アルゴリズム 28－5
（1992．7．17）

指数目的関数を持つ２資源配分問題

一森 哲男
大阪工業大学経営工学科

資源配分問題は応用範囲が広いためよく研究されている。しかし、これまでの研究では資源の数が１に限定されてきた。この限定を緩和すべく、ここでは資源数が２で目的関数が指数関数となる場合を考えてみた。この問題は非線形計画法の問題であるが多項式時間で解ける効率的なアルゴリズムを与えた。

A TWO-RESOURCE ALLOCATION PROBLEM ACCORDING TO AN EXPONENTIAL OBJECTIVE

Tetsuo Ichimori

Department of Industrial Management, Osaka Institute of Technology

Omiya, Asahi-ku, Osaka 535, Japan

The resource allocation problem has been studied in a variety of application problems. This problem usually has only one constraint, i.e., the amount of resource to be allocated is constant. Considering its application areas, however, it is important to treat multi-resource problems. In this paper we consider a two-resource allocation problem with an exponential objective function. Though this problem is a nonlinear programming problem, a polynomial time algorithm is given for it.

1　まえがき

資源配分問題は、手持ちの資源をどのように配分あるいは投資すれば、その時の効用あるいは利益の総和が最大となるかを議論する。問題の構造の単純さ故に、応用範囲は広く、負荷配分、生産計画、ポートフォリオ選択、議席配分などの諸問題がその応用として挙げられる。さらに、部分問題（子問題）としても、さまざまな分野で、しばしば現れている。

　これらの理由により、資源配分問題は、ここ数十年間精力的に研究されてきた。近年、これらを解説的にまとめた図書［1］も出版されている。これまでの研究では、ほとんど資源の種類が単一であった。しかし、自然な拡張、あるいは応用問題の必要性［2］から、多資源配分問題が研究され始めた。しかし、その問題の難しさ故に、現状ではほとんど成果が得られていないようである。

　単一資源配分問題の研究の歴史を振り返ると、いろいろと問題の場合分けを行なって、成果を上げてきたわけで、多資源の場合も同様に、いろいろと場合分けをして議論する必要があると思われる。本論分では次の2資源配分問題を議論する。

$$(P) \qquad \max \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-a_i x_i - b_i y_i})$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq X$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leq Y$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0 \qquad (i = 1, ..., n)$$

ここで定数 $p_i > 0,\quad a_i > 0,\quad b_i > 0 \qquad (i = 1, ..., n)$ とする。また、$0 < X < \infty,\quad 0 < Y < \infty$ とする。

　この問題の単一資源版は、有名な探索労力の最適配分問題 (the optimum distribution of searching effort) で、Koopman［3］および Charnes and Cooper［4］により議論された。彼らのストーリーは次のようである。目標物がn個の領域内にあることが分かっている。しかも、i番目の領域内に存在する確率 p_i が既知とする。今、i番目の領域に目標物があったと仮定したとき、ランダム探索を行なったときの発見確率が関数 $(1 - e^{-a_i x_i})$ で表わされるとすると、全領域での発見確率は

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(1 - e^{-a_i x_i})$$

となる。

この探索問題は、戦時中における文字通りの探索問題としてオペレーションズ・リサーチの研究として遂行されたもので、戦時中には、実際に、大いに成果を上げた［３］とのことである。しかしながら、これはさまざまな故障発見、例えばソフトウェアのエラーの発見など［５］にも応用されており、その応用範囲は非常に広いようである。

さて、この探索問題においても資源の種類は１つに限定している。ところが実際、海上に漂流している救命いかだ（life raft）を発見しようとする場合、海上からだけでなく上空からも探索を行なうのが普通である。山での遭難時でも同様に、地上と上空から探索している。また、玄人グループと素人グループあるいは男性グループと女性グループなど適当な２グループでもって、探索を行なえば、ここでの２資源配分問題になる。

問題 (P) は明らかに次の最小化問題と同じである。

$$(P') \qquad \min \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i}$$

$$s.t. \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq X$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \leq Y$$

$$x_i \geq 0, \quad y_i \geq 0 \qquad (i = 1, ..., n)$$

以下問題 (P') を解くことを考えていく。

2　双対問題

ここでは数理計画法の理論により、問題 (P) の双対問題を作る。問題 (P') の資源の量の上限制約の２式に対して、ラグランジュ乗数 $\lambda \geq 0$ と $\mu \geq 0$ を対応させて、次のラグランジュ関数を作る。

$$\begin{aligned}L(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda,\mu) &= \sum_{i=1}^{n} p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - X) + \mu(\sum_{i=1}^{n} y_i - Y) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \{p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i\} - X\lambda - Y\mu\end{aligned}$$

ここで $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$,　$\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ である。変数 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, λ, μを持つ、このラグランジュ関数を、$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$,　$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ で最小化すると、λ と μ の双対関数 $g(\lambda,\mu)$ が得られる。

$$\begin{aligned}g(\lambda,\mu) &= \min_{\substack{\mathbf{x}\geq 0\\ \mathbf{y}\geq 0}} L(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda,\mu) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \min_{\substack{x_i\geq 0\\ y_i\geq 0}} \left(p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i\right) \right\} - X\lambda - Y\mu\end{aligned}$$

ここで

$$h_i(\lambda,\mu) = \min_{\substack{x_i\geq 0\\ y_i\geq 0}} \left(p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i\right)$$

と置くと

$$g(\lambda,\mu) = \sum_{i=1}^{n} h_i(\lambda,\mu) - X\lambda - Y\mu$$

となる。すると、双対問題 (D) は次のようになる。

$$(D) \qquad \max_{\substack{\lambda\geq 0\\ \mu\geq 0}} g(\lambda,\mu)$$

この問題を解くには、関数 $g(\lambda,\mu)$ の形が決まれば、つまり n 個の関数 $h_i(\lambda,\mu)$ の形が決まれば良い。そのため、$h_i(\lambda,\mu)$ の形を決定する問題を次に考える。

3　関数 $h_i(\lambda,\mu)$ の形の決定

ここでは $h_i(\lambda,\mu)$ の関数形を求める、次の問題 (SP) を考える。

(SP)
$$\min_{\substack{x_i\geq 0\\ y_i\geq 0}} p_i e^{-a_i x_i - b_i y_i} + \lambda x_i + \mu y_i$$

問題 (SP) の実行可能解 (x_i, y_i) 、つまり解 $x_i \geq 0,\ y_i \geq 0$ が最適解となるための必要十分条件より $\lambda > 0$ 、$\mu > 0$ に限定できることおよび次の定理が導かれる。

定理1　$\lambda > 0,\ \mu > 0$ となる問題 (SP) の最適解 (x_i, y_i) は

(i) $\lambda \geq p_i a_i,\ \mu \geq p_i b_i$ ならば $x_i = 0,\ y_i = 0$,

(ii) $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{b_i}{a_i},\ \mu < p_i b_i$ ならば $x_i = 0,\ y_i = \frac{1}{b_i}\log\frac{p_i b_i}{\mu}$,

(iii) $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{b_i}{a_i},\ \lambda < p_i a_i$ ならば $x_i = \frac{1}{a_i}\log\frac{p_i a_i}{\lambda},\ y_i = 0$ である。

定理2　関数 $h_i(\lambda,\mu)$ は、$\lambda > 0,\ \mu > 0$ 上で次のように求まる。

(i) $\lambda \geq p_i a_i,\ \mu \geq p_i b_i$ ならば

$$h_i(\lambda,\mu) = p_i,$$

(ii) $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{b_i}{a_i},\ \mu < p_i b_i$ ならば

$$h_i(\lambda,\mu) = \frac{\mu}{b_i}(1 + \log\frac{p_i b_i}{\mu}),$$

(iii) $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{b_i}{a_i},\ \lambda < p_i a_i$ ならば

$$h_i(\lambda,\mu) = \frac{\lambda}{a_i}(1 + \log\frac{p_i a_i}{\lambda}).$$

定理3　関数 $h_i(\lambda,\mu)$ は、$\lambda > 0,\ \mu > 0$ 上で連続な凹関数である。

定理4　関数 $h_i(\lambda,\mu)$ の勾配ベクトル $\nabla h_i(\lambda,\mu)$ は次のように与えられる。

(i) $\lambda \geq p_i a_i,\ \mu \geq p_i b_i$ ならば

$$\nabla h_i(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(ii) $\frac{\mu}{\lambda} < \frac{b_i}{a_i},\ \mu < p_i b_i$ ならば

$$\nabla h_i(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b_i}\log\frac{p_i b_i}{\mu} \end{bmatrix},$$

(iii) $\frac{\mu}{\lambda} > \frac{b_i}{a_i},\ \lambda < p_i a_i$ ならば

$$\nabla h_i(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_i}\log\frac{p_i a_i}{\lambda} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

定理5　関数 $h_i(\lambda,\mu)$ は直線 $\mu = \frac{b_i}{a_i}\lambda \quad (0 < \lambda < p_i a_i)$ 上以外ではなめらかである。

4　セルの数

関数 $h_i(\lambda,\mu)$ は$\lambda-\mu$平面 $(\lambda>0,\ \mu>0)$ 上で連続な凹関数であり、3つの領域で3つの異なる関数形を持っている。では、関数 $g(\lambda,\mu)=\sum_{i=1}^{n}h_i(\lambda,\mu)-X\lambda-Y\mu$ は一体いくつの異なる関数形を持っているのかをここで調べてみる。関数形が変わらない領域をセルと呼ぶ。次の3つの領域を定義する。

$$U_i=\{(\lambda,\mu)\mid\ \lambda\geq p_ia_i,\ \mu\geq p_ib_i\}$$
$$V_i=\{(\lambda,\mu)\mid\ \mu\leq\frac{b_i}{a_i}\lambda,\ 0<\mu<p_ib_i\}$$
$$W_i=\{(\lambda,\mu)\mid\ \mu>\frac{b_i}{a_i}\lambda,\ 0<\lambda<p_ia_i\}$$

すると、$\lambda-\mu$平面の正の領域は U_i, V_i, W_i で3分割される。また、座標 (p_ia_i,p_ib_i) の点を T_i(三叉路点)、半直線$\mu=p_ib_i\quad(\lambda\geq p_ia_i)$ を L_i、$\lambda=p_ia_i\quad(\mu\geq p_ib_i)$ を M_i、線分$\mu=\frac{b_i}{a_i}\lambda\quad(0<\lambda\leq p_ia_i)$ を S_iとする。3つ組 (L_i,M_i,S_i) を3直線と呼ぶ。セルはn個の3直線で決定される。

定理6　　$\lambda-\mu$平面の正の領域は, n個の3直線 $(L_i,M_i,S_i)\quad i=1,\ldots,n$ により高々$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$個のセルに分割される。

5　双対関数 $g(\lambda,\mu)$ の最大化

任意のセル cl に対して、集合 $\{1,\ldots,n\}$ を次のように分割する。

$$U=\{i\mid cl\subset U_i\}$$
$$V=\{i\mid cl\subset V_i\}$$
$$W=\{i\mid cl\subset W_i\}$$

セル cl 上の $g(\lambda,\mu)$ を $g_{cl}(\lambda,\mu)$ と書き、$\lambda>0,\ \mu>0$ 上で定義する。

$$g_{cl}(\lambda,\mu)=\sum_{i\in U}p_i+\sum_{i\in V}\frac{\mu}{b_i}(1+\log\frac{p_ib_i}{\mu})+\sum_{i\in W}\frac{\lambda}{a_i}(1+\log\frac{p_ia_i}{\lambda})-X\lambda-Y\mu.$$

関数 $g_{cl}(\lambda,\mu)$ は$\lambda>0,\ \mu>0$ 上でなめらかなので、これの勾配ベクトル

$$\nabla g_{cl}(\lambda,\mu)=\begin{bmatrix}\sum_{i\in W}\frac{1}{a_i}\log\frac{p_ia_i}{\lambda}-X\\ \sum_{i\in V}\frac{1}{b_i}\log\frac{p_ib_i}{\mu}-Y\end{bmatrix}$$

が得られる。$\nabla g_{cl}(\lambda,\mu)$ は凹なので、方程式 $\nabla g_{cl}(\lambda,\mu)=0$ の解

$$\lambda=\exp\left\{\frac{\sum_{i\in W}\frac{\log p_ia_i}{a_i}-X}{\sum_{i\in W}\frac{1}{a_i}}\right\}$$

$$\mu=\exp\left\{\frac{\sum_{i\in V}\frac{\log p_ib_i}{b_i}-Y}{\sum_{i\in V}\frac{1}{b_i}}\right\}$$

は $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大値を与える。

$(\lambda,\mu)\in cl$ に対しては

$$g(\lambda,\mu)=g_{cl}(\lambda,\mu)$$

である。セル cl にその境界を付加して閉集合としたものを閉セルと呼び $\overline{cl}$ と書く。この時、$(\lambda,\mu)\in\overline{cl}$ に対しても $g(\lambda,\mu)$ は連続関数なので $g(\lambda,\mu)=g_{cl}(\lambda,\mu)$ となる。よって、$g(\lambda,\mu)$ の最大値を見つけるには、すべての閉セルに対して $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大値を見つければ良いことが分かる。よって、ここでは

$$(Q)\qquad \max g_{cl}(\lambda,\mu)$$

$$s.t.\qquad (\lambda,\mu)\in\overline{cl}$$

を考える。

明らかに $\nabla g_{cl}(\lambda,\mu)=0$ の解 (λ,μ) が $\overline{cl}$ に属せば問題 (D) の最適解である。そうでない場合は問題 (Q) の最適解は閉セルの境界上に存在する。閉セルは最大6辺をもつ多角形なので高々6回直線上で $g_{cl}(\lambda,\mu)$ の最大化を行なえば問題 (Q) は解ける。問題 (Q) は $O(n)$ の時間で解けるので、セルの総数が $O(n^2)$ であることから $g(\lambda,\mu)$ の最大化は $O(n^3)$ の時間でおこなえる。

参考文献

[1] T. Ibaraki and N. Katoh, *Resource Allocation Problems — Algorithmic Approaches*, The MIT Press, 1988.

[2] K. M. Mjelde, *Methods of the Allocation of limited Resources*, John Wiley & Sons, 1983.

[3] B. O. Koopman, "The theory of search: partIII, the optimum distribution of searching effort", *Operations Research*, 5(1957) , pp.613–626.

[4] A. Charnes and W. W. Cooper, "The theory of search: optimal distribution of effort", *Management Science*, 5(1958), pp.44–49.

[5] 山田 茂, "ソフトウェア信頼性評価技術", H B J 出版, 1989.