アルゴリズム 32−11
(1993. 3. 18)

線形計画法の教育を支援する環境に関する研究

石嶺寿子 毛利渉 岩澤京子 中森眞理雄
東京農工大学 工学部 電子情報工学科 情報工学大講座

線形計画法の理論，アルゴリズム，定式化を，大学理工系学部学生を対象に，直観的に教えるための環境を試作した．線形計画法の教科書の多くは，学問の性質上，数学的な記述が多く難解であり，初心者が教科書を読むためにはかなりの忍耐が要求される．そこで，線形計画法を視覚に訴える形で，初心者でも直観的に理解できる環境を提供することにした．

幾何学的なイメージで線形計画法を理解するために，わかりやすく，問題の構造，性質を把握できるカリキュラムを検討し，それを実現するシステムの設計・試作を行った．また，試作した環境に機能を追加することによって，教育支援システムとして実現可能であることを述べる．

An Environment for Education in Linear Programming

Hisako Ishimine Wataru Mori Kyoko Iwasawa Mario Nakamori

Department of Computer Science

Tokyo University of Agriculture and Technology

An experimental system for education of linear programming developed by the authors is reported.

Users are undergraduate students who are going to study the theory and algorithms of linear programming. In order to make it easy for students to learn, geometrical view and graphic user interface play important roles. The system includes also educational courses on (1) how to model and formulate problem s as linear programming; (2) how to solve a linear programming problem, i.e. the algorithm; (3) how is the property of the solution, e.g. feasibility, optimality, duality, etc.

1. まえがき

数理計画法，特に線形計画法を，問題の定式化，可能解と最適解の性質（存在性，双対性，感度解析，など），アルゴリズムなどについて，初心者に教えるための支援環境を作成した．

一般に，コンピュータサイエンスにおいては

問題の発生
→モデルの構築と問題の定式化
→要求仕様の記述
→問題解決方針の決定
→解決方針に沿ったアーキテクチャの設計
→アルゴリズムの設計
→インプリメント

という流れに沿って問題が解決される．大学での教育は，この流れ全般についての手法を教えることが望ましいが，上流の教育は難しいのが実状である．線形計画問題は，それ自体，頻繁に現れる問題であるとともに，理論的に簡潔であるため，問題の定式化の方法を教えるのに適切な題材である．筆者の一人は，工学部の情報系学科において「数理計画論」の講義を長く担当し，理工系の諸学問や経済学などの問題の多くは制約条件（多くは線形等式・不等式）の下で目的関数（エネルギー，熱，など）を最小化する問題として統一的に捉えられること，コンピュータサイエンスにおける種々のアルゴリズム設計手法を線形計画法の観点から整理することができること，等を示して，効果をあげてきた．同時に，数理計画法の多くの入門書が（理論的には緻密で整然としているが）初心者に多大の忍耐力を強いるものになっていることを痛感した．最低でも数十ページを精読し論理の流れと数式を追わなければ理解することができないために，佳境に入る前に挫折する学生が多いのは残念なことである．

本報告で述べる環境は，大学理工学部の２～３年生がはじめて線形計画法を学ぶときに助けとなることを目的として開発されたものである．初心者が対象であることから，視覚に訴えるように，図を多用することにした．学生は講義で聞いたことがらや書物に書いてあった事項を本環境を用いて確かめ，理解を深めることができよう．

以下に，試作した環境において想定した教育内容とそれらをどのように実現したかについて報告する．

2. 教育内容

線形計画法を理解するために，次の３項目について学習プログラムを設計した．

①問題の記述方法
②解法アルゴリズム
③双対性

「①問題の記述方法」では，いろいろな例題を解かせることによって，与えられた問題から内容を整理し，数学モデルに定式化するまでの手順を検討した．

「②解法アルゴリズム」では，アルゴリズムの進行，最適解の評価方法について，幾何学的な解釈を用いた教育内容と方法を提案した．なお，対象が初心者の学部学生であることと，単体法の理論的重要性を考え，アルゴリズムは単体法を中心とした．

「③双対性」では，主問題と双対問題の構造を幾何学的に表現し，実際に学習者の目で比較させることによって双対定理，主・双対問題の対称性を理解させる教育内容を検討した．検討した教育内容，方法について，以後学習プログラムと呼ぶ．

3. 学習プログラムの詳細

3.1 問題の記述方法

本システムでは，問題を線形計画問題として定式化する練習を課することによって，問題を把握する力，すなわち，論理的に解析したり，組み立てたりできる能力を身につけることを目標としている．そのため，問題を数学モデルとして定式化するだけではなく，問題中の要素間の関連や制約を“言葉”で定式化することを提案する．

問題の定式化は，次の手順で行う．

①問題の整理
②言葉での定式化
③数学モデルへの定式化

「①問題の整理」では，問題を構成する要素間の関係を“表”を使って整理させる．まず，穴がところどころあいた“表”とキーワード群を用意し，問題の内容に合致する言葉や数字を，対話形式で穴埋めさせて“表”を完成させる．

「②言葉での定式化」では，どのような制約のもとで何を最大にするのか，問題の中で使われている言葉を使って定式化させる．この場合に，変数の決定，関連させるべき要素などを筋道だてて考えさせる練習を

することによって，論理的な思考能力を身につけることを目標とする．

「③数学モデルへの定式化」では，①，②で行った定式化をもとに，実際の数値を使って定式化を完成させる．

3.2 解法アルゴリズム

解法アルゴリズムとして，単体法を用いる．単体法では，基底解をタブロー（付録１：タブロー１参照）と呼ばれる表で管理し，基底解に枢軸変換を施すことによって解の改善を行う．アルゴリズムの進行を可視化することによって，タブローと図形上の動きを対応させることができ，解を改善する作業が，幾何学的にどのような意味を持っているかを理解させることができる．また，最適解を，簡単に図形上で評価できることを教える．学習プログラムは，概念別に次のように分割して学習者に提供する．

①基底変数と基底解
②基底解の改善
③基底解の判定
④最適解までのプロセスの確認
⑤最適解における各変数の意味
⑥帰属価値
⑦感度分析

付録１に単体法の学習プログラムの詳細を述べる．

3.3 双対性

双対性では，主問題と双対問題を図形上に表示することによって，双対定理を実際に確認させ，主問題と双対問題が対称的な構造を持っていることを理解させる．双対性の学習プログラムを次に示す．

①双対問題の幾何学的表現
②最適解までのプロセスの確認
③主問題と双対問題の関係

付録２に双対性の学習プログラムの詳細を示す．

4. 試作システムの詳細

本システムは，将来的に線形計画法の教育支援システムとして確立するための視覚に訴える環境を提供するのが目的である．したがって，学習者には，幾何学的表現を中心とした学習内容を提供し，図形上でやりとり（質問や回答など）を可能にするため，可能解のデータを関連する図形データと対応づけて管理する．また，教育支援システムとして確立した場合には，学習者の程度や状態に合った環境を自由に利用できるように，学習プログラムを管理する部分を設計した．

4.1 全体構成

システム全体は，機能別に４ブロックに分けて管理されている（図１参照）．利用者はグラフィカル・ユーザ・インタフェースを通して学習を進行する．学習者の要求に対する処理や学習の進行は，管理部が行う．アルゴリズム部では，問題の保存，問題を解く，可能解の保存などの作業を行う．視覚部では，学習プログラムを実現する関数を蓄積している．

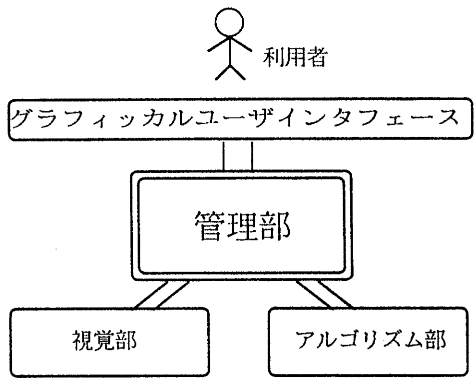


図１　システム構成図

4.2 データ構造

学習プログラムを２次元・３次元の問題に対して実現するために，アルゴリズム部と視覚部において行っているデータ管理について述べる．

アルゴリズム部では，与えられた問題を保存する問題格納テーブル，可能解のデータと求められた順番を保存する可能解格納テーブルを作成する（図２参照）．

視覚部では，（可能解が制約条件を満足する凸多面体の頂点に存在することから）交点データテーブルを作成する（図３参照）．

アルゴリズム部，視覚部で作成されるテーブルは，それぞれのデータと関係のあるテーブルとリンクされている．この関連づけによって，可能解やそれに関連するデータを図形上で参照することができる．また，

図形上のデータから可能解に対して操作を行うことも可能である.

4.3 学習プログラムの進行管理

学習プログラムの1概念は，1フレームで管理する．1フレームの内容が多量になった場合はステップに分割して管理する．1ステップ内に含まれる内容は，利用者が1画面で参照できる量や，一つの質問とする．

本システムは，将来的に線形計画法の教育支援システムとして確立することを目標とする．教育支援システムの確立は，指導や質問を行う“教師”の機能を加えることによって実現できるが，“教師”が学習者のレベル・状態に合った環境を自由に利用するために，ポインタによる学習プログラムの管理方法を提案した．

ポインタは，学習項目，項目内のフレーム，フレーム内のステップにそれぞれ一つずつ割り当てられており，ポインタの増減を行うことによって実行位置を自由に操作することができる．

学習項目として解法アルゴリズムが指定された場合のフレーム管理の例を図4に示す．

1．問題のテーブル

識別子（id）	係数 x_1	係数 x_2	定数	交点リストへのポインタ
A	2	1	－60	●→
B	2	5	－100	●→
C	0	4	－60	●→

2．可能解のテーブル

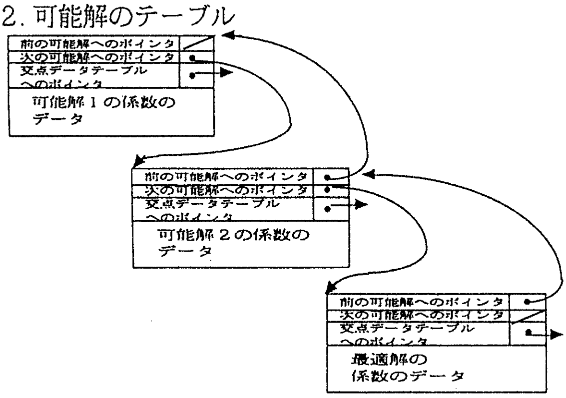


図2　アルゴリズム部で作成されるテーブル

番号	交点a x	交点a y	交点b（ピクセル値）		直線へのポインタ	可能解テーブルへのポインタ
1	20	6	190	474	●	●→
2	0	15	150	516	●	●→
3	0	0	150	450	●	●→

図3　交点データテーブル

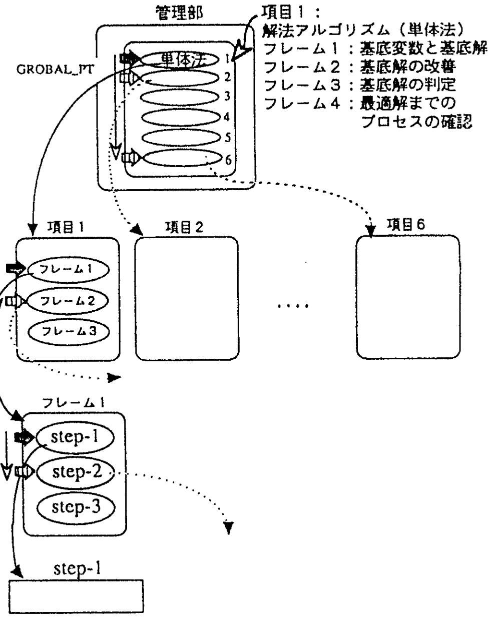


図4　管理の全体図

4.4 教育支援システムの確立

現時点では，学習プログラムの内容を視覚化する環境を提供することはできたが，教育支援システムとして確立するためには機能の追加・拡張が必要である．

まず第一に，教育支援システムの“教師”になる部分が必要である．学習者の程度に合わせた教育の進行は，“教師”が学習プログラムを管理するポインタを操作することによって行う．質問に対する学習者の回答によって，“教師”は指導したり，次に進めるべき

項目を決定する．
学習者に質問する場合，質問に関連するステップの後に，質問のステップを挿入することによって実現する．

5. あとがき

線形計画法の教育支援システムの基盤となる，環境の基本設計・試作について報告した．教育支援システムとして確立するためには，質問したり，学習者のレベルを判断する“教師”の部分が必要である．また，質問の作成，それに伴う視覚化のための処理など，現状ではサポートできていない部分が多く残っている．

問題の記述方法では，数学モデルとして定式化するだけではなく，学習者に考えさせる“くせ”をつけさせるような定式化の方法を提案したが，今後は具体的な設計・試作を行い，評価する必要があると考える．

現在は，解法アルゴリズムとして単体法だけ扱っているが，今後内点法など他のアルゴリズムも組み込むことによって，複数のアルゴリズムで同じ問題を解いた場合の比較・検討が可能となり，さらに充実したシステムとして確立できると考える．また，２次元・３次元における視覚化に加え，多次元の問題表現について検討するべきであると考える．

謝辞

本研究を進めるにあたって，貴重なご意見，ご指摘をくださった，植村俊亮教授，高橋延匡教授，西村恕彦教授，斎藤延男教授，阿刀田央一教授，本多庸悟教授，小谷善行助教授に深く感謝します．

本研究の一部は，文部省平成４年度科学研究費補助金（重点領域研究（２）「高度ソフトウェア」）04219201「アルゴリズムのデータベース化とそれを用いたソフトウェア設計手法の研究」（代表　中森眞理雄）の補助を受けた．

参考文献

[１] 伊理正夫：線形計画法，共立出版社（1990）．
[２] 今井浩：線形計画法，日科技連（1987）．
[３] 石嶺寿子：数理計画法の教育と研究を支援する環境に関する研究，平成４年度東京農工大学大学院工学研究科修士論文（1993）．
[４] 毛利渉：数理計画問題の定式化に関する教育支援環境の研究，平成４年度東京農工大学工学部卒業論文（1993）．

＜付録１＞ 単体法の学習プログラム

（1）学習プログラム①～④

可能解の改善における学習のポイント：枢軸変換の幾何学的意味を理解させることである．ここでは，初期の可能解から最適解が求められるまで次に示す内容を繰り返すことによって学習を進行する．

初期の可能解がタブロー１に与えられている．タブロー　と図形の対応づけを理解させた後（学習プログラム①），解の改善（学習プログラム②）を次の手順で教育する．

枢軸変換とは，非基底変数と基底変数の入換えによる式の変形によって解を改善する作業である．初期可能解としてタブロー１に可能解が与えられていた場合，解を改善する枢軸として係数４を選択する．非基底変数と基底変数の入換えは変数x_2とx_5の間で行われる．この入換えの幾何学的意味は，変数x_2の立場からみると，可能解が変数$x_2=0$の直線から離れ，$x_2 \neq 0$の点に移動したことを意味する．変数x_5の立場からみると，可能解が変数$x_5 \neq 0$の状態から$x_5=0$の状態へ移動したことを意味する（図５参照）．

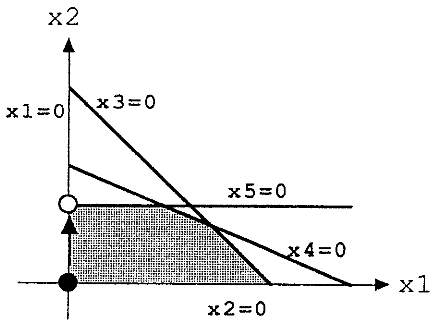


図５　解の改善

非基底変数

基底変数		x_1	x_2	定数
	x_3	2	1	−60
	x_4	2	5	−100
	x_5	0	4	−60
	目	−6	−7	0

タブロー１

学習プログラム④では，最適解までのプロセスを自由に参照させることによって利用者が理解を深めさせる（図６参照）．

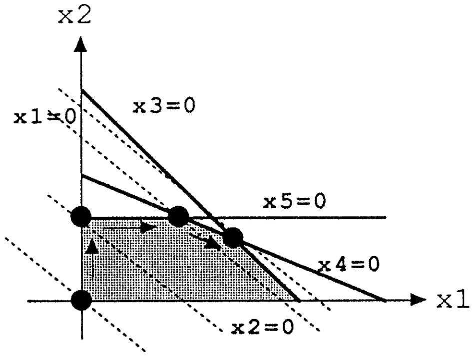


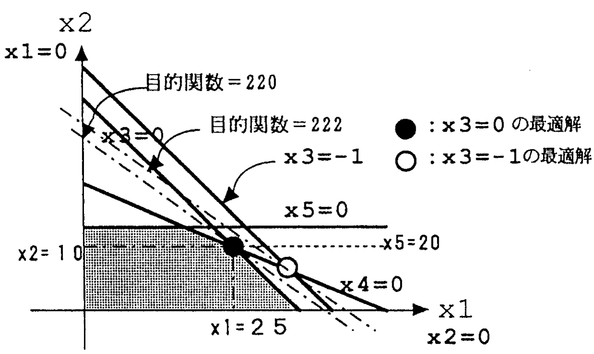
図６　最適解までのプロセスの確認

（2）学習プログラム⑤～⑦

最適解の評価方法での学習のポイント：スラック変数が制約条件の余裕を表していること，目的関数式の係数の評価方法などを理解させる．

最適解がタブロー２で与えられる場合，非基底変数のスラック変数$x_3=0$，$x_4=0$が制約ぎりぎりの状態であり，基底変数のスラック変数$x_5=20$が示す制約にはまだ余裕があることを教える（図７参照）．

目的関数式の係数は，変数が表すものの価値を表していることを教える．つまり，タブロー３において変数x_3が１単位増える（$x_3=-1$）と目的関数の値が２増加して 222 となる（図７参照）．変数x_4が１単位増えると目的関数の値が１増加して 221 となる．変数が目的関数に与える増加率を知ることができる．これを，帰属価値と呼んでいる．



非基底変数

基底変数

	x_3	x_4	定数
x_5	1	−1	−20
x_1	0.625	−0.125	−25
x_2	−0.25	0.25	−10
目	2	1	−220

帰属価値

図7　最適解の評価・帰属価値

（3）学習プログラム⑦

最適解における制約式の条件を変えた場合に，問題を最初から計算し直さずに，最適解を評価できる方法を教える．また，そのような解の評価方法が可能な条件変化の範囲について理解させる．

変数 x_4 に対する条件を ε（＝a）変化させた場合（タブロー3）の最適解はタブロー4のようになる．つまり，変化させた制約式の変数列の係数に関係する量だけ変化することを教える．図形上では，実際に ε 変化させた制約条件式とその場合の最適解を表示する．

次に，ε の変化に対して前述したように評価できる範囲を求める方法を教える．前述した評価を行えるのは，問題が同一モデル内の場合，すなわち，タブローにおいては基底変数と非基底変数の組合せが同じ場合に限られる．この範囲は，タブローから計算することによって求めることができるが，ここでは，図形上で条件式の変化の範囲を簡単に読み取れることを教える．

同一モデルということは，可能解を交点とする非基底変数の組合せが同じ状態であればよいということである．図形上に表すと，制約式 $x_3=0$ と $x_4=0$ の交点が可能解である場合は，図中のA，Bの範囲である（図8参照）．このことから，ε の変化の範囲は，$-40 \leqq \varepsilon \leqq 20$ であることがわかる．ε の範囲を越えて制約条件を変化させた場合の反例を示し，図形とタブローに表示することによって同一モデル内でだけ評価できる理由を理解させる．

	x_1	x_2	定数
x_3	2	1	−60
x_4	2	5	−100−a
x_5	0	4	−60
目	−6	−7	0

タブロー3

	x3	x4	定数
x_5	1	−1	−20+a
x_1	0.62	−0.12	−25+0.12a
x_2	−0.25	0.25	−10−0.25a
目	2	1	−220−a

タブロー4

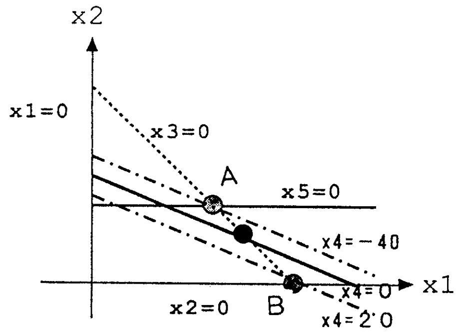


図8　条件式の増加・減少限界

＜付録2＞双対性の学習プログラム

（1）学習プログラム①～②

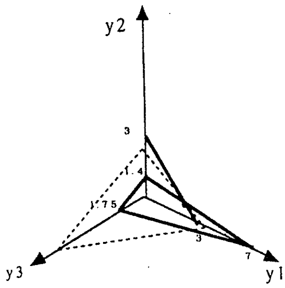
双対問題の幾何学的表現では，双対問題の幾何学的構造を表示して，タブローと対応させる．

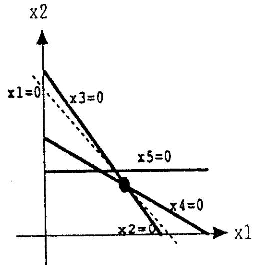
最適解までのプロセスの確認では，（主問題が最大化問題の場合）双対問題の最適解は最初に求められた可能解が最適解になる，ということを図形上で解の位置を表示しながら教える．

（2）学習プログラム③

ここでは，主問題と双対問題をそれぞれのタブローも同時に表示して幾何学的に対応づけさせる．最適解の状態を比較させることによって，双対定理を実際に

確かめることができる．また，タブローを構成している要素や，最適解が求められるまでの基底解の状態を比較させることによって，お互いに対称的な構造を持っていることを理解させる（図9参照）．





	x_3	x_4	定数
x_5	1	−1	−20
x_1	0.625	−0.125	−25
x_2	−0.25	0.25	−10
目	2	1	−220

	y_3	y_4	y_5	定数
y_5	1	0.125	−0.25	1
y_1	−1	−0.625	0.25	2
目	20	25	10	−220

図9　主・双対問題の幾何学的対応