

## デジタル・ハーフトーニングに対する 最適アルゴリズムとその実験的評価

浅野哲夫<sup>1</sup>、長谷川篤史<sup>2</sup>、Desh Ranjan<sup>3</sup>、Thomas Roos<sup>4</sup>

<sup>1</sup>大阪電気通信大学工学部、<sup>2</sup>大阪電気通信大学大学院工学研究科

<sup>3</sup>Max-Planck Institut für Informatik, Saarbrücken, Germany,

<sup>4</sup>Theoretische Informatik, ETH Zentrum, Zürich, Switzerland

濃淡画像を白黒の二値画像で表現するためのデジタル・ハーフトーニングに関して様々な方法が提案されているが、人間の目が主な評価尺度であった。本文では、この問題を数学的最適化問題として定義して、その最適解を求めようとするものである。また、従来の方法との比較を含む計算機実験の結果についても報告する。

## An Optimal Digital Halftoning Algorithm and Its Experimental Evaluation

Tetsuo ASANO<sup>1</sup>, Atsushi HASEGAWA<sup>2</sup>, Desh RANJAN<sup>3</sup>, Thomas ROOS<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Osaka Electro-Communication University,

<sup>2</sup>Graduate School of Osaka Electro-Communication University, Neyagawa, Osaka 572  
JAPAN,

<sup>3</sup>Max-Planck Institut für Informatik, Saarbrücken, Germany,

<sup>4</sup>Theoretische Informatik, ETH Zentrum, Zürich, Switzerland

A number of algorithms have been proposed so far toward "Digital Halftoning" whose purpose is to represent an image with many gray levels by a binary image consisting only of black and white dots. In this paper we define the problem as a mathematical optimization problem and try to find an optimal solution. Computer experiments including comparison with conventional algorithms are also presented.

## 1 はじめに

多階調の濃淡画像を白点と黒点だけで構成される2値画像で表現するための技術であるデジタル・ハーフトーニングは、画像処理における最も基本的な問題の一つである。この種の技法は、ファクシミリやレーザプリンターのように黒点しか出力できない出力装置で画像を扱う際に不可欠であり、実に様々な方法が提案されてきた<sup>(1,2,3,4,5)</sup>。しかしながら、問題自体が非常に実際的であるためか、これまで出力画像の品質に関する合理的な評価尺度について論じた研究は多くない。アルゴリズムの善し悪しは人間の目で出力画像を評価することによって決められるのが常であった。本論文の目的の一つは、合理的と思われる数学的な基準を設定して、この基準の下で最適解を与えるアルゴリズムを提案することである。これによってデジタル・ハーフトーニング問題を組み合わせ最適化問題として定式化することに成功している。

第2章では、最適化の基準を定式化し、1次元と2次元の組み合わせ最適化問題を定義する。第3章では1次元の問題について考察し、最適解を求める線形時間・線形記憶領域のアルゴリズムを提案する。基本的な考え方は、問題を有向非巡回型グラフ (directed acyclic graph) 上での最小重みパス (minimum-weight path) を求める問題に変換するというものである。これは Viterbi<sup>(6)</sup>の復号化法に似た方法であるが、様々な最適化の基準に対して適用できるのが特徴である。また、この問題は、係数には実数を許すが変数の値は0、1の2値に限って、与えられた多項式を最大または最小にする変数の値の組み合わせを求める疑似ブール計画法としても定式化できる。その場合には Crana らの線形時間アルゴリズム<sup>(7)</sup>を用いることもできるが、最適化の基準によっては明らかに実用的でない場合がある。第4章では、2次元の問題も線形時間で解けることを示すが、実用的には問題が多いので、問題を1次元に置き換えて近似的に解く方法を提案する。問題を1次元に変換するために、2次元平面の点を埋め尽くすための、いわゆるスペースフィリングカーブ (space filling curve) を用いる。第5章では、本文で提案する方法を従来の方法と比較するために行った計算機実験について述べる。

出力2値画像を評価するための新たな基準とは、各画素を中心とする小領域における濃淡レベルの平均値と黒点の個数の差の総和を最小にするというものである。この小領域の大きさを  $k$  というパラメータで表すことにすると、当然実行時間はパラメータ  $k$  に依存する。実際、上に述べた1次元の場合のアルゴリズムの計算時間は  $O(2^{2k+1}n)$  と表現される。 $k$ の値は実用的には高々5以内と考えられるから、 $2^{2k+1}$ を定数と見なすこともできるが、2次元の場合には最適解を求めるのに  $O(2^{(2k+1)^2}n)$ の時間を要するので、この係数は無視できない。しかしながら、従来は最適解を求めるアルゴリズムが知られていなかったので、発見的アルゴリズムの出力結果を最適解と比較して欠点を修正するということができなかったわけであるから、上述のアルゴリズムを発見的アルゴリズムの評価用に用いることができよう。

## 2 デジタル・ハーフトーニングの定式化

$A = (a_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, N, 0 \leq a_{ij} \leq 1$  をサイズ  $N \times N$  の画像とする。ここでは、各画素が0と1の間の実数値によって表現される階調値をもつものとする。出力は2値の行列  $B = (b_{ij}), i, j = 1, 2, \dots, N$  として表わす。ただし、 $b_{ij}$ は0または1の整数である。 $a_{ij}$ は明るさのレベルを表しているので、値が大きいかほど明るいことを意味する。したがって、出力の黒点は  $b_{ij} = 0$  に対応する。

画像を上で述べたような形式で入力して2値の出力画像を得ることをデジタル・ハーフトーニングというが、ファクシミリやレーザプリンターでの出力に対応しているため、従来から実に様々な方法が提案されている。エラー・ディフュージョン法<sup>(2)</sup>、オーダード・ディザ法<sup>(3,4,5)</sup>、ドット・ディフュージョン法<sup>(1)</sup>などがその代表である。これらの方法では少数の例題について出力画像を人間の目でみて比較しているだけで、数学的な意味で出力画像の質を比較しようとする研究は見当たらない。Ulichneyの博士論文<sup>(8)</sup>はデジタル・ハーフトーニングに関する従来の研究成果をうまくまとめているが、数学的な基準が述べられているわけではない。本論文では、人間の目に依存する曖昧な基準ではなく、合理的と思われる数学的な基準を設定して、デジタル・ハーフトーニングを最適化問題として定義する。

次に最適化の基準について考察しよう。人間の目で濃淡画像  $A$  の画素  $(i, j)$  付近を見ると、人間の目にはその周辺の画素の平均的な階調値が認識されるはずである。一方、同じく白黒2値画像については、注目画素の周辺にある白点の個数に比例した明るさを感じるとははずである。したがって、人力の濃淡画像と

出力の2値画像が同じ画像として認識されるには、上記の2つの値がどの画素についてもほぼ等しくなければならない。簡単のため、本論文では各画素を中心として一辺の長さが奇数の整数であるような正方形の領域を考え、その中で入力値  $a_{ij}$  または出力値  $b_{ij}$  の和をとる。より一般的には、中心に近いほど大きな重みを与えて和をとる。

画素  $(i, j)$  から (マンハッタン) 距離が  $k$  以内の画素からなる集合を  $(i, j)$  の  $k$ -近傍といい、 $W_k(i, j)$  と記す。すなわち、

$$W_k(i, j) = \{(i', j') : |i - i'| \leq k \text{ and } |j - j'| \leq k\}$$

と定める。 $D = (d_{\alpha, \beta})$ ,  $\alpha, \beta = -k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$  を  $k$ -近傍の各要素に対する重みを定める行列とする。このとき、画素  $(i, j)$  に関する重み付きの誤差  $E(i, j)$  は、次の式で表わせる。ただし、 $i, j \leq 0, i, j > N$  の場合は  $a_{ij} = 0$  とする。

$$E(i, j) = \sum_{\alpha=-k}^k \sum_{\beta=-k}^k d_{\alpha, \beta} \times (a_{i+\alpha, j+\beta} - b_{i+\alpha, j+\beta})$$

この式で決まる  $E(i, j)$  が0に近い程、画素  $(i, j)$  の近傍において出力画像が入力画像に似ていると考えられる。この誤差値を画像全体で考えた量を最小化する問題としてデジタル・ハーフトニングを定式化するというのが本論文の立場である。

以上の考察の下に、デジタル・ハーフトニングを次のような組み合わせ最適化問題として定式化する。

**[問題A]**  $N \times N$  の実数値行列  $A = (a_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  (ただし、 $0 \leq a_{ij} \leq 1$ ) が与えられたとき、次式を最小にする  $N \times N$  の2値行列  $B = (b_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  を求めよ。

$$E = \sum_x \sum_y |E(x, y)| \tag{A}$$

上の問題では画像全体での誤差の絶対値の総和を考えたと、誤差の絶対値ではなく2乗和を最小にすることも考えられる。

### 3 1次元の問題に対する解法

デジタル・ハーフトニングは本来2次元の問題であるが、まずその1次元版について考察しよう。まず、2次元の  $k$ -近傍に対して1次元の  $k$ -近傍  $W_k^{(1)}(i)$  を次のように定める。

$$W_k^{(1)}(i) = \{i' : |i - i'| \leq k\}$$

$k$ -近傍の各要素に対する重みを定めるベクトル  $D^{(1)} = (d_{\alpha}^{(1)})$ ,  $\alpha = -k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k$  も同様に定義する。このとき、要素  $a_i$  に関する重み付きの誤差  $E^{(1)}(i)$  は、次の式で表わせる。

$$E^{(1)}(i) = \sum_{\alpha=-k}^k d_{\alpha}^{(1)} \times (a_{i+\alpha} - b_{i+\alpha})$$

これを用いて問題Aと問題Bの1次元版を考える。

**[問題A']** サイズ  $N$  の実数値ベクトル  $A = (a_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  (ただし、 $0 \leq a_i \leq 1$ ) が与えられたとき、次式を最小にするサイズ  $N$  の2値ベクトル  $B = (b_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  を求めよ。ただし、 $i \leq 0, i > N$  なら  $a_i = 0$  とする。

$$E^{(1)} = \sum_{i=-N}^N |E^{(1)}(i)| = \sum_{i=-N}^N \left| \sum_{\alpha=-k}^k d_{\alpha}^{(1)} \times (a_{i+\alpha} - b_{i+\alpha}) \right| \tag{A'}$$

上の問題に対する最適解を求めるために Viterbi の復号化法<sup>(6)</sup> に似た次のような方法を提案する。

入力系列  $(a_1, a_2, \dots, a_N)$  が与えられたとき、各  $i = 1, \dots, N$  に対して  $b_i$  の値を0か1に定める。このとき、 $a_i$  での誤差  $E^{(1)}(i)$  は、 $(b_{i-k}, b_{i-k+1}, \dots, b_{i+k-1}, b_{i+k})$  の影響を受ける。出力  $b_j$  は0か1の値をとるので、 $(b_{i-k}, \dots, b_{i+k})$  の決め方は全部で  $2^{2k+1}$ 通り存在する。そのそれぞれの決め方に対して  $a_i$  に対する誤差  $E^{(1)}(i)$  を計算することができる。 $a_i$  の隣の  $a_{i+1}$  に対しては、 $(b_{i-k+1}, b_{i-k+2}, \dots, b_{i+k}, b_{i+k+1})$  を考える必要があるが、このうちの  $(b_{i-k+1}, b_{i-k+2}, \dots, b_{i+k-1}, b_{i+k})$  の  $2k$ 個は  $a_i$  に対するものと共通である。すなわち、 $a_i$  に対して  $(b_{i-k}, \dots, b_{i+k})$  の値を定めてしまうと、 $a_{i+1}$  に対する出力値  $(b_{i-k+1}, \dots, b_{i+k+1})$  のうちの  $b_{i+k+1}$  を除く  $2k$ 個の値は既に決まっており、 $b_{i+k+1}$  の値を定める2通りの自由度だけが残されていることになる。

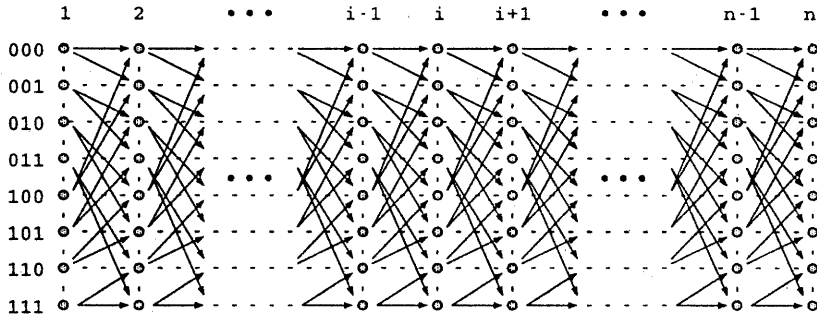


図1.  $k=1$  の場合のグラフ  $G_I$

次のようなグラフ  $G_I$  を定義する。各  $i=1, \dots, N$  に対して出力  $(b_{i-k}, \dots, b_{i+k})$  の値の  $2^{2k+1}$  通りの組み合わせに対応する頂点を作り（この集合を  $V_i$  とする）、出力値の組み合わせをその頂点のラベルとする。また、それぞれの組み合わせに対して誤差  $E^{(1)}(i)$  を評価し、これをその頂点の重みとする。このようにして合計  $N \times 2^{2k+1}$  個の頂点を作った後、各  $i=1, 2, \dots, N-1$  に対して、 $V_i$  の頂点  $u$  のラベルの最初の1個を除く部分が  $V_{i+1}$  の頂点  $v$  のラベルの最後の1個を除く部分が一致するとき、これら2頂点  $u, v$  間に枝をひく。最後に、重み0をもつ特別な2頂点  $s$  と  $t$  を追加し、 $s$  から  $V_1$  のすべての頂点に枝をひき、 $V_N$  のすべての頂点から  $t$  に向けて枝をひく。図1は  $k=1$  の場合のグラフ  $G_I$  を模式的に示したものである。

定義より明らかに、出力値  $(b_1, b_2, \dots, b_{N-1}, b_N)$  とグラフ  $G_I$  における  $s-t$  間のパスの間には1対1の対応がある。したがって、誤差の総和を最小にする解を求めるには、グラフ  $G_I$  において重みの和を最小とするパスを求めればよい。先にも述べたように、 $s$  と  $t$  以外の頂点は出力次数が2であるから、このような最小重みパスはグラフの頂点数に比例する時間、すなわち、 $O(N \times 2^{2k+1})$  で求めることができる。

アルゴリズムを正確に記述すると次のようになる。

**[最適解を求めるアルゴリズム：1次元版]**

- (1)  $(a_1, \dots, a_N)$  と整数  $k < N$  を入力する。
- (2) グラフ  $G_I$  を構成する。ただし、 $i$  に対する頂点でラベル  $p$  をもつものを  $v(i, p)$  と表わし、 $v(i, p)$  に対応する誤差を  $w(i, p)$  と書くことにする。また、 $s$  から  $v(i, p)$  に至る重み最小のパスの重みを  $L(i, p)$  とする。
- (3) 各  $p$  に対して  $L(1, p) = w(1, p)$  と初期設定した後、 $i=2, \dots, N$  に対して以下の (3-1) を実行する。
- (3-1)  $2^{2k+1}$  通りのラベル  $p$  に対して、頂点  $v(i, p)$  と枝で結ばれている2つの頂点  $v(i-1, p')$  と  $v(i-1, p'')$  に対して、 $L(i, p)$  を次のように定める。

$$L(i, p) = \min(L(i-1, p'), L(i-1, p'')) + w(i, p)$$

- (4) 最終的に、 $L(N, \cdot)$  の最小値  $L(N, p)$  を求める。

上のアルゴリズムでは  $s-t$  間のパスの重みの最小値しか求めていないが、アルゴリズムを少し修正すれば最小重みを与えるパスを出力するにすることができる。したがって、以下の定理を得る。

**[定理1]** 1次元のデジタル・ハーフターニング問題は  $O(N \times 2^{2k+1})$  の時間と記憶領域で解くことができる。

## 4 2次元の問題に対する解法

前章では問題の1次元版について考察し、最適解を線形時間で求めるアルゴリズムを示した。同様の方法で2次元版も解けるかどうかは興味のあるところであるが、実際に対応するグラフを構成してみると答

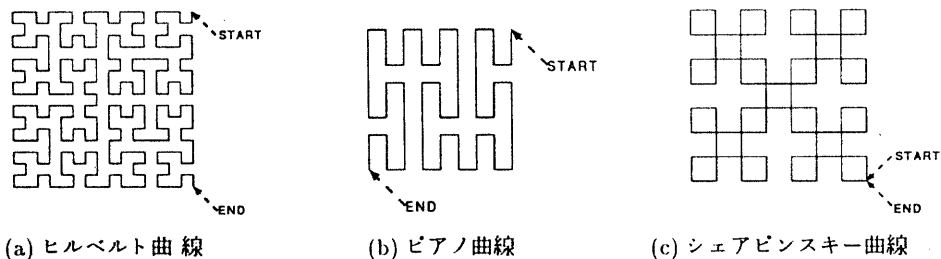


図2. スペースフィリングカーブ

が「否」であることがわかる。しかしながら、方法は全く異なるが、2次元の問題Aも実は線形時間で解くことができる。

[定理2] 2次元のデジタル・ハフトーニング問題Aを  $(N^2 \times 2^{(4k+1)^2})$  の時間で解くアルゴリズムが存在する。

(証明) 問題に対する入力は2次元の実数値行列  $A = (a_{ij})$  で、出力は式(A)を最小にする2値行列  $B = (b_{ij})$  である。 $k$ の値と具体的な入力が与えられると、この式(A)を  $N^2$ 個の2値変数  $b_{ij}$  と実数係数をもつ疑似ブール多項式として書き下すことができる。絶対値を含んだ式(A)は、各  $i$  について関連する  $2k+1$  個の変数  $(b_{i-k,j-k}, \dots, b_{i+k,j+k})$  の値の組み合わせをすべて考えて、各値の組み合わせに対する  $E(i, j)$  の値を計算して、その組み合わせに対応するブール式の係数とすることによって多項式に変換することができる。ただし、 $E(i, j)$  は画素  $(i, j)$  における誤差で、前にも定義したように次式で表される。

$$E(i, j) = \sum_{\alpha=-k}^k \sum_{\beta=-k}^k d_{\alpha, \beta} \times (a_{i+\alpha, j+\beta} - b_{i+\alpha, j+\beta})$$

このようにして最小化すべき多項式を疑似ブール多項式として表現すると、Cramaらのアルゴリズム<sup>(6)</sup>を使うことができる。このアルゴリズムは、変数を1つずつ消去していくものであるが、特に、どのブール変数  $x$  に対しても  $x$  と同じ項に現れるブール変数の個数が  $K$  個以内であれば、 $n$  変数の問題を  $O(n \times 2^K)$  の時間で解くことができる。我々の場合は  $K = (4k+1)^2 - 1$  であるから、定理を得る。 □

上の定理で、 $2^{(4k+1)^2}$  を定数と考えれば画素数  $N^2$  に比例する時間で最適解を見つけることができることがわかったが、この係数  $2^{(4k+1)^2}$  は  $k=1$  の場合ですら  $2^{25}$  となり、画像のサイズを  $1000 \times 1000 \simeq 2^{20}$  としても無視できる係数ではない。したがって、実用的には何らかの近似アルゴリズムを考える必要がある。ここでは、2次元的に配置された画素に一定の順序を与えて1次元的に並べ、これに1次元のアルゴリズムを適用する。一定の順序を与える際には、この順序での  $k$ -近傍の各要素が元の2次元座標においても十分近傍にあることが望ましい。そのような順序を与えるものとして、Hilbert 曲線、Peano 曲線、Sierpinski 曲線などの、いわゆるスペース・フィリング・カーブ (space filling curve) が知られている。図2はこれらの曲線を図示したものである。

さて、先にも述べたように、スペース・フィリング・カーブは  $N \times N$  の行列の各要素に1から  $N^2$  の番号を割り当てる方法を指定するものと考えることができる。理想的には、画素  $(x, y)$  に番号  $i$  がつけられているとき、この画素の2次元  $k$ -近傍内の多数の要素が1次元の順序づけでも近い番号になることが望ましい。なぜなら、これが可能なら、その番号づけの下では1次元の問題が2次元の問題を十分よく近似していると考えられるからである。2次元近傍として  $k$ -近傍を採用するとき、その近傍内には合計  $(2k+1)^2$  個の画素が存在するが、このうち約半数の  $k(2k+3)+2$  個をその  $(2k+1)^2$ -近傍に含むような番号づけ(図3参照)が存在し、しかもそれ以上の個数を含めるような番号づけは存在しないことが証明できる。この曲線をスネーク曲線と名付ける。ここでは紙面の制限上、詳しいことは省略する。

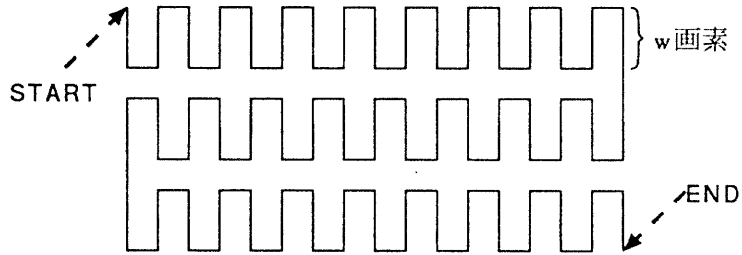


図3. 2次元近傍の点を最も多く含む番号づけ (スネーク曲線)

## 5 計算機実験

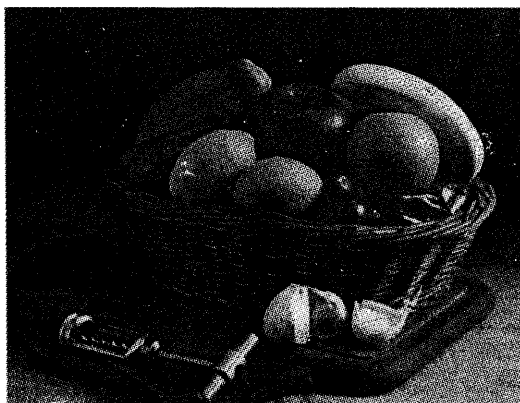
従来から提案されているデジタル・ハーフトニングの方法と比較するために計算機実験を行なった。画像入力装置(エプソン製GT8000)を用いて濃淡画像を入力し、この画像に対してハーフトニング処理を行なった。入力画像のサイズは $610 \times 480$ で、階調数は256である。図4に実験で得られた画像を示す。(a)はエラーディフュージョン法、(b)はオーダーディザ法の結果である。エラーディフュージョン法はしきい値処理で生じた誤差を伝搬させていく方法であり、その性格上、並列処理には適さないが、出力画像の画質の面では優れている。オーダーディザ法は、乱数表に似た行列を用いて多数の画素に対して異なるしきい値処理を並列に行なおうとする方法で、ハーフトニングの方法として最もよく知られている方法である。処理時間の面では優れているが、ディザ行列に起因する模様が見られるのが欠点である。(c)~(f)は前章で述べたスペース・フィリング・カーブを用いて一次元の場合の最適アルゴリズムを適用した結果である。

ここでは、シェアビンスキー曲線を用いた場合(c)(d)とスネーク曲線を用いた場合の結果(e)(f)だけを示す。ただし、(c)と(e)では近傍の大きさを決めるパラメータ $k$ を $k=1$ 、(d)と(f)では $k=3$ とし、スネーク曲線のパラメータ $w$ を(e)では $w=2$ 、(f)では $w=3$ として実行した。

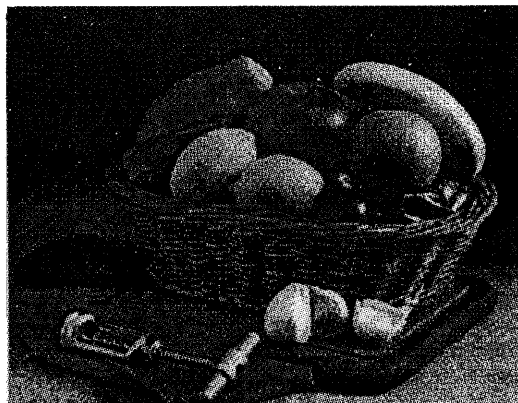
実験はすべてワークステーション(富士通S-4/EC, 20.3SPEC mark)上で行なった。図4の画像を得るのに要したCPU時間は、(a)から順にそれぞれ24秒、22秒、4分19秒、1時間48分32秒、3分58秒、1時間48分16秒であった。 $k=1$ の場合の出力画像(c)、(e)を見てもわかるように、 $k=1$ では小さすぎるようである。また、スネーク曲線を用いた処理では得られた画像に横方向の縞模様が現われている。これは、この曲線が横方向に伸びていることに起因していると考えられる。

## 6 まとめ

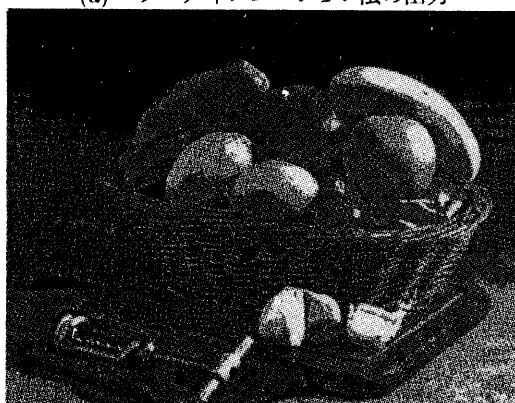
本文では、デジタル・ハーフトニングの問題をある合理的な評価尺度の下に組み合わせ最適化問題として定義して、その最適解を求める線形時間のアルゴリズムを示した。しかしながら、2次元の場合に適用するには実行時間に問題があるので、スペース・フィリング・カーブを用いた近似解法も示し、計算機実験によって従来の方法との比較を行った。実験の結果は決して芳しいものではないが、スペース・フィリング・カーブにさらに工夫を重ねることで画質は改善できるものと考えられる。また、2次元の性質を利用したヒューリスティック算法も今後検討する予定である。



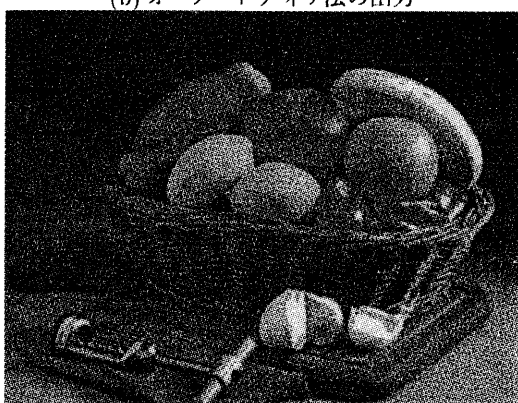
(a) エラーディフュージョン法の実出力



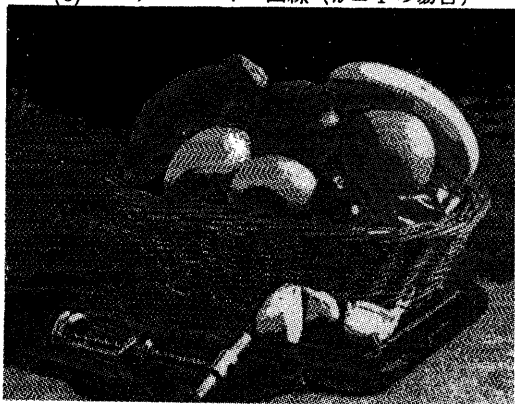
(b) オーダードイザ法の実出力



(c) シェアピンスキー曲線 ( $k=1$  の場合)



(d) シェアピンスキー曲線 ( $k=3$  の場合)



(e) スネーク曲線 ( $w=1, k=1$  の場合)



(f) スネーク曲線 ( $w=2, k=3$  の場合)

図4. 計算機実験の結果

## 謝辞

本研究のアイデアの大半は浅野、Ranjan、Roosの3名がマックスプランク研究所(ドイツ)に滞在中に得られたものである。その際、研究所の多数の研究者から貴重な助言を頂いた。特に、ディレクターのProf. Mehlhornの助言に感謝する。また、Viterbiの方法を教示頂いた大阪電気通信大学の汐崎教授に感謝する。本研究は、文部省科学研究費および大阪電気通信大学大学院総合研究費Bの援助の下に行われた。

## 参考文献

- (1) D. E. Knuth: "Digital Halftones by Dot Diffusion". ACM Trans. on Graphics, Vol. 6, No. 4, pp.245-273, 1987.
- (2) R. W. Floyd and L. Steinberg: "An adaptive algorithm for spatial grey scale", SID 75 Digest, Society for Information Display, pp.36-37, 1975.
- (3) B. E. Bayer: "An optimum method for two-level rendition of continuous-tone pictures," Conference Record, IEEE International Conference on Communications, Vol. 1, IEEE, New York, pp.(26-11)-(26-15), 1973.
- (4) J. O. Limb: "Design of dither waveforms for quantized visual signals", Bell Syst. Tech. J., 48, 7, pp. 2555-2582, 1969.
- (5) B. Lippel and M. Kurland: "The effect of dither on luminance quantization of pictures," IEEE Trans. Commun. Tech., COM-19, pp.879-888, 1971.
- (6) 汐崎陽:"情報・符合理論の基礎", オーム社, pp.83-86, 1991
- (7) Y. Crama, P. Hansen and B. Jannard: "The basic algorithm for pseudo-Boolean programming revisited", Discrete Applied Mathematics, 29, pp.171-185, 1990.
- (8) R. Ulichuey: "Digital Halftoning", MIT Press, 1987.