自動証明において自然な三段論法を導入するアルゴリズム

（LKの（LJ＋排中律）変換アルゴリズムの1つとその応用）

大芝 猛
名古屋工業大学

1階述語論理の論理式Aが妥当性を肯定的に検証されるとき得られるguide情報を利用するならば，証明図(LK型)を試行錯誤なくかき上げるアルゴリズムをすでに提示したが，更に人間の理解しやすい証明形式(NK等)へ変換するアルゴリズムを連結し，自然な証明を一貫した自動証明手続きで得ることへのアプローチを問題とする．このとき完成した前者に続き，後者のLK→NK変換の結果が内容的にも自然なものとするため，まずLKから(LJ＋排中律)体系への変換を行うアルゴリズムを提示した。LKの推論の要素は $A_1 \& \cdots \& A_m \Rightarrow B_1 \text{ or } \cdots \text{ or } B_n$ の意味をもつsequent形式で，右辺が $n \geq 2$ のとき理解しにくい。これを右辺が $n \leq 1$ のLJ型sequentからなる証明図にいったん分解し，排中律の拡張を用いて再び結合することによりアルゴリズムを実現したが，このとき，人間の証明としても自然な三段論法が導入される。

Syllogism in automatic theorem proving

A convert algorithm LK to (LJ + exclusive middle)

Takeshi Oshiba
Nagoya Institute of Technology
Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 〒466

A convert algorithm LK to (LJ+exclusive middle) and its application to automatic theorem proving are discussed. In LK system, inference rules for sequents of the form $A_1,\cdots,A_m \rightarrow B_1,\cdots,B_n (n \geq 2)$ is different from human reasonig. In fact, it is difficult to translate directly LK-proofs into proofs on natural deduction system such as NK. Then we present an algorithm which converts an arbitrary LK-proof to a proof which consists of LJ-sequents whose right side has at most one formula. In application of this algorithm, decreasing process of the number of right side formulas, derives naturally syllogisms whose cut formulas are generalized exclusive middles.

0. まえがき

文献[1],[2]において，1階述語論理の与えられた論理式A_0に対し，妥当性検証手続を適用し，もし肯定的に終了するときは，そのとき得られるguide情報を利用し，"$\to A_0$"に到るcut-freeなLK証明図を試行錯誤なく書き上げるアルゴリズムを提示した。そして更に続けて，このLK証明図をNK等を用いた自然な証明に変換する一貫した自動証明を目的とする。このとき問題となるのは，LK証明図の要素が $A_1,\cdots,A_m \to B_1,\cdots,B_n$ のように一般に右辺も複数個のsequent ($A_1 \& \cdots \& A_m \Rightarrow B_1$ or $\cdots$ or B_nの意味をもつ)で，各段階のLK推論が必らずしも自然でないことである。そこでLK証明図を"右辺が高々1つのLJ型sequent"と"排中律"および"LJ型cut(≡三段論法)"を用いる証明図(LJ+(排中律)型)に変換するアルゴリズムの1つを,自然な証明に読みとる意図の下に提示する。(これからNK証明図への変換は自然に行われる。)

1. 変換アルゴリズムの主旨

(1) 論理式A_0に対し，まえがきに述べたように"妥当性検証手続・証明図作成アルゴリズム"によって得られた"$\to A_0$"に到るLK証明図は最終sequentは→の右辺に唯1つの論理式A_0をもつにかゝわらず，証明図の中間には右辺に複数個の論理式をもつ非LJ型sequentが一般には現われる。そしてその原因は次の4種の非LJ型推論によって，右辺の論理式が上から下へ減少するからである：

cont. right
$$\frac{\Gamma \to \Delta, B, B}{\Gamma \to \Delta, B} \qquad (|\Delta| \geqq 0)$$

非LJ型 ¬-left
$$\frac{\Gamma \to \Delta, B}{\neg B, \Gamma \to \Delta} \qquad (|\Delta| \geqq 1)$$

非LJ型 ⊃-left
$$\frac{\Gamma \to \Delta, B \quad C, \Gamma \to \Delta}{B \supset C, \Gamma \to \Delta} \qquad (|\Delta| \geqq 1)$$

非LJ型 cut
$$\frac{\Gamma \to \Delta, B \quad B, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \qquad (|\Delta| \geqq 1)$$

そこで，(LJ+排中律)証明図への変換アルゴリズムは，まず"$\to A_0$"に到るLK証明図から上記4種の右辺減少推論すべてを除き，結果としてLJ型sequentのみをもつ"$\to A_0$"に到る証明図へ変換しようとする。そしてこの変形消去の過程で"排中律の拡張としての $\to E \vee E'$ ($E' \equiv \neg E$)なる始式sequent"と,そのcut推論(≡三段論法)による消去が自然な形で現われてくる。そのため,この過程ではLKを拡張したLK*[=(LK+($\to E \vee E'$型公理))体系]が用いられ，変換の結果得られた証明図は"$B \to B$型の始式公理"と"$\to E \vee E'$型の始式公理"から"LJ推論"を用いて$\to A_0$に到るLJ*:(LJ+($\to E \vee E'$))証明図となる。そして更に，$\to E \vee E'$の(LJ+排中律)証明図を公理$\to E \vee E'$の上に加えるならば，最終結果として"$\to A_0$"の(LJ+排中律)証明図を得ることが出来る。但し自然な見やすい証明というときは，この最終の結合を行わず"$\to A_0$に到る(LJ+($\to E \vee E'$))証明"までとし，別途"$\to E \vee E'$と$\to E' \equiv \neg E$が証明可能であること"を付記する方がよいと考えられる。

(2) 右辺減少非LJ型推論の消去に用いるlemma

前項で述べた非LJ型推論の消去には，これらの推論の上式で右辺に複数個の論理式をもつsequentから,右辺に唯1つの論理式をもつsequentを分離し，これに到る証明図を次のlemmaを用いて当初与えられた証明図から一たん分離し，その上で前述の非LJ型でない推論で，再び合流結合する方法をとる。

[Lemma] $\vdash_{LK^*} \Gamma \to \Delta \cdots \circledast_1$ なるとき$\Gamma \to \Delta$を2つのsequent $\Phi \to \Psi$, $\Theta \to \Sigma$に分離する。($\Phi \subseteq \Gamma$, $\Psi \subseteq \Delta$; $\Theta = \Gamma - \Phi$, $\Sigma = \Delta - \Psi$)。このとき互にdualなE, E'($\equiv \neg E$)があって，$\vdash_{LK^*} E, \Phi \to \Psi \cdots \circledast_2$, $\vdash_{LK^*} E', \Theta \to \Sigma \cdots \circledast_3$ となる。更にこれは$\circledast_1$に到る証明図$\mathbb{P}$から$\circledast_2$,$\circledast_3$に到る証明図$\mathbb{Q}$,$\mathbb{R}$を作成する変換として，次の(i)(ii)をみたすよう構成される：

(i) "非LJ型の(¬ *left*, ⊃ *left*, *cut*) 推論は存在しない" という性質は保存される。
(ii) "*contraction-right* の個数は $\mathbb{P}$ 内の合計と $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ 内の合計が等しい。"

(3) 上述の *lemma* を用いる非LJ型推論の消去の考え方を(才2段)の *contraction-right* の場合について説明しよう。但し、(才1段)でやはり *lemma* を用いて、非LJ型の(¬-*left*, ⊃-*left*, *cut*)は消去ずみとする。このとき "$\to A_0$" に到る証明図の最下の *contraction-right* (I) は次の形をしている。

$$\mathbb{P}_0\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}\left\{\dfrac{\Gamma\to B, B}{\Gamma\to B}\right.(\mathrm{I}) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0\end{array}\right.$$

この上式 "$\Gamma\to B, B$" を "$\to B$" と "$\Gamma\to B$" に分離する。$\Gamma\to B, B\cdots\circledast$ に到る証明図 $\mathbb{P}$ (才1段から非LJ ¬-*left*, ⊃-*left* なし) に対し、(*lemma*) から *dual* な E, E' があって、"$E\to B\cdots\circledast_1$ に到る証明図 $\mathbb{Q}$" "$E', \Gamma\to B\cdots\circledast_2$ に到る証明図 $\mathbb{R}$" が構成される。そして (i) から $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ にも "非LJ型 ¬-*left*, ⊃-*left* なし" の性質は受けつがれ、(ii) から、*contraction-right* の個数は $\mathbb{P}$ の個数と変らない。

$$\mathbb{P}_0'\left\{\begin{array}{c} \dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\{\text{増}\ left,\ \text{換}\ left\}\ \dfrac{\mathbb{Q}\{E\to B\cdots\circledast_1}{E,\Gamma\to B} \qquad E',\Gamma\to B\cdots\circledast_2\}\mathbb{R}}{E\vee E',\Gamma\to B}(\vee\text{-}left)}{\Gamma\to B}(LJ\text{-}cut) \\ \vdots \\ \to A_0\end{array}\right.$$

従って、左図のように、排中律的公理 $\to E\vee E'$ を用い I を消去するならば、証明図全体 $\mathbb{P}_0'$ としては *contraction-right* の個数は 1 つ減少する。この過程を下方の *contraction-right* から順次適用すれば、それらのすべての消去が可能である。

(4) こゝに、$E'\equiv\neg E$ であることから、$\to E\vee E'$ は排中律を意味すると考え、"$\circledast_1$ および $\circledast_2$ に到る $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ は "$E, \neg E$ のそれぞれの場合に分けて $\Gamma\to B$ を証明する" ことを意味し、更に "従って、常に $\Gamma\to B$ が成立する" と通常推論をすゝめることに対応する。この意味でこゝに導入される "*cut*" も自然と考えられる。
更に "$\to E\vee E'$" 自体の証明を (LJ + 排中律) = $LJ^{\oplus}$ 体系で作成しうるので、これをすでに (3) 項に述べた (LJ + ($\to E\vee E'$)) 証明図作成と結合し、$LJ^{\oplus}$ への変換アルゴリズムも得る。

2. *sequent* 分離に対応する証明図分離の *lemma*

主旨の項に述べた非LJ型推論消去に用いる *lemma* を明確に記述し、その証明を与えるために、まず若干の記法を導入する。

。 $\Gamma\to\Delta$ に到る LK^* 証明図とは $A_i\to A_i$ $(i=1,\cdots,k)$, $\to E_j\vee E_j'$ $(j=1,\cdots,l)$ なる形の公理 *sequent* を最上部にもち、途中は LK 推論によって $\Gamma\to\Delta$ を導びく *sequent* の樹状堆積である。(LJ^* 証明図の定義は上記記述の LK を LJ に変えて得られる。)

。また、$\Gamma\to\Delta$ に到る証明図 $\mathbb{P}$ を $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$、または次のように略記する。

$$\mathbb{P}\left\{\begin{array}{c} A_i\to A_i\ (i=1,\cdots,k)\quad \to E_j\vee E_j'\ (j=1,\cdots,l) \\ \hline \Gamma\to\Delta\end{array}\right. \qquad\qquad \mathbb{P}\left\{\begin{array}{c} \vdots \\ \hline \Gamma\to\Delta\end{array}\right.$$

更に最下の推論 (I) に注目するときは、非分岐、分岐(2分岐まで)に従って、

$$\mathbb{P}\left\{(\mathrm{I})\dfrac{\Gamma_1\to\Delta_1}{\Gamma\to\Delta}\right. \quad \text{または} \quad \mathbb{P}\left\{(\mathrm{I})\dfrac{\Gamma_1\to\Delta_1 \qquad \Gamma_2\to\Delta_2}{\Gamma\to\Delta}\right. \quad \text{とかく。}$$

（公理 sequent はそれ自身を最下の sequent とする証明図である。）

。 <u>$\Gamma\to\Delta$ に到る演繹図</u> とは 最上部に必らずしも公理ではない sequent $\Gamma_1\to\Delta_1, \cdots, \Gamma_k\to\Delta_k$ をもち，途中は LK^* の推論により最下の $\Gamma\to\Delta$ に到る sequent の樹状堆積図である。（$\Gamma\to\Delta$ 目体も1つの演繹図といえる。）

演繹図一般を $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \cdots$ 等で表し，証明図同様下のように記述する。

$$\mathcal{P}\left\{\begin{array}{c}\Gamma_1\to\Delta_1, \qquad \Gamma_k\to\Delta_k \\ \\ \hline \Gamma\to\Delta\end{array}\right. , \qquad \mathcal{P}\left\{\begin{array}{c} \\ \hline \Gamma\to\Delta\end{array}\right. , \qquad \mathcal{P}(\Gamma\to\Delta)$$

。 <u>sequent $\Gamma\to\Delta$ の分離</u>

$\Gamma\to\Delta$ なる sequent に対し $\Phi\subseteq\Gamma$, $\Psi\subseteq\Delta$; $\Theta=\Gamma-\Phi$ $\Sigma=\Delta-\Psi$ なるとき 1対 sequent $\Phi\to\Psi$; $\Theta\to\Sigma$ を $\Gamma\to\Delta$ の $(\Phi\to\Psi)$ による分離と呼び，

$\Gamma\to\Delta=(\Phi\to\Psi ; \Theta\to\Sigma)$ 等で表わす。

。 <u>LK^* 証明図 $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ の $\Phi\to\Psi$ による分離，（$\Phi\subseteq\Gamma$, $\Psi\subseteq\Delta$）</u>

証明図 $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ の最下の sequent の分離 $\Gamma\to\Delta=(\Phi\to\Psi ; \Theta\to\Sigma)$ について，"$\Phi\to\Psi$ の論理式とその先祖[(*)]の論理式"を残してうる演繹図を $\mathcal{Q}(\Phi\to\Psi)$ とし，"$\Phi\to\Psi$ の論理式とその先祖の論理式"を除いてうる演繹図を $\mathcal{R}(\Theta\to\Sigma)$ とかく。このようにして得られた1対の演繹図を $\mathbb{P}$ の $\Phi\to\Psi$ による分離と呼び，

$\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]=(\mathcal{Q}(\Phi\to\Psi) ; \mathcal{R}(\Theta\to\Sigma))$ 等とかく。

[註][(*)] ある論理式の"<u>先祖の論理式</u>"の定義は <u>LKの推論図</u>と共に <u>Appendix</u> に記載した。

。 <u>LJ の sequent</u> とは $\Gamma\to\Delta$, $|\Delta|\leqq 1$ なる sequent をいう。但し $|\Delta|$ は Δ 内の論理式の個数を表わす

。 <u>LJ の推論</u> とは"LK の推論"のうち各 sequent が LJ の sequent であるものをいう（従って LK の contraction-right, exchange-right 等は LJ にはない。）

。 LJ の証明図，LJ の演繹図 とは LK のそれらのうち，sequent が LJ のそれであるものをいう。（従って各推論も LJ の推論に限る。）

次に，II で述べた lemma を若干一般化した形で再掲し，その証明を行う。

[<u>lemma</u>] 『LK^* 証明図 $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ が与えられたとき，最下の sequent の分離 $\Gamma\to\Delta=(\Phi\to\Psi ; \Theta\to\Sigma)$ に対し，ある1対の dual な論理式 E, $E'(\equiv\neg E)$ があって，2つの LK^* 証明図 $\mathbb{Q}[E, \Phi\to\Psi]$, $\mathbb{R}[E', \Theta\to\Sigma]$ を構成しうる 更に (イ) $\mathbb{P}$ から $(\mathbb{Q} ; \mathbb{R})$ の作成を変換とみるとき，増加する非 LJ 型推論は，高々 weakening-right と exchange-right のみである。』

［従って，(i) 非 LJ 型 $\neg$-left，非 LJ 型 $\supset$-left，非 LJ 型 cut がないという性質は保存され，(ii) $\mathbb{P}$ における contraction-right の数と $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ における それらの数の和は等しい。］

（証明）$\Gamma\to\Delta$ の分離（$\Phi\to\Psi ; \Theta\to\Sigma$）に対し，$LK^*$ 証明 $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ における $\Phi\to\Psi$ の先祖からなる演繹図を $\mathcal{Q}(\Phi\to\Psi)$，$\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ から $\mathcal{Q}(\Phi\to\Psi)$ を除いてうる演繹図を $\mathcal{R}(\Theta\to\Sigma)$ とする。これら2つの分離演繹図 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ を modify して目的の証明図 $\mathbb{Q}[E, \Phi\to\Psi]$, $\mathbb{R}[E', \Theta\to\Sigma]$ を構成しうることを，証明図 $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ の高さに関する帰納法で示す。但し樹形証明図 $\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta]$ の高さ $h(\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta])$ とは $\Gamma\to\Delta$ の上部のすべての枝について，それらの推論の個数の最大値をいう。

1　$h(\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta])=0$ のとき：　$\Gamma\to\Delta$ は公理故 $B\to B$ または $\to E^{\vee}E'$ form.

(1-1)　$\Gamma\to\Delta = B\to B$ のとき：このとき，分離$(\Phi\to\Psi;\ \Theta\to\Sigma)$は次の 1)〜4) の場合に分れる．それぞれの場合の $E,\Phi\to\Psi$，$E',\Theta\to\Sigma$ を次のように定める．

	$\Phi\to\Psi$	$E,\Phi\to\Psi$	$E',\Theta\to\Sigma$
1)	$B\to B$	$t, B\to B$	$f\ \to$
2)	$B\to$	$\neg B, B\to$	$B\to B$
3)	$\to B$	$B\to B$	$\neg B, B\to$
4)	$\to$	$f\ \to$	$t, B\to B$

(但し，t, f はそれぞれ $\neg B^{\vee}B$, $\neg B\wedge B$ 等としてもよい．)

それぞれの場合 $E,\Phi\to\Psi$，$E',\Theta\to\Sigma$ に到る LJ 証明図(従って LK* 証明図)を作りうる。また非NJ型推論なしのため(ハ)も成立.

1) の場合(他も同様)

$$\mathbb{Q}\left\{\dfrac{B\to B}{\underset{t}{\neg B^{\vee}B}, B\to B}\right.$$

$$\mathbb{R}\left\{\begin{array}{c} B\to B \\ \hline \neg B,\ B\to \\ \hline \neg B\wedge B,\ B\to \\ \hline B,\ \neg B\wedge B\to \\ \hline \neg B\wedge B,\ \neg B\wedge B\to \\ \hline \underset{f}{\neg B\wedge B}\ \to \end{array}\right.$$

(1-2)　$\Gamma\to\Delta = \to E^{\vee}E'$ のとき：分離は次の 1), 2) の場合に分れる.

	$\Phi\to\Psi$	$E,\Phi\to\Psi$	$E',\Theta\to\Sigma$
1)	$\to E^{\vee}E'$	$t\to E^{\vee}E'$	$f\ \to$
2)	$\to$	$f\ \to$	$t\ \to E^{\vee}E'$

それぞれの場合 $E,\Phi\to\Psi$，$E',\Theta\to\Sigma$ に到る $LJ^*(=LJ+(\to E^{\vee}E'))$ 証明図を作りうる。従って LK* 証明図でもあり，また(ハ)も成立.

2.　$h(\mathbb{P}[\Gamma\to\Delta])>0$ のとき：　$\mathbb{P}$ の最下の推論 I に注目する：

(A)　I が非分岐型のとき：

(図※)　$\mathbb{P}\left\{\begin{array}{l}\mathbb{P}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1\to\Delta_1\end{array}\right.\\ (\mathrm{I})\ \dfrac{}{\Gamma\to\Delta}\end{array}\right.$　の分離演繹図 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ は次の形をしている。

$$\mathbb{Q}\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Q}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Phi_1\to\Psi_1\end{array}\right.\\ (\mathrm{J})\ \dfrac{}{\Phi\to\Psi}\end{array}\right.\qquad \mathbb{R}\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Theta_1\to\Sigma_1\end{array}\right.\\ (\mathrm{K})\ \dfrac{}{\Theta\to\Sigma}\end{array}\right.$$

(A-1)　I が非分岐型で $\forall$-right, $\exists$left 以外のとき：

このとき，帰納法の仮定から，dual な E_1, E_1' があって，証明図 $\mathbb{Q}_1[E_1,\Phi_1\to\Psi_1]$ $\mathbb{R}_1[E_1',\Theta_1\to\Sigma_1]$ が構成される。このとき，目的の $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ は，$\mathbb{Q}_1$, $\mathbb{R}_1$ を用いて，下図のように(J)の左辺の上下に E_1 を，(K)の左辺の上下に E_1' を付し(J'),(K')とし構成する。

$$\mathbb{Q}\left\{\begin{array}{l}\mathbb{Q}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E_1,\Phi_1\to\Psi_1\end{array}\right.\\ (\mathrm{J}')\ \dfrac{}{E_1,\Phi\to\Psi}\end{array}\right.\qquad \mathbb{R}\left\{\begin{array}{l}\mathbb{R}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ E_1',\Theta_1\to\Sigma_1\end{array}\right.\\ (\mathrm{K}')\ \dfrac{}{E_1',\Theta\to\Sigma}\end{array}\right.$$

ここに I の主論理式が $\Phi\to\Psi$；$\Theta\to\Sigma$ のうち前者，後者のいずれに入るかによって，(J) = (I) & (K) : dummy，(J) : dummy & (K) = (I) となることに注意する。

(J),(K) の一方は dummy 推論のため(J'),(K')の一方も dummy 推論となる。他方は，"非分岐の $\forall$-right, $\exists$left 以外の推論"で，あらゆる変数条件(*)に無関係のため左辺の上下に同じ論理式を付しても正しい推論となることが保証される。また，性質(ハ)について，帰納法の仮定から，$\mathbb{P}_1\Rightarrow(\mathbb{Q}_1;\mathbb{R}_1)$ の変形で，非LJ型推論の増加は高々 weak-right, exchange-right のみ，更に(I)から生じる新しい推論(J')(K')は一方は dummy. 他方は(I)と同じ推論で，右辺については(I)の右辺の一部分であるため，新たに非LJ型推論を生じることはない．従って $\mathbb{P}\Rightarrow(\mathbb{Q};\mathbb{R})$ の変形において，非LJ型推論の増加は，高々 weak-right と exchange-right のみ.

[註][(*)] ∀-right, ∃-left の変数条件についてはAppendixに(*)を付して記す。

(A-2) I が非分岐型で，∀-right または ∃-left のとき：

∀-right について記述する：（∃-left に対する扱いは ∀-right と類似である。）

$$\mathbb{P}\left\{\ \mathbb{P}_1\left\{\ (\mathrm{I})\ \dfrac{\Gamma \to \Delta^*, B(\alpha)}{\Gamma \to \Delta^*, \forall_x B(x)}\right.\right.$$

変数条件：（α は I の下式にない）

こゝに $\Gamma \to \Delta = \Gamma \to \Delta^*, \forall_x B(x)$ の分離（$\Phi \to \Psi$; $\Theta \to \Sigma$）において $\forall_x B(x)$ の所属により２つの場合に分れる。

(1) $\forall_x B(x) \in \Psi$ のとき： $\mathbb{P}$ の分離演繹図 $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ は次のようになる：

$$\mathcal{Q}\left\{\ \begin{matrix}\mathcal{Q}_1\\ (\mathrm{J})\\ \| \\ (\mathrm{I})\end{matrix}\ \dfrac{\Phi \to \Psi^*, B(\alpha)}{\Phi \to \Psi^*, \forall_x B(x)}\right. , \qquad \mathcal{R}\left\{\ \begin{matrix}\mathcal{R}_1\\ (\mathrm{K})\\ \vdots\\ \mathit{dummy}\end{matrix}\ \dfrac{\Theta \to \Sigma}{\Theta \to \Sigma}\right.$$

帰納法の仮定から $\mathbb{Q}_1[\,E_1, \Phi \to \Psi^*, B(\alpha)\,]$, $\mathbb{R}_1[\,E_1', \Theta \to \Sigma\,]$ なるLK証明図が得られるので，求める２つの証明図 $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ は次のようにする：

$$\mathbb{Q}\left\{\ \begin{matrix}\mathbb{Q}_1\\ (\forall\text{-left})\\ \\ (\mathrm{J}')\\ \| \\ (\mathrm{I})\end{matrix}\ \dfrac{\dfrac{E_1, \Phi \to \Psi^*, B(\alpha)}{\forall_x E_1\binom{\alpha}{x}, \Phi \to \Psi^*, B(\alpha)}}{\underbrace{\forall_x E_1\tbinom{\alpha}{x}}_{E}, \Phi \to \Psi^*, \forall_x B(x)}\right. \qquad \mathbb{R}\left\{\ \begin{matrix}\mathbb{R}_1\\ (\exists\text{-left})\end{matrix}\ \dfrac{E_1', \Theta \to \Sigma}{\underbrace{\exists_x E_1'\tbinom{\alpha}{x}}_{E'}, \Theta \to \Sigma}\ (\mathrm{K}')\right.$$

こゝに，(I) ∀right に対する変数条件から Γ, Δ^*, $\forall_x B(x)$ に α なし，従って Φ, Ψ^*, Θ, Σ にも α なし，従って $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ 内の $\mathrm{J}' = \forall$right, $\mathrm{K}' = \exists$-left も変数条件をみたし，正しい推論である。

(2) $\forall_x B(x) \in \Sigma$ のとき：

$$\mathcal{Q}\left\{\ \begin{matrix}\mathcal{Q}_1\\ (\mathrm{J})\\ | \\ \mathit{dummy}\end{matrix}\ \dfrac{\Phi \to \Psi}{\Phi \to \Psi}\right. \qquad \mathcal{R}\left\{\ \begin{matrix}\mathcal{R}_1\\ (\mathrm{K})\\ \| \\ (\mathrm{I})\end{matrix}\ \dfrac{\Theta \to \Sigma^*, B(\alpha)}{\Theta \to \Sigma^*, \forall_x B(x)}\right.$$

求める証明図は (1) と同様に次のようにすればよい。

$$\mathbb{Q}\left\{\ \begin{matrix}\mathbb{Q}_1\\ (\exists\text{-left})\end{matrix}\ \dfrac{E_1, \Phi \to \Psi}{\underbrace{\exists_x E_1\tbinom{\alpha}{x}}_{E}, \Phi \to \Psi}\right. \qquad \mathbb{R}\left\{\ \begin{matrix}\mathbb{R}_1\\ (\forall\text{-left})\\ \\ (\mathrm{K}')\\ \| \\ (\mathrm{I})\end{matrix}\ \dfrac{\dfrac{E_1', \Theta \to \Sigma^*, B(\alpha)}{\forall_x E'\binom{\alpha}{x}, \Theta \to \Sigma^*, B(\alpha)}}{\forall_x E'\tbinom{\alpha}{x}, \Theta \to \Sigma^*, \forall_x B(x)}\right.$$

$\mathbb{P} \Rightarrow (\mathbb{Q}; \mathbb{R})$ なる変換に対する，性質(ハ)の証明は (A-1) と同様である。

(B) I が分岐型のとき。

(B-1) I が cut 以外の分岐型のときに（∧-right, ∨-left, ⊃-left のとき）。

$$\mathbb{P}\left\{\ \begin{matrix}\mathbb{P}_1\\ (\mathrm{I})\end{matrix}\ \dfrac{\Gamma_1 \to \Delta_1 \qquad \mathbb{P}_2\{\ \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma \to \Delta}\right.$$

に対する分離演繹図は次の形にかける。

$$\mathcal{Q}\left\{\ \begin{matrix}\mathcal{Q}_1\\ (\mathrm{J})\end{matrix}\ \dfrac{\Phi_1 \to \Psi_1 \qquad \mathcal{Q}_2\{\ \Phi_2 \to \Psi_2}{\Phi \to \Psi}\right. ; \qquad \mathcal{R}\left\{\ (\mathrm{K})\ \dfrac{\mathcal{R}_1\{\ \Theta_1 \to \Sigma_1 \qquad \mathcal{R}_2\{\ \Theta_2 \to \Sigma_2}{\Theta \to \Sigma}\right.$$

このとき，更に次の２つの場合に分れる：

(1) Ｉの主論理式が（あって）$\Phi \to \Psi$ に入るとき；(J)＝(I) で，(K) は dummy.

(2) Ｉの主論理式が（あって）$\Theta \to \Sigma$ に入るとき：(I) は dummy，(K)＝(I)

帰納法の仮定から $\mathcal{Q}_i, \mathcal{R}_i$ はそれぞれ $\mathbb{Q}_i[E_i, \Phi_i \to \Psi_i]$, $\mathbb{R}_i[E_i', \Theta_i \to \Sigma_i]$ なる証明図に modify される.

(1) の場合 $\mathbb{Q}[E_1 \wedge E_2, \Phi \to \Psi]$ $\mathbb{R}[E_1' \vee E_2', \Theta \to \Sigma]$ を次のように構成する.

$$\mathbb{Q}\left\{ \dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\left\{ E_1, \Phi_1 \to \Psi_1 \right.}{E_1 \wedge E_2, \Phi_1 \to \Psi_1}(\wedge\text{-left}) \quad \dfrac{\mathbb{Q}_2\left\{ E_2, \Phi_2 \to \Psi_2 \right.}{E_1 \wedge E_2, \Phi_2 \to \Psi_2}(\wedge\text{-left})}{E_1 \wedge E_2, \Phi \to \Psi}(\mathrm{I}) \right. \quad (\wedge\text{-right or } \vee\text{-left})$$

$$\mathbb{R}\left\{ \dfrac{\mathbb{R}_1\left\{ E_1', \Theta \to \Sigma \right. \qquad \mathbb{R}_2\left\{ E_2', \Theta \to \Sigma \right.}{E_1' \vee E_2', \Theta \to \Sigma}(\vee\text{-left}) \right. \quad \left(\text{この case において } \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta,\ \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma \text{ に注意.} \right)$$

(2) の場合 $\mathbb{Q}[E_1 \vee E_2, \Phi \to \Psi]$, $\mathbb{R}[E_1' \wedge E_2', \Theta \to \Sigma]$ を(1)の場合と dual に構成しうる.

(ト)の証明は (A−1) におけると同様である.

(B−2) Ｉが cut のとき：

$$\mathbb{P}\left\{ \dfrac{\mathbb{P}_1\left\{ \Gamma_1 \to \Delta_1^*, D \right. \qquad \mathbb{P}_2\left\{ D, \Gamma_2^* \to \Delta_2 \right.}{\underbrace{\Gamma_1, \Gamma_2^*}_{\Gamma} \to \underbrace{\Delta_1^*, \Delta_2}_{\Delta}}(\mathrm{I})\ (*0) \right.$$

に対し，$\mathbb{P}$ の分離 $\mathcal{Q}, \mathcal{R}$ は：

$$\mathcal{Q}\left\{ \dfrac{\mathcal{Q}_1\left\{ \Phi_1 \to \Psi_1^* \right. \qquad \mathcal{Q}_2\left\{ \Phi_2^* \to \Psi_2 \right.}{\underbrace{\Phi_1, \Phi_2^*}_{\Phi} \to \underbrace{\Psi_1^*, \Psi_2}_{\Psi}}(\mathrm{J}) \right. \ (\mathrm{J})\text{: dummy} \qquad \mathcal{R}\left\{ \dfrac{\mathcal{R}_1\left\{ \Theta_1 \to \Sigma_1^*, D \right. \qquad \mathcal{R}_2\left\{ D, \Theta_2^* \to \Sigma_2 \right.}{\underbrace{\Theta_1, \Theta_2^*}_{\Theta} \to \underbrace{\Sigma_1^*, \Sigma_2}_{\Sigma}}(\mathrm{K}) \right. \ (\mathrm{K}) = (\mathrm{I})\text{: cut}$$

となる.（select part が $\mathcal{Q}$ 故，cut は残余 part $\mathcal{R}$ に移る）

一方帰納法の仮定から，LK 証明図 $\mathbb{Q}_1[E_1, \Phi_1 \to \Psi_1^*]$, $\mathbb{R}_1[E_1', \Theta_1 \to \Sigma_1^*, D]$, $\mathbb{Q}_2[E_2, \Phi_2^* \to \Psi_2]$, $\mathbb{R}_2[E_2', D, \Theta_2^* \to \Sigma_2]$ が得られ，これから $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ を次のように構成する。

$$\mathbb{Q}\left\{ \dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\left\{ E_1, \Phi_1 \to \Psi_1^* \right.}{E_1, \Phi_1, \Phi_2^* \to \Psi_1^*, \Psi_2}(*1) \quad \left(\begin{array}{l} \text{right \& left} \\ \text{weak.'s} \\ \text{exchange's} \end{array} \right) \quad \dfrac{\mathbb{Q}_2\left\{ E_2, \Phi_2^* \to \Psi_2 \right.}{E_2, \Phi_1, \Phi_2^* \to \Psi_1^*, \Psi_2}(*2)}{E_1 \vee E_2, \Phi_1, \Phi_2^* \to \Psi_1^*, \Psi_2}(\text{left}\vee) \right.$$

$$\mathbb{R}\left\{ \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbb{R}_1\left\{ E_1', \Theta_1 \to \Sigma_1^*, D \right. \qquad \dfrac{\mathbb{R}_2\left\{ E_2', D, \Theta_2^* \to \Sigma_2 \right.}{D, E_2', \Theta_2^* \to \Sigma_2}\text{left exchange}}{E_1', \Theta_1, E_2, \Theta_2^* \to \Psi_1^*, \Psi_2}(\text{cut})(*3)}{E_1', E_2', \Theta_1, \Theta_2' \to \Psi_1^*, \Psi_2}}{E_1' \wedge E_2', \Theta_1, \Theta_2' \to \Psi_1^*, \Psi_2} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{left-exchange's} \\ \text{left } \wedge\text{'s} \\ \text{left-contraction} \end{array} \right)$$

この case における性質(ト)について：非LJ推論の増加は，帰納法の仮定から $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{R}_1, \mathbb{R}_2$ において高々 weak.-right, exchange-right があり，それと(*1), (*2)における同種推論だけである。(*3)の cut が非LJ型となるとしても，それは当初の $\mathbb{P}$ 内の cut (*0) が非LJ型のときであり，非LJ型の増加にまうない。［lemma の証明了］

3. LK証明図の分離LJ証明図と排中律型公理を用いる再構成

論理式 A の LK証明図 $\mathbb{P}_0[\to A]$ が与えられたとき，前節2で提示した lemma を用い，$\mathbb{P}_0$ 内の非LJ型の($\neg$left, $\supset$left, cut) および contraction-right をすべて消去し，結果として "すべて LJ型推論と $\to E\vee E'$ ($E'\equiv\neg E$)型の公理とを用いた証明図" $\mathbb{S}_0[\to A]$ に変換するアルゴリズムを述べる。

(第1段階) $\mathbb{P}_0[\to A_0]$ 内の非LJ型の($\neg$left, $\supset$-left, cut)の消去：

この型の非LJ推論の最上部の1つ I に着目し消去する。(I)の上部を $\mathbb{P}_1$ とする。

(case 1) I が非LJ型 $\neg$left のとき：($\Gamma\to\Delta, B$) を ($\to B$; $\Gamma\to\Delta$) に分離し lemma を適用する。互に dual な E, E' があって，2つのLK証明図 $\mathbb{Q}_1[E\to B]$, $\mathbb{R}_1[E', \Gamma\to\Delta]$ をうる。このとき $\mathbb{P}_1[\Gamma\to\Delta, B]$ には非LJ型($\neg$-left, $\supset$-left, cut)がないことから，$\mathbb{Q}_1, \mathbb{R}_1$ もその性質をもつ。かつ right contraction の和も $\mathbb{P}_1$ と変らない。そこで

$$\mathbb{P}_0\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}_1\left\{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma\to\Delta, B\end{array}\right. \\ (\mathrm{I})\ \dfrac{\Gamma\to\Delta, B}{\neg B, \Gamma\to\Delta}\quad (|\Delta|\geq 1) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0 \end{array}\right.$$

(I)を NJ型 $\neg$-left である(I')に変え，左図のように変形し $\mathbb{P}'$ とすれば，非LJ型($\neg$left, $\supset$-left, cut)推論の1つだけが減少し，(公理 $\to E\vee E'$ の追加はあるが) contraction right の個数は変らない LK* 証明図 $\mathbb{P}_0'[\to A]$ を得。

$$\mathbb{P}_0'\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\{E\to B}{\neg B, E\to}\,(\mathrm{I}')\ (\text{LJ }\neg\text{left})}{E, \neg B, \Gamma\to\Delta}\,(\text{weak.'s, exchange's}) \qquad \dfrac{\mathbb{R}_1\{E', \Gamma\to\Delta}{E', \neg B, \Gamma\to\Delta}}{E\vee E', \neg B, \Gamma\to\Delta}\,(\vee\text{-left})}{\neg B, \Gamma\to\Delta}\,(\text{LJ-cut}) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0 \end{array}\right.$$

(case 2) I が非LJ型 $\supset$left のとき：(I)の左上部 $\mathbb{P}_1(\Gamma\to\Delta, A)$ について ($\Gamma\to\Delta, B$) を ($\to B$; $\Gamma\to\Delta$) と分離し lemma を適用する。互に dual な E, E' を用い，証明図 $\mathbb{Q}_1[E_1\to B]$, $\mathbb{R}_1[E_1', \Gamma\to\Delta]$ をうる。これらを用いて下図のように非LJ型$\supset$-left を LJ型の $\supset$-left に変え，(case 1)同様 非LJ型($\neg$left, $\supset$-left, cut)を1つ減じ，contraction right の個数不変な $\mathbb{P}_0'$ を得る。

$$\mathbb{P}_0\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \dfrac{\mathbb{P}_1\{\Gamma\to\Delta, B \qquad C, \Gamma\to\Delta\}\mathbb{P}_2}{B\supset C, \Gamma\to\Delta}\quad (|\Delta|\geq 1) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0 \end{array}\right.$$

$$\mathbb{P}_0'\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathbb{Q}_1\{E_1\to B \qquad B, B\supset C\to C\ (※)}{E_1, B\supset C\to C}\,(\text{LJcut}) \qquad \mathbb{P}_2\{C, \Gamma\to\Delta}{E_1, B\supset C, \Gamma\to\Delta}\,(\text{LJcut}) \qquad \dfrac{\mathbb{R}_1\{E_1', \Gamma\to\Delta}{E_1', B\supset C, \Gamma\to\Delta}\,(\text{left weak.'s, exchange's})}{E_1\vee E_1', B\supset C, \Gamma\to\Delta}\,(\vee\text{-left})}{B\supset C, \Gamma\to\Delta}\,(\text{LJ-cut}) \\ \qquad\vdots \end{array}\right.$$

(※)はLJで証明可能，(LJ型 $\supset$-left)が使われる。

(case 3) I が非LJ型 cut のとき："非LJ型の($\neg$left, $\supset$-left, cut)をもはやもたない $\mathbb{P}_1[\Gamma\to\Delta, B]$" の $\Gamma\to\Delta, B$ の分離($\to B$; $\Gamma\to\Delta$)に lemma を適用し，$\mathbb{Q}_1[E_1\to B]$; $\mathbb{R}_1[E_1', \Gamma\to\Delta]$ を作る。これを用いて下図のような変形を行い $\mathbb{P}_0'$ とする。非LJ型 cut I は消去され，$\mathbb{P}_0'$ の非LJ形の($\neg$left, $\supset$-right, cut)の個数は $\mathbb{P}_0$ より1減少し，かつ contraction right の個数は変らない。

$$\mathbb{P}_0\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I})\ \dfrac{\mathbb{P}_1\{\Gamma\to\Delta, B \qquad B, \Pi\to\Lambda\}\mathbb{P}_2}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}\,(\text{cut})\quad (|\Delta|\geq 1) \\ \qquad\vdots \\ \qquad\to A_0 \end{array}\right.$$

$$\mathbb{P}_0'\left\{\begin{array}{l} (\mathrm{I}'')\ \dfrac{\to E\vee E' \qquad \dfrac{\dfrac{(\mathrm{I}')\ \dfrac{\mathbb{Q}_1\{E_1\to B \qquad B, \Pi\to\Lambda\}\mathbb{P}_2}{E_1, \Pi\to\Lambda}\,(\text{LJ-cut})}{E_1, \Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}\,(\text{left \& right weak.'s, exchange's}) \qquad \dfrac{\mathbb{R}_1\{E_1', \Gamma\to\Delta}{E_1', \Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}}{E\vee E', \Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}\,(\vee\text{-left})}{\Gamma, \Pi\to\Delta, \Lambda}\,(\text{LJ-cut}) \\ \qquad\vdots \end{array}\right.$$

（第２段階）右辺減少型非LJ推論は contraction-right のみの LK^* 証明図 $\mathfrak{P}_0[\to A_0]$ に対し，これらの contracton-right を順次下から消去する操作はすでに 1 "変換アルゴリズムの主旨" の(3)に記した通りである。この操作を $\mathfrak{P}_0[\to A_0]$ にくり返し適用すれば，右辺減少型推論をもたない LK^* 証明図 $\Pi_0[\to A_0]$ をうる。そしてこれが目的の LJ^*（$= LJ +(\to E^\vee E')$型公理）の証明図となる。

（第３段階）第２段階で得られた LJ^* 証明図において，更に $\to E^\vee E'$ 型の始式の上に $\to E^\vee E'$ の $LJ^\oplus$（$= LJ$ + 排中律）証明を結合して，$\to A_0$ の $LJ^\oplus$ 証明図も得られる。

参考文献

[1] T. OSHIBA : A Method for Obtaining Proof Figures in the First Order Predicate Calculus, Comm. Math. Univ. St. Pauli, Vol.30, No.1, pp.49-62 (1981)

[2] 大芝 猛 : guide 情報を利用する証明のプログラム, 数理科学, No.270, pp.56-68, (1985)

Appendix　LK推論と証明図における ancestor

LK証明図における１つの論理式の"先祖の論理式"とは，『自分自身』と次の各推論規則において，『下式にある"先祖の論理式"に対し，上式にある"親の論理式"を再び"先祖の論理式"であるとする』という操作で指定される論理式の系列をいう。但し，下記の LKの各推論図において，(1) 下式に indicate された論理式（主論理式）に対し上式に indicate された論理式（副論理式）は"親"とする。(2) 下式内の $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ 内の各論理式に対し，上式の $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ 内の対応する位置にある論理式は"親"とする。

(I) 構造に関する推論

weakening

$$\text{(left)}\ \frac{\Gamma \to \Delta}{B, \Gamma \to \Delta} \qquad \text{(right)}\ \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, B}$$

contraction

$$\text{(left)}\ \frac{B, B, \Gamma \to \Delta}{B, \Gamma \to \Delta} \qquad \text{(right)}\ \frac{\Gamma \to \Delta, B, B}{\Gamma \to \Delta, B}$$

exchange

$$\text{(left)}\ \frac{\Gamma, B, C, \Pi \to \Delta}{\Gamma, C, B, \Pi \to \Delta} \qquad \text{(right)}\ \frac{\Gamma \to \Delta, B, C, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, C, B, \Lambda}$$

cut

$$\frac{\Gamma \to \Delta, B \quad B, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

(II) 論理記号に関する推論

$\wedge$ (left)

$$(1)\ \frac{B, \Gamma \to \Delta}{B \wedge C, \Gamma \to \Delta} \qquad (2)\ \frac{C, \Gamma \to \Delta}{B \wedge C, \Gamma \to \Delta}$$

$\wedge$ (right)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, B \quad \Gamma \to \Delta, C}{\Gamma \to \Delta, B \wedge C}$$

$\vee$ (left)

$$\frac{B, \Gamma \to \Delta \quad C, \Gamma \to \Delta}{B \vee C, \Gamma \to \Delta}$$

$\vee$ (right)

$$(1)\ \frac{\Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, B \vee C} \qquad (2)\ \frac{\Gamma \to \Delta, C}{\Gamma \to \Delta, B \vee C}$$

$\neg$ (left)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, B}{\neg B, \Gamma \to \Delta}$$

$\neg$ (right)

$$\frac{B, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg B}$$

$\supset$ (left)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, B \quad C, \Gamma \to \Delta}{B \supset C, \Gamma \to \Delta}$$

$\supset$ (right)

$$\frac{B, \Gamma \to \Delta, C}{\Gamma \to \Delta, B \supset C}$$

$\forall$ (left)

$$\frac{B(\tau), \Gamma \to \Delta}{\forall_x B(x), \Gamma \to \Delta}$$

$\forall$ (right)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, B(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall_x B(x)}$$

(*)（下式に a なし）

$\exists$ (left)

$$\frac{B(a), \Gamma \to \Delta}{\exists_x B(x), \Gamma \to \Delta}$$

(*)（下式に a なし）

$\exists$ (right)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, B(\tau)}{\Gamma \to \Delta, \exists_x B(x)}$$

(*) は変数条件．