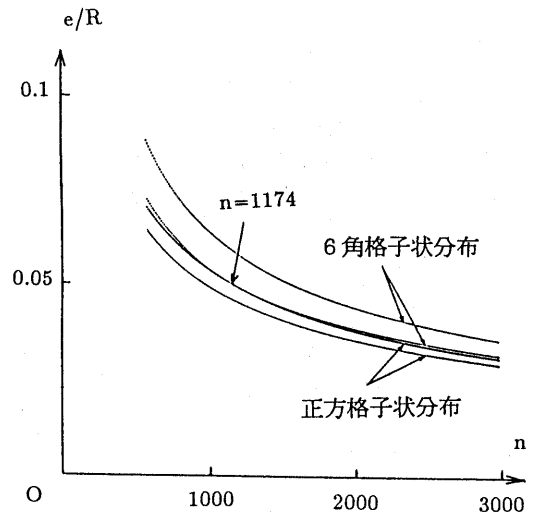


図 3.1 1 最近点距離の最大値の比較

つまり円の中に 1174 個以上の点を分布する時は六角格子状分布の方が正方格子状分布より常に最近点距離の最大値は大きくなることを証明できた。

### 4 むすび

本報告では、2次元平面上に点を分布したとき最近点距離が最大となる点分布についての考察を行ない、そのための必要条件を示した。更に、この条件を用いて最近点对を枝で結んだグラフには、線度 1 の点が存在しないことを示した。そして、これらの条件を満たす点分布として正方格子状分布と六角格子状分布を提案した。更に、これらの点分布が円の中に存在するときの最近点距離の最大値に対する上限と下限を導出し、点の数が 1174 以上になると常に六角格子状分布の方が最近点距離の最大値が大きくなることを示した。また、本報告で用いた考え方はユークリッド最小木の総枝長を最大とする点分布や、最大空円の半径を最小にする点分布を求める問題にも応用できると考えている。

### 参考文献

- [1] R.L.Graham and N.J.A.Sloane: "Penny-Packing and Two-Dimensional Codes", Discrete Comput. Geom. Vol.5, pp.1-11(1990)