

2軸多段歯車変速機構の最適設計アルゴリズム

沢田浩之

新世代コンピュータ技術開発機構

あらまし 歯車変速機構は旋盤など工作機械の主軸の変速機構として多く用いられているが、その設計問題を1種の制約充足最適化問題としてとらえ、定式化することを考える。一般の多軸多段歯車変速機構の最適設計問題の定式化の前に、まず、2軸の場合についての最適設計アルゴリズムを構築した。この問題における制約条件は、歯車の同時噛み合いの禁止条件および歯車同士の衝突禁止条件である。また、機構はその全体幅が最小であるときに最適であると定義される。本報により、2軸の場合には解の探索をすることなく最適解が得られることがわかる。さらに最後にヒューリスティクスとの関係について言及する。

THE OPTIMAL DESIGN ALGORITHM FOR A TWO AXES GEARBOX

Hiroyuki SAWADA

Institute for New Generation Computer
Technology

4-28, Mita 1-Chome, Minato-ku, Tokyo 108 JAPAN

Abstract A gearbox is used for a transmission of the main spindle of machine tools as a lathe. We regard its design problem as a kind of optimization problem under constraints and formulate the design process. Before formulation in the case of multiple axes gearbox, we construct a design algorithm for a two axes gearbox. In this problem, constraints are: no simultaneous meshing of different gear pairs, and no interference between gears. The structure of the gearbox is then optimized by minimizing of its overall width. In this case, we can get optimal solutions without searching. At the end of this paper, we refer to the heuristics.

1. はじめに

歯車変速機構は旋盤など工作機械の主軸の変速機構として多く用いられているが、その設計問題は1種の制約充足最適化問題と考えられる。

また、一般に設計問題は探索問題としての側面を備えており、並列化によって処理の高速化が期待できる。したがって、この歯車変速機構の設計問題は制約充足問題および並列処理問題の例題として適しているといえる。

一般の多軸多段歯車変速機構の最適設計問題の定式化の前に、まず、2軸多段の場合についての最適設計アルゴリズムを構築した。

本報の構成だが、まず次章で歯車変速機構の説明をした後、問題の定義を行う。そして第3章で問題解決の戦略を示し、以下第4章および第5章で戦略の具体的な検討を行う。第6章では第4章、第5章の結果を踏まえた上で評価関数の算出方法について述べる。最後に第7章で最適設計の手順について述べた後、ヒューリスティクスについての考察を行う。

2. 問題の設定

2.1 歯車変速機構^[2]

歯車変速機構の例を図1に示す。この例では第1軸および第3軸がすべり軸であり、第2軸

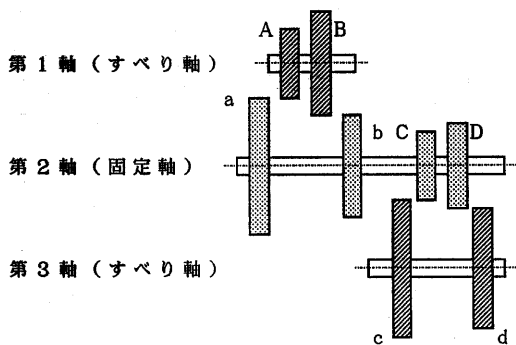


図1. 歯車変速機構

が固定軸である。噛み合う歯車の組はそれぞれアルファベットの太文字と小文字の組で表されている。

すべり軸が左右に移動することによって歯車の噛み合いが生じる。図1の例では、第1軸と第2軸との間で2段、第2軸と第3軸との間で2段の変速が生じるので合わせて $2 \times 2 = 4$ 段の変速機構となる。本報で対象とするのは2軸の変速機構であり、その変速段数は N 段とする。

2.2 問題の定義^[1]

2軸多段歯車変速機構の最適設計問題は次のように定義される。

「与えられた最適性を満足するような歯車の並びの順序関係と歯車間の適切な距離とを決定する」

ここで、最初に与えられる情報は変速段数 N のみである(*1)。

さて、次に最適性について考える。この問題では機構の全体幅をより小さくする構造をより最適な構造であると定義する(*2)。すなわち、評価関数は全体幅 w である。

また、問題に対して以下のような仮定を置く。

- 歯車の幅は全て等しく単位幅である。
- 構造の左右を逆転して互いに一致するような鏡像関係にある2つの構造は同一の構造を表す。
- 第1軸を固定軸、第2軸をすべり軸とする。

これらの仮定によって問題自体の一般性を失うことはない。

3. 問題解決の戦略

問題解決にあたってまず設定された問題を2つの部分問題に分けることを考える。まず第1段階では歯車の並びの順序を決定し、第2段階ではあたえられた順序に対して個々の歯車の位置座標を決定する。すなわち、はじめに歯車の相対的な位置関係のみを考えて、つぎに幾何的な位置座標を考える。前者の相対的な構造を位相的構造と呼び、後者を幾何的構造と呼ぶこと

(*1) 現実の設計では設計仕様として、このほかに速度比や軸間距離などが要求されるが、2軸の場合で評価関数を全体幅としたときには、必要となる情報は変速段数 N のみとなる。

(*2) 実際、変速機構を制作するための材料費や加工費、変速機構が工作機械内部でしめる空間、構造の強度剛性などが考慮されて機構の全体幅をできる限り小さくするような設計が行われている。

にする^[1]。

各段階における制約条件は、

第1段階：鏡像の排除

第2段階：同時噛み合いの禁止
歯車の衝突の禁止

である。これらについての詳細はそれぞれ位相的構造、幾何的構造の各章で述べる。

4. 位相的構造

4.1 位相的構造の表現法

位相的構造を要素数 N のベクタ^[3]を用いて表現する。要素の位置は歯車の順番を、数値はその歯車が第何段かを表す。すなわち、第 j 段歯車を左から i 番目に設置する場合、ベクタ

$$\{a_0, a_1, \dots, a_{N-1}\}$$

に対して

$$a_i = j$$

と表す。

例えば図2のような位相的構造は

$$\{a_i\} = \{2, 4, 1, 3, 5\}$$

と表現できる。

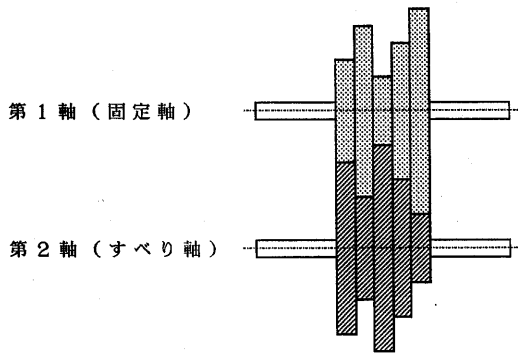


図2. 位相的構造

4.2 位相的構造の決定

位相的構造は1から N までの自然数の順列を生成させることによって決定できる。さらに

$$a_0 < a_{N-1}$$

という制約を課すことで鏡像を排除できる。

5. 幾何的構造

5.1 幾何的構造の表現法

固定軸、すべり軸ともに要素数 N のベクタに

よって表現する。要素の位置は歯車の順番を、数値は歯車の位置を表すものとし、 $\{f_i\}$ は固定軸、 $\{s_i\}$ はすべり軸を表すものとする。

例えば図3のような構造は

$$\{a_i\} = \{1, 2\}$$

$$\{f_i\} = \{0, 4\}$$

$$\{s_i\} = \{0, 1\}$$

と表現される。

当然のことながら任意の i について

$$f_{i-1} < f_i$$

$$s_{i-1} < s_i$$

が要求される。

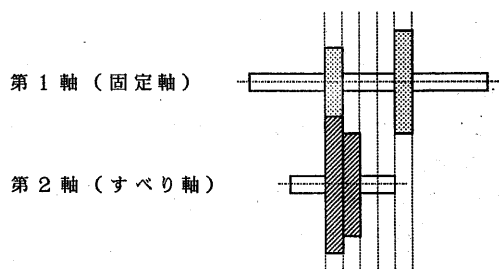


図3. 幾何的構造

5.2 制約条件

5.2.1 同時噛み合いの禁止条件

互いに異なる歯車対は同時に噛み合ってはならない。すなわち1対の歯車が噛み合っている状態から、すべり歯車をすべらせて他の1対の歯車を噛み合わせるときには、この歯車同士が接触する前にもとの歯車同士は完全に離れていなければならない。したがって、図4に示すような状態が生じることは許されない。

ここで、すべり量を表すベクタ $\{d_i\}$ を考える。 d_i は

$$d_i = f_i - s_i \quad (1)$$

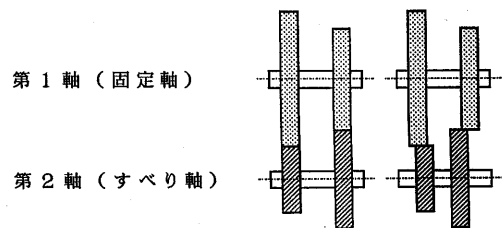


図4. 同時噛み合いの例

と定義され、 i 番目の歯車を噛み合わせるために必要なすべり量である。同時噛み合いの禁止条件とは、図5に示すようにある歯車対が噛み合っているときに他の歯車が図の点線で囲まれた範囲の内側にはないということに等しい。したがって同時噛み合いの禁止条件は次のように表現される。

$i \neq j$ のとき

$$d_i \leq d_j - 2 \quad \text{または} \quad d_j + 2 \leq d_i$$

したがって $\{d_i\}$ の要素を小さい方から並びかえたものを $\{d_i'\}$ とすると d_i' と d_{i-1}' との差は少なくとも2以上になる。

すなわち、任意の i について

$$d_{i-1}' + 2 \leq d_i' \quad (2)$$

が成り立つ。

また、ここで以降の議論を簡単にするために

$$d_0' = 0 \quad (3)$$

という仮定を導入する。もちろん、この仮定によって問題は一般性を失わない^(*)1)。

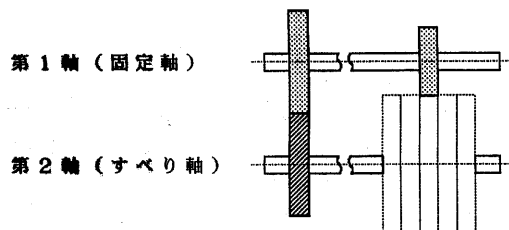


図5. 同時噛み合いの禁止条件

5.2.2 歯車同士の衝突禁止条件

固定軸上の歯車(固定歯車)とすべり軸上の歯車(すべり歯車)は互いに干渉してはならない。すなわち、図6に示すような、あるすべり歯車の移動範囲のなかに、衝突する可能性のある固定歯車が存在するようなことはあってはならない。

さて、その衝突の可能性であるが、第 i 番すべり歯車と第 j 番固定歯車は

$$a_j > a_i$$

のときに衝突の可能性がある^(*)2)。

また、すべり歯車の移動範囲は(3)の仮定により

$$[s_i, s_i + d_{N-1}']$$

である。

ゆえに、衝突の禁止条件は、歯車の幅を考慮しない場合には、次のように表される。

$$a_j > a_i \text{ のとき}$$

$$s_i + d_{N-1}' < f_j \quad \text{または} \quad f_j < s_i$$

歯車の幅が単位幅であることなどを考慮し、また、(1)から f_j を消去するとこれは以下のように書き直される。

$j > i$ に対して

$$a_j > a_i \text{ のとき}$$

$$s_j - s_i \geq d_{N-1}' - d_j + 1$$

$$a_j < a_i \text{ のとき}$$

$$s_j - s_i \geq d_i + 1 \quad (4)$$

(4)により、次の(5)が導かれる。

$a_i > a_{i-1}$ のとき

$$s_i - s_{i-1} \geq d_{N-1}' - d_i + 1$$

$a_i < a_{i-1}$ のとき

$$s_i - s_{i-1} \geq d_{i-1} + 1 \quad (5)$$

これより、

$$f_i > f_{i-1}$$

$$s_i > s_{i-1}$$

が保証される。また、(4)と(5)は等価であるので^(*)3)、衝突禁止条件としては(5)を用いることにする。

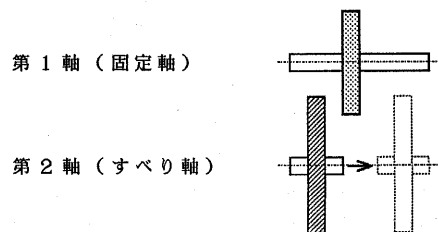


図6. 歯車同士の衝突

(*)1) この仮定はすべり歯車が最も左側の位置にあることを示すことになる。

(*)2) つまり、第 j 番固定歯車の径が第 i 番固定歯車の径より大きい場合である。

(*)3) Appendix参照。

6. 評価関数 w

6.1 評価関数 w の計算

固定歯車の占める範囲は

$$[f_0, f_{N-1}+1]$$

であり、すべり歯車の占める範囲は

$$[s_0, s_{N-1}+d_{N-1}'+1]$$

である。ゆえに機構の全体幅 w は

$$w = \max(f_{N-1}, s_{N-1}+d_{N-1}') - \min(f_0, s_0) + 1$$

で与えられるが、ここで

$$f_{N-1} \leq s_{N-1}+d_{N-1}'$$

$$f_0 \geq s_0$$

は常に成立しなければならない。なぜなら、この関係が成立しないということは第 $N-1$ 番歯車もしくは第 0 番歯車が決して噛み合わないことを意味するからである。

したがって

$$w = (s_{N-1}+d_{N-1}') - s_0 + 1 \\ = s_{N-1} - s_0 + d_{N-1}' + 1$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} (s_i - s_{i-1}) + d_{N-1}' + 1$$

$$\geq \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i + d_{N-1}' + 1 \equiv W \quad (6)$$

(等号成立は $s_i - s_{i-1} = \Delta_i$ のとき)

が得られる。

ただし、

$$\Delta_i = \begin{cases} d_{N-1}' - d_i + 1 & (a_{i-1} < a_i) \\ d_{i-1} + 1 & (a_{i-1} > a_i) \end{cases} \quad (7)$$

である。

6.2 w の下限 W に対する d_i の寄与 c_i

(6) および (7) より w の下限 W は $\{d_i\}$ によって決定することが分かる。ここで W に対する各 d_i の寄与 c_i という概念を導入し、検討を行う。

今、 $j \neq i$ なる全ての d_j の値は変化しないものとする。 W に対する d_i の寄与 c_i とは d_i により大きな値を割り当てたときに W がどのように変化するかを示すものであり、+、-、0、± の 4 種類で表され、それぞれ W の増大、減少、

無関係、無関係に対応する^(*)。

例として位相的構造 $\{a_i\}$ が

$$\{4, 5, 8, 6, 1, 7, 2, 3\}$$

の場合を取り上げて W と d_i と c_i の関係について考えてみる。

(7) から Δ_i が次のように求められる。

$$\Delta_1 = d_7' - d_1 + 1$$

$$\Delta_2 = d_7' - d_2 + 1$$

$$\Delta_3 = d_2 + 1$$

$$\Delta_4 = d_3 + 1$$

$$\Delta_5 = d_7' - d_5 + 1$$

$$\Delta_6 = d_6 + 1$$

$$\Delta_7 = d_7' - d_7 + 1$$

(6) より W の値は Δ_i の総和によって決定するので、上記の 7 つの式の両辺の和をとることを考えると各 d_i の寄与 c_i が以下のように決定される。

• d_1 および d_7 を大きくすると W は小さくなる。

$$\Rightarrow c_1 = -, c_7 = -$$

• d_3 を大きくすると W は大きくなる。

$$\Rightarrow c_3 = +$$

• d_2 および d_5 は和をとると打ち消し合って W には影響しない。

$$\Rightarrow c_2 = \pm, c_5 = \pm$$

• d_0, d_4, d_6 は W にはもともと関与しない。

$$\Rightarrow c_0 = 0, c_4 = 0, c_6 = 0$$

さて、実際に W を計算してみるとこのようになる。

$$W = \sum_{i=1}^7 \Delta_i + d_7' + 1$$

$$= \sum_{c_i = \pm} (d_i' + 2) + \sum_{c_i = +} (d_i + 1)$$

$$+ \sum_{c_i = -} (d_i' - d_i + 1) + d_7' + 1$$

以上の例から分かるように c_i と W に関して次のようにまとめられる。

$$a_0 < a_1 \Rightarrow c_0 = 0$$

(*) 寄与 c_i はほぼ偏微分 $\partial W / \partial d_i$ に当たるものと考えてよいが、違いは $\partial W / \partial d_i = 0$ の場合を 2 つに分けている点である。

$$\begin{aligned}
a_0 > a_1 & \Rightarrow c_0 = + \\
a_{N-2} < a_{N-1} & \Rightarrow c_{N-1} = - \\
a_{N-2} > a_{N-1} & \Rightarrow c_{N-1} = 0 \\
a_{i-1} < a_i < a_{i+1} & \Rightarrow c_i = - \\
a_{i-1} > a_i > a_{i+1} & \Rightarrow c_i = + \\
a_{i-1} < a_i > a_{i+1} & \Rightarrow c_i = \pm \\
a_{i-1} > a_i < a_{i+1} & \Rightarrow c_i = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W = \sum_{\sigma_i = \pm} (d_{N-1}' + 2) + \sum_{\sigma_i = +} (d_i + 1) \\
+ \sum_{\sigma_i = -} (d_{N-1}' - d_i + 1) + d_{N-1}' + 1 \quad (8)
\end{aligned}$$

また、寄与 c_i が +、-、0、± となるような d_i の個数をそれぞれ N_+ 、 N_- 、 N_0 、 N_{\pm} とすれば以下の関係がある。

$$N_+ + N_- + 2N_{\pm} = N - 1 \quad (9)$$

7. 最適設計

7.1 $\{d_i\}$ の決定

本節では $\{a_i\}$ および $\{d_i'\}$ が与えられたときの最適な $\{d_i\}$ の決定の仕方について述べる。

$\{a_i\}$ が与えられると $\{c_i\}$ が決定する。(8) より、与えられた d_i' のうちで小さいものを $c_i = +$ となるような d_i に、大きなものを $c_i = -$ となるような d_i に割り当てれば W は最小となることがわかる。

7.2 $\{d_i'\}$ の決定

(2) および (3) より

$$\sum_{\sigma_i = +} (d_i + 1) \cong \sum_{i=1}^{N_+} (2i - 1)$$

$$\sum_{\sigma_i = -} (d_{N-1}' - d_i + 1) \cong \sum_{i=1}^{N_-} (2i - 1)$$

が成立する。ただし等号成立は

$$d_i' = 2i \quad (10)$$

かつ

$\{d_i\}$ を前節で述べた方法で決定したときである。

ゆえに (8) より

$$W = \sum_{\sigma_i = \pm} (d_{N-1}' + 2) + \sum_{\sigma_i = +} (d_i + 1)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\sigma_i = -} (d_{N-1}' - d_i + 1) + d_{N-1}' + 1 \\
& \cong \sum_{i=1}^{N_+} (2i - 1) + \sum_{i=1}^{N_-} (2i - 1) \\
& + 2N_{\pm}N + 2(N - 1) + 1 \quad (11)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

すなわち、 $\{d_i'\}$ を (10) のように決定すれば W は最小となる。

7.3 $\{a_i\}$ の決定

(9) より

$$N_+ + N_- = N - 1 - 2N_{\pm}$$

が得られる。これと (11) により次の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned}
W \cong \sum_{i=1}^{N_+} (2i - 1) + \sum_{i=1}^{N_-} (2i - 1) \\
+ 2N_{\pm}N + 2(N - 1) + 1
\end{aligned}$$

$$= N_+^2 + N_-^2 + 2N_{\pm}N + 2(N - 1) + 1$$

$$= [(N_+ + N_-)^2 + (N_+ - N_-)^2] / 2 + 2N_{\pm}N + 2N - 1$$

$$= [(N - 1)^2 + (N_+ - N_-)^2] / 2 + 2N - 1 + 2N_{\pm} + 2N_{\pm}^2$$

$$\cong \begin{cases} [(N - 1)^2 + 1] / 2 + 2N - 1 & (N \text{ が偶数のとき}) \\ (N - 1)^2 / 2 + 2N - 1 & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

等号は

$$N_{\pm} = 0$$

$$|N_+ - N_-| = \begin{cases} 1 & (N \text{ が偶数のとき}) \\ 0 & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

のときに成り立つ。

したがって $\{a_i\}$ を次のように決定すれば W は最小となる。

N が偶数のとき

$$a_0 > \cdots > a_{N/2-1} < a_{N/2} < \cdots < a_{N-1}$$

または

$$a_0 > \cdots > a_{N/2-1} > a_{N/2} < \cdots < a_{N-1}$$

N が奇数のとき

$$a_0 > \cdots > a_{(N-1)/2} < \cdots < a_{N-1} \quad (12)$$

7.4 最適設計の手順

以上に述べた手順は次のようにまとめられる。

[1] (12)にしたがって $\{a_i\}$ を決定する。

[2] $\{a_i\}$ から $\{c_i\}$ を求める。そして0から $2(N-1)$ までの偶数の中から $c_i = +$ となるような d_i に対しては小さい数を、 $c_i = -$ となるような d_i に対しては大きい数を割り当てる。

$$[3] \begin{cases} a_{i-1} < a_i \text{ のとき} \\ \quad s_i - s_{i-1} = 2N - d_i - 1 \\ a_{i-1} > a_i \text{ のとき} \\ \quad s_i - s_{i-1} = d_i - 1 \end{cases}$$

にしたがって $\{s_i\}$ を決定する。このとき $s_0 = 0$ として一般性を失わない。

[4] $f_i = s_i + d_i$ により $\{f_i\}$ を決定する。

また、機構の全体幅 w は

$$w = \begin{cases} [(N-1)^2 + 1] / 2 + 2N - 1 & (N \text{ が偶数のとき}) \\ (N-1)^2 / 2 + 2N - 1 & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

で与えられる。

7.5 設計例

設計例として4段変速機構の場合を考える。

[1] $\{a_i\}$ の選び方としては

$$\{2, 1, 3, 4\}$$

$$\{3, 1, 2, 4\}$$

$$\{3, 2, 1, 4\}$$

の3通りが考えられる。

[2] $\{c_i\}$ は次のように求められる。

$$\{2, 1, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow \{c_i\} = \{+, 0, -, -\}$$

$$\{3, 1, 2, 4\}$$

$$\Rightarrow \{c_i\} = \{+, 0, -, -\}$$

$$\{3, 2, 1, 4\}$$

$$\Rightarrow \{c_i\} = \{+, +, 0, -\}$$

したがって $\{d_i\}$ は

$$\{c_i\} = \{+, 0, -, -\} \text{ のとき}$$

$$\{d_i\} = \{0, 2, 4, 6\},$$

$$\{0, 2, 6, 4\}$$

$$\{c_i\} = \{+, +, 0, -\} \text{ のとき}$$

$$\{d_i\} = \{0, 2, 4, 6\},$$

$$\{2, 0, 4, 6\}$$

[4] $\{s_i\}$ および $\{f_i\}$ がこのように求められる。

$$\{a_i\} = \{2, 1, 3, 4\},$$

$$\{3, 1, 2, 4\} \text{ のとき}$$

$$\{d_i\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$\Rightarrow \{s_i\} = \{0, 1, 4, 5\}$$

$$\{f_i\} = \{0, 3, 8, 11\}$$

$$\{d_i\} = \{0, 2, 6, 4\}$$

$$\Rightarrow \{s_i\} = \{0, 1, 2, 5\}$$

$$\{f_i\} = \{0, 3, 8, 9\}$$

$$\{a_i\} = \{3, 2, 1, 4\} \text{ のとき}$$

$$\{d_i\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$\Rightarrow \{s_i\} = \{0, 1, 4, 5\}$$

$$\{f_i\} = \{0, 3, 8, 11\}$$

$$\{d_i\} = \{2, 0, 4, 6\}$$

$$\Rightarrow \{s_i\} = \{0, 3, 4, 5\}$$

$$\{f_i\} = \{2, 3, 8, 11\}$$

図7に

$$\{a_i\} = \{3, 1, 2, 4\}$$

$$\{s_i\} = \{0, 1, 2, 5\}$$

$$\{f_i\} = \{0, 3, 8, 9\}$$

の変速機構を示す。

第1軸 (固定軸)

第2軸 (すべり軸)

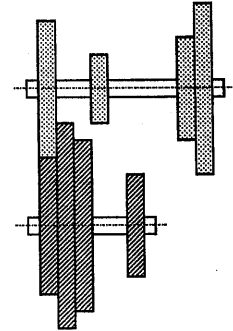


図7. 設計例

7.6 最適解の個数について

(12) により最適解を与える $\{a_i\}$ は

$$\begin{cases} \frac{(N-1)!}{(N/2)!(N/2-1)!} & (N \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{(N-1)!}{2[(N-1)/2]![(N-1)/2]!} & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

通りある。

また、 $\{a_i\}$ および $\{d_i\}$ が与えられたもとでの最適な $\{d_i\}$ は

$$N_+!N_-! (N_0+N_\pm)!$$

通りある。

したがって最適解は全部で

$$\begin{cases} (N-1)! & (N \text{ が偶数のとき}) \\ (N-1)!/2 & (N \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

通りある。

7.7 ヒューリスティクスについての考察

歯車変速機構の最適設計法にはつぎのようなヒューリスティクスが存在する。

- 歯車間のスペースは固定軸上に優先的に挿入する。それだけでは同時噛み合いの禁止条件や歯車同士の衝突禁止条件が満たされない場合に限り、すべり軸上にスペースを挿入する。

本節ではこのヒューリスティクスについて考察してみる。

上記のヒューリスティクスを式で表現すると

$$f_i - f_{i-1} > s_i - s_{i-1}$$

のように書き表される。ゆえに(1)より、

$$d_i > d_{i-1}$$

が導かれ、結局このヒューリスティクスは d_i を i について単調増加にとることに等しい。したがって与えられた位相的構造のもとで、このヒューリスティクスによって最適解に到達する場合というのは、例えば

$$\{c_i\} = \{+, +, 0, \pm, 0, -\}$$

のように $\{c_i\}$ の中で、+、0 (または \pm)、- が左側から順序よくなる限りに限られる。

8. 結論および今後の課題

2軸多段歯車変速機構の最適設計アルゴリズムについて報告した。さらにその最適解の個数、ならびにヒューリスティクスとの関係について考察した。今後、これをもとに一般の多軸多段変速機構の場合について議論を拡張していく予定である。

9. 謝辞

本研究を行うにあたり多くの助言をいただいた ICOT 第4研究室の川岸主任研究員、寺崎研究員、Burg 研究員、東芝の永井氏に深く感謝いたします。また、問題と貴重な資料を提供してく

ださった機械技術研究所の堀内氏にこの場を借りてお礼申し上げます。さらに、研究の機会を与えてくださった ICOT の生駒部長代理、長谷川部長代理ならびに相場室長代理に深く感謝いたします。

【参考文献】

1. 堀内英一：歯車変速機構の構造設計問題 - 設計問題に対する制約問題解決に基づくアプローチ：拡張版-，(1990)
2. 岡本定次：増補版 工作機械の構成 (内田老鶴園)，(1977)
3. 新世代コンピュータ技術開発機構：KL1 プログラミング，(1989)

Appendix.

(4) と (5) が等価であることを示す。ここで

$$(4) \Rightarrow (5)$$

は明らかであるので

$$(5) \Rightarrow (4)$$

を示せばよい。

数学的帰納法を用いる。今、ある $j > i$ に対して (4)、すなわち

$$s_j - s_i \geq d_{N-1}' - d_j + 1 \quad (a_j > a_i)$$

$$s_j - s_i \geq d_i + 1 \quad (a_j < a_i)$$

(a)

が成立しているものとする。これと (5)、すなわち

$$s_{j+1} - s_j \geq d_{N-1}' - d_{j+1} + 1$$

$$(a_{j+1} > a_j)$$

$$s_{j+1} - s_j \geq d_j + 1$$

$$(a_{j+1} < a_j)$$

(b)

から、

$$s_{j+1} - s_i \geq d_{N-1}' - d_{j+1} + 1$$

$$(a_{j+1} > a_i)$$

$$s_{j+1} - s_i \geq d_i + 1$$

$$(a_{j+1} < a_i)$$

(c)

を導けばよい。

(I) $a_{j+1} > a_j > a_i$ または $a_{j+1} < a_j < a_i$
 のとき

(a)、(b) の第 1 式同士、第 2 式同士の両辺の和をとることにより、

$$\begin{aligned} S_{j+1} - S_i & \\ & \geq d_{N-1}' - d_{j+1} + 1 + d_{N-1}' - d_j + 1 \\ & \geq d_{N-1}' - d_{j+1} + 1 \end{aligned} \quad (a_{j+1} > a_j > a_i)$$

$$\begin{aligned} S_{j+1} - S_i & \\ & \geq d_i + 1 + d_j + 1 \\ & \geq d_i + 1 \end{aligned} \quad (a_{j+1} < a_j < a_i)$$

が得られ、(c) が導かれる。

(II) $a_{j+1} < a_j > a_i$ または $a_{j+1} > a_j < a_i$
 のとき

(a) の第 1 式と (b) の第 2 式、(a) の第 2 式と (b) の第 1 式の両辺の和をとることにより、

$$\begin{aligned} S_{j+1} - S_i & \\ & \geq d_{N-1}' + 2 \\ & \geq \max(d_{N-1}' - d_{j+1} + 1, d_i + 1) \end{aligned} \quad (a_{j+1} < a_j > a_i)$$

$$\begin{aligned} S_{j+1} - S_i & \\ & \geq d_{N-1}' - d_{j+1} + 1 + d_i + 1 \\ & \geq \max(d_{N-1}' - d_{j+1} + 1, d_i + 1) \end{aligned} \quad (a_{j+1} > a_j < a_i)$$

が得られ、(c) が導かれる。

以上 (I) および (II) により

$$(5) \Rightarrow (4)$$

が導かれ、(4) と (5) が等価であることが示された。