アルゴリズム 33−16
（1993．5．29）

3個の空位を持つN×M-平面自動倉庫の最小歩数関数

川口喜三男　呉 敬軍　和田幸一

名古屋工業大学

一定の面積の自動倉庫を十分利用するためにより多くの部品を保管し，かつ効率よい出荷作業が要求されている．それを実現するために，平面自動倉庫に置ける荷台の移動操作の最小歩数についての研究がなされている．本論文は，未だ解決されていない三つの空位を持つN×M（M≧3）平面自動倉庫において任意の位置にある荷台を自動倉庫の出口まで移動するのに要する最小歩数関数を決定する．又，M＝2の場合の最小歩数関数は一般の場合の解においてM＝2と置く事によっては解は得られないので，M＝2の場合に対して最小歩数関数を別個に決定する．

The Minimum Number of Sliding Operations of Palettes in a Two-Dimensional Automatic Warehouse of Size N×M with Three Spaces.

Kimio Kawaguchi ,Jingjun Wu and Koichi Wada

Nagoya Institute of Technology

The minimum number of sliding operations(steps) for moving a palette in an automatic warehouse was considered[1]. In this paper, we consider the function of the minimum number of steps for a palette at any position in the aotumatic warehouse of size $N \times M (M \geqq 2)$ with three spaces to be moved to the exit of the automatic warehouse.

1. はじめに

平面自動倉庫内に在る荷台を倉庫の出口まで移動するに要する最小時間，換言すれば操作回数の最小値を知る事は出庫の効率化のために是非とも必要である．

奥行N，幅Mの倉庫において荷台が滞留し得る位置を座標$(n,m)(0 \leqq n \leqq N-1, 0 \leqq m \leqq M-1)$で表し，倉庫の出口は$(0,0)$とする．このような容量NMの倉庫内に在る荷台の総数を$NM-k$とする時，位置(n,m)に在る荷台Pを出口まで移動するのに要する最小時間を$T(k;n,m)$で表し,関数$T(k;n,m)$の上下界を求める研究がShimizu, Sakamoto, Tsukiyama, Numata and Kawabata[(1)]によってなされている．文献(1)の結果を表に纏めると表1のようになる．表に示されているように$k=3$に対しては，極く限られた場合を除き，未だ結果が得られていない．本論文では，$k=3$において，先ず一般の場合$M \geqq 3$に対して関数$T(3;n,m)(0 \leqq n \leqq N-1, 0 \leqq m \leqq M-1)$を決定する．この結果は$M=2$の場合に適用出来ないので，それとは別個に$M=2$に対して関数$T(3;n,m)(0 \leqq n \leqq N-1, 0 \leqq m \leqq 1)$を決定する．即ち，

［定理1］　$M \geqq 3$に対して，

$$T(3;n,0) = \begin{cases} n+\lceil n/4 \rceil+\lfloor n/4 \rfloor-1 & (1 \leqq n \leqq 11) \\ n+\lceil n/3 \rceil+1 & (n \geqq 12) \end{cases}$$

$$T(3;n,1)=n+\lceil n/3 \rceil \quad (n \geqq 1)$$

$$T(3;n,2)=n+\lceil n/3 \rceil+1 \quad (n \geqq 2,\ M \geqq 3)$$

$$T(3;n,m)=n+m+\lceil (n-m-1)/3 \rceil \quad (n \geqq m,\ 3 \leqq m \leqq M-2)$$

$$T(3;n,M-1) = \begin{cases} n+(M-1)+\lceil \{n-(M-1)\}/3 \rceil-1 & (n \in \{M, M+3, M+6\}) \\ n+(M-1)+\lceil \{n-(M-1)\}/3 \rceil & (n \geqq M-1,\ \text{但し}\ n \notin \{M, M+3, M+6\}) \end{cases} \quad (M \geqq 4)$$

$M=2$の場合：

$$T(3;n,0)=n+3\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor+\left\lfloor \left(n-1-5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor\right)/3 \right\rfloor+\left\lfloor \left(n-1-5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor\right)/4 \right\rfloor$$

$$T(3;n,1)= \begin{cases} 1 & (n=0), \\ 2 & (n=1), \\ 8 & (n=5). \end{cases}$$

$n \notin \{0, 1, 5\}$ならば

$$T(3;n,1)=n+3\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor+\left\lfloor \left(n-5\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor\right)/2 \right\rfloor$$

■

2. 自動倉庫

$N \times M$－自動倉庫(単に倉庫とも言う)$W=(G,\Pi)$は，2次元平面E^2上の格子点の集合$G=\{(n,m) \mid 0 \leqq n \leqq N-1, 0 \leqq m \leqq M-1\}$と荷台(palette)の集合$\Pi=\{P_\nu\}$からなる．特に格子点$(0,0)$を出口と呼ぶ．なお，倉庫を図示する時，$(0,0)$を左肩に置き，座標nは右方へ向かって増大，座標mは下方へ向かって増大するようにして各格子点(n,m)を方形状に描く．

各格子点上には1個の荷台が位置する事が出来，各荷台は，それが位置(n,m)，即ち格子点(n,m)上に在れば，邪魔をする荷台がない限り隣接する位置$(n \pm 1, m)$，$(n, m \pm 1)$へ本来自由に移動(slide)出来るものとする．$(n+1,m)$，$(n-1,m)$，$(n,m-1)$，$(n,m+1)$方向への移動をそれぞれ東行，西行，北上，南下と言う．

$|G|-|\Pi|=k(>0)$と置くと，常にk個の格子点上に荷台が存在しない．荷台が存在しないk個の格子点を空位(space)と呼ぶ．

空位に隣接して倉庫Wの横(縦)軸方向に連って存在するs個の荷台は空位に向かって一齊に移動動作を行う事が出来る．移動の結果，空位から視てs番目の荷台が在った位置には新たに空位が生じる．この移動には1単位時間が費やされるものとする．

同一の荷台を共有する事のないそれぞれ$s_1, s_2, \ldots, s_j (j \leqq k)$個から成る荷台のj個の列は上記の移動を同時に一齊に行う事が出来るものとする．従って，これを1回の操作(parallel sliding operation)として扱う．1回の操作毎に倉庫内の荷台及び空位の配置，即ち倉庫の状態(configuration)が変化するが，f回の操作による状態の遷移を歩(step)数fを費やした遷移と言うように表現する．

空位がk個(個所)存在しているような倉庫内の位置(n,m)に在る荷台Pを出口$(0,0)$へ移動するのに要する最小歩数を$T(k;n,m)$と表す．

3. M≧3に対するT(3；n，m)の上界の導出

［定理3.1］　

$$T(3;n,0) \leqq \begin{cases} n+\lceil n/4 \rceil+\lfloor n/4 \rfloor-1 & (1 \leqq n \leqq 11) \\ n+\lceil n/3 \rceil+1 & (n \geqq 12) \end{cases}$$

$$T(3;n,1) \leqq n+\lceil n/3 \rceil \quad (n \geqq 1)$$

$$T(3;n,2) \leqq n+\lceil n/3 \rceil+1 = n+2+\lceil (n-2-1)/3 \rceil \quad (n \geqq 2,\ M \geqq 3)$$

$$T(3;n,m) \leqq n+m+\lceil (n-m-1)/3 \rceil \quad (n \geqq m,\ M-2 \geqq m \geqq 3)$$

$$T(3;n,M-1) \leqq \begin{cases} n+(M-1)+\lceil \{n-(M-1)\}/3 \rceil-1 & (n \in \{M, M+3, M+6\}) \\ n+(M-1)+\lceil \{n-(M-1)\}/3 \rceil & (n \geqq M-1,\ \text{但し}\ n \notin \{M, M+3, M+6\}) \end{cases} \quad (M \geqq 4)$$

■

証明は文献(2)を参照．

4. M≧3に対するT(3；n，m)の下界の導出

4．1　諸補題

以下の補題の証明は文献(2)を参照．

［補題4.1.1］位置(n,m)に在る荷台Pは(a)$|n-n'|+|m-m'|-1$以下の歩数で(n',m')へ移動させる事は出来ない．又(b)長さℓの経路を辿り$\ell-1$

以下の歩数で(n', m')へ移動させる事は出来ない．

［補題4.1.2］位置(n, m)に在る荷台Pを4以下の歩数で$(n-4, m)$へ移動出来ない．

［補題4.1.3］位置(n, m)(但し$m \in \{0, M-1\}$)に在る荷台Pを6以下の歩数で$(n-5, m)$へ移動出来ない．

位置(n, m)から西へkだけ距った位置$(n-k, m)$を起点とする北西方へ延びる階段状の境界を持つ領域$W_k(n, m)$ $(m \geq 1)$を以下の様に定義する．

$$W_k(n, m) = \{(n-k-\ell+i,\ m-\ell-j) \mid \ell \geq 0, i \geq 0, j \geq 0\}$$

路$(n_0, m_0), (n_1, m_1), \cdots, (n_v, m_v)$，が条件

a) $(n_p, m_p) = (n-p, m)$ $(0 \leq p \leq k)$

b) $(n_{k+1}, m_{k+1}) = (n-k, m-1)$

c) $(n_q, m_q) \in W_k(n, m)$ $(q < v)$

を満たす時，この路を(n, m)を起点とするr_k-路と呼ぶ．

［補題4.1.4］位置(n, m) $(n > m \geq 2)$に在る荷台Pはr_0-路を辿り$2\ell+1$以下の歩数で位置$(n-\ell-1, m-\ell)$ $(\ell \geq 2)$へ到達する事は出来ない．

［補題4.1.5］位置(n, m) $(n > m+1, m \geq 1)$に在る荷台Pはr_1-路を辿り$(n-\ell-2, m-\ell)$ $(\ell \geq 1)$へ$2\ell+2$以下の歩数で到達出来ない．

［補題4.1.6］位置(n, m) $(n > m+2, m \geq 1)$に在る荷台Pはr_2-路を辿り(a)位置$(n-3, m-1)$へ4以下の歩数で到達出来ない．(b)位置$(n-2, m-1)$から次に位置$(n-2, m-2)$へ移るならば，位置$(n-3, m-2)$又は$(n-2, m-3)$へ歩数5以下で到達出来ない．又(c)位置$(n-\ell-3, m-\ell)$ $(\ell \geq 3)$へ$2\ell+4$以下の歩数で到達出来ない．

［補題4.1.7］位置(n, m) $(n > m+3)$に在る荷台Pはr_3-路を辿り(a)位置$(n-4, m-1)$，$(n-3, m-2)$へ5以下の歩数で到達出来ない．(b)位置$(n-\ell-4, m-\ell)$ $(\ell \geq 3)$へ$2\ell+5$以下の歩数で到達出来ない．

［補題4.1.8］位置(n, m) $(n > m+4, m \geq 1)$に在る荷台Pはr_4-路を辿り$(n-\ell-5, m-\ell)$ $(\ell \geq 1)$へ$2\ell+6$以下の歩数で到達出来ない．

4.2 $M \geq 3$に対する$T(3; n, m)$の下界

［1］出口附近の$T(3; n, m)$の下界

［補題4.2.1］ $0 \leq m \leq n \leq 3$，$m \leq M-1$，$M \geq 3$に対する$T(3; n, m)$の下界は表2によって与えられる．

［補題4.2.2］ $T(3; 4, 0) \geq 5$.

［補題4.2.3］ $T(3; 4, 1) \geq 6$.

［2］出口から東南方向に延びる廊上の位置に対する$T(3; n, m)$の下界

［補題4.2.4］[1] $m \leq n \leq m+1$に対して

$$T(3; n, m) = n+m$$ ■

［3］一般の位置に対する$T(3; n, m)$の下界

補題4.2.1～補題4.2.4を基礎としてn，mに関する二重帰納法により下界の証明を行う．

［定理4.2.5］ $T(3; n, 0)$

$$\geq \begin{cases} n + \lceil n/4 \rceil + \lfloor n/4 \rfloor - 1 & (1 \leq n \leq 11) \\ n + \lceil n/3 \rceil + 1 & (n \geq 12) \end{cases} \quad \cdots(4.1)$$

$$T(3; n, 1) \geq n + \lceil n/3 \rceil \quad (n \geq 1) \quad \cdots(4.2)$$

$$T(3; n, 2) \geq n + \lceil n/3 \rceil + 1 \quad (n \geq 2,\ M \geq 3) \cdots(4.3)$$

$$T(3; n, m) \geq n + m + \lceil (n-m-1)/3 \rceil \quad (n \geq m,\ 3 \leq m \leq M-2) \cdots(4.4)$$

$T(3; n, M-1)$

$$\geq \begin{cases} n + (M-1) + \lceil \{n-(M-1)\}/3 \rceil - 1 & (n \in \{M, M+3, M+6\}) \\ n + (M-1) + \lceil \{n-(M-1)\}/3 \rceil & (n \geq M-1,\ \text{但し}\ n \notin \{M, M+3, M+6\}) \end{cases}$$

$(M \geq 4) \cdots(4.5)$

(証明) 証明の方針は次の通りである．先ず正整数kに対して整数の対の集合$R(k)$を次のように定義する．

$$R(k) = \{(n, m) \mid m = 0\ \text{ならば}\ n < k-1,\ m \geq 1\ \text{ならば}\ n+m < k\}$$

$(n, m) \in R(k)$に対して式4.1～式4.5が成立すると仮定すれば，これらの式が$(n, m) \in R(k+1)$に対しても成立する事を示せば良い．

［I］ $0 \leq m \leq 3$，$m \leq M-1$，$M \geq 3$に対して定理が成立する事は補題4.2.1を用いて，又$n=4$，$m=0$及び$n=4$，$m=1$に対して定理が成立する事は補題4.2.2及び補題4.2.3を用いて示される．従って，$(n, m) \in R(6)$に対して定理は成立する．

又，一般に$m \leq n \leq m+1$に対して式4.1～式4.5成立する事は補題4.2.4から明かである．

［II］$(n, m) \in R(k)$ $(k \geq 6)$に対して式4.1～式4.5が成立すると仮定しよう．

ここでは，典型的な場合，式4.4の成立を証明する．

位置(n, m) $(n+m=k)$に在る荷台Pが出口に至るには以下の場合1)～場合7)のいずれかに当嵌まる経路を辿らなければならない(図1参照)．下記の場合j)$(1 \leq j \leq 7)$に当嵌まる経路を辿る最小歩数を$T_j(3; n, m)$で表す．

場合1)．位置(n, m) $(n \geq m+1)$に在るPが位置$(n, m-1)$を経由して出口へ向かうならば，$(n, m-1)$に至るまでに少なくとも歩数1を要するから，

$$\begin{aligned} T_1(3; n, m) &\geq T(3; n, m-1) + 1 \\ &\geq n + (m-1) + \lceil \{n-(m-1)-1\}/3 \rceil + 1 \\ &= n + m + \lceil (n-m)/3 \rceil \end{aligned}$$

場合2)．位置(n, m) $(n \geq m+2)$に在るPがr_1-路を辿り位置$(n-\ell-2, m-\ell)$ $(1 \leq \ell \leq m)$へ至り，その後出口へ向かうならば，補題4.1.5より最初の$2\ell+2$歩では$(n-\ell-1, m-\ell)$までしか到達出来ない．従って，$\ell=m$に対しては，

$$T_2(3; n, m) \geq T(3; n-m-1, 0) + 2m + 2$$

$$\geq \begin{cases} \{(n-m-1) + \lceil (n-m-1)/4 \rceil + \lfloor (n-m-1)/4 \rfloor - 1\} + (2m+2) & (m+2 \leq n \leq m+12) \\ \{(n-m-1) + \lceil (n-m-1)/3 \rceil + 1\} + (2m+2) & (n \geq m+13) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} n+m+\lceil (n-m-1)/4 \rceil + \lfloor (n-m-1)/4 \rfloor & (m+2 \leq n \leq m+12) \\ n+m+\lceil (n-m-1)/3 \rceil + 1 & (n \geq m+13) \end{cases}$$

$$\geqq \begin{cases} n+m+\lceil (n-m)/3 \rceil - 1 & (n=m+4) \\ n+m+\lceil (n-m)/3 \rceil & (m+2\leqq n\leqq m+3,\ n\geqq m+5) \end{cases}$$

$$\geqq \quad n+m+\lceil (n-m-1)/3 \rceil \quad (n \geqq m+2)$$

$\ell = m-1$ に対しては,

$$T_2(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-m,\ 1) + 2m$$
$$\geqq (n-m) + \lceil (n-m)/3 \rceil + 2m$$
$$= n+m+\lceil (n-m)/3 \rceil$$

$1 \leqq \ell \leqq m-2$ に対しては,

$$T_2(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-\ell-1,\ m-\ell) + 2\ell + 2$$
$$\geqq (n-\ell-1)+(m-\ell)+\lceil \{(n-\ell-1)-(m-\ell)-1\}/3 \rceil + (2\ell+2)$$
$$= n+m+\lceil (n-m+1)/3 \rceil$$

場合3). Pがr_2-路を辿る($n \geqq m+3$)場合. Pは位置($n-3$, $m-1$)を経由するとする. 補題4.1.6(a)より($n-3$, $m-1$)へは4以下の歩数で到達出来ないので, この時の最小歩数を$T'_3(3\,;\,n,\ m)$と書くと,

$$T'_3(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-3,\ m-1) + 5$$
$$\geqq (n-3)+(m-1)+\lceil \{(n-3)-(m-1)-1\}/3 \rceil + 5$$
$$= n+m+\lceil (n-m)/3 \rceil$$

Pは($n-3$, $m-1$)を経由しないとする. 補題4.1.6(b)から($n-3$, $m-2$), ($n-2$, $m-3$)へ歩数5以下では到達出来ないので, これらの位置を経由する場合, 最初の5歩ではそれらに最も近づいても($n-2$, $m-2$)に留まるしかない. 従って, この時の最小歩数を$T''_3(3\,;\,n,\ m)$と書くと,

$$T''_3(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-2,\ m-2) + 5$$
$$\geqq \begin{cases} (n-2)+\lceil (n-2)/3 \rceil + 5 & (m=3) \\ (n-2)+(m-2)+\lceil \{(n-2)-(m-2)-1\}/3 \rceil + 5 & (m\geqq 4) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n+3+\lceil (n-3+1)/3 \rceil & (m=3) \\ n+m+\lceil (n-m+2)/3 \rceil & (m\geqq 4) \end{cases}$$
$$\geqq \quad n+m+\lceil (n-m)/3 \rceil$$

Pがr_2-路を辿り位置($n-1$, $m-2$), ($n-1$, $m-1$)を経由する場合, 出口へ到達するまでに更に多くの歩数を要するのは明かである.

場合4). Pがr_3-路を辿る($n \geqq m+4$)場合. 補題4.1.7(a)よりPは5以下の歩数では位置($n-4$, $m-1$), ($n-3$, $m-2$)へ到達出来ない. 従って, 最初の5歩後Pは($n-3$, $m-1$)に留まるか或いは($n-2$, $m-1$)又は($n-3$, m)に在る. 従って, この場合の最小歩数は

$$T_4(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-3,\ m-1) + 5$$
$$\geqq (n-3)+(m-1)+\lceil \{(n-3)-(m-1)-1\}/3 \rceil + 5$$
$$= n+m+\lceil (n-m)/3 \rceil$$

場合5). Pが位置($n-4$, m)($n \geqq m+5$)を経由する場合. 補題4.1.2より最初の4歩では位置($n-3$, m)までしか到達出来ないので, この場合,

$$T_5(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-3,\ m) + 4$$
$$\geqq (n-3)+m+\lceil \{(n-3)-m-1\}/3 \rceil + 4$$
$$= n+m+\lceil (n-m-1)/3 \rceil$$

場合6) Pが位置($n-j$, $m+1$)($2 \leqq j \leqq 4$)を経由する場合. $m < M-2$ ならば,

$$T_6(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-j,\ m+1) + (j+1)$$
$$\geqq (n-j)+(m+1)+\lceil \{(n-j)-(m+1)-1\}/3 \rceil + (j+1)$$
$$= n+m+\lceil \{n-m+(4-j)\}/3 \rceil$$
$$\geqq n+m+\lceil (n-m)/3 \rceil$$

$m = M-2$ ならば,

$$T_6(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-j,\ m+1) + (j+1)$$
$$\geqq \begin{cases} \{(n-j)+(m+1)+\lceil \{(n-3)-(m+1)\}/3 \rceil - 1\} + (j+1) & (n\in\{m+2+j,\ m+5+j,\ m+8+j\}) \\ (n-j)+(m+1)+\lceil \{(n-3)-(m+1)\}/3 \rceil + (j+1) & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n+m+\lceil \{n-m+(2-j)\}/3 \rceil & (n\in\{m+2+j,\ m+5+j,\ m+8+j\}) \\ n+m+\lceil \{n-m+(5-j)\}/3 \rceil & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} n+m+\lceil \{n-m+(3-j)\}/3 \rceil & (n\in\{m+2+j,\ m+5+j,\ m+8+j\}) \\ n+m+\lceil \{n-m+(5-j)\}/3 \rceil & (\text{otherwise}) \end{cases}$$
$$\geqq n+m+\lceil (n-m-1)/3 \rceil$$

場合7) Pが位置($n-\ell-1$, $m+\ell$)($2 \leqq \ell \leqq M-m-1$)又は($n+\ell$, $m-\ell-1$)を経由する場合. 前者に対しては,

$$T_7(3\,;\,n,\ m) \geqq T(3\,;\,n-\ell-1,\ m+\ell) + (2\ell+1)$$
$$\geqq (n-\ell-1)+(m+\ell)+\lceil \{(n-\ell-1)-(m+\ell)-1\}/3 \rceil + (2\ell+1)$$
$$= n+m+\lceil \{n-m+4\ell-2\}/3 \rceil$$
$$> n+m+\lceil (n-m-1)/3 \rceil$$

以上を纏めると, $n+m=k$ に対して式4.4が成立すると言う結果を得る.

他の式の証明は文献(2)を参照. ■

5. M=2に対するT(3;n, m)の決定

$M=2$ の場合, 最小歩数関数 T(3;n, m) は$M \geqq 3$ の場合の解と異なる. $M \geqq 3$ の場合は目的の荷台の移動に関与する他の荷台や空位が3行に亘るができたが, $M=2$ の場合はそれが出来ないので同じ結果が得られない.

5. 1 T(3;n, m)の上界

以下の定理の証明は文献(3)を参照.

[定理5.1.1]

$$T(3\,;\,n,\ 0) \leqq n+3\left\lfloor\frac{n-1}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\left(n-1-5\left\lfloor\frac{n-1}{5}\right\rfloor\right)/3\right\rfloor + \left\lfloor\left(n-1-6\left\lfloor\frac{n-1}{6}\right\rfloor\right)/4\right\rfloor \quad (n \geqq 1)$$

$$= \begin{cases} 8\ell+1 & (n=5\ell+1,\ \ell\geqq 0). \\ 8\ell+2 & (n=5\ell+2,\ \ell\geqq 0). \\ 8\ell+3 & (n=5\ell+3,\ \ell\geqq 0). \\ 8\ell+5 & (n=5\ell+4,\ \ell\geqq 0). \\ 8\ell+7 & (n=5\ell+5,\ \ell\geqq 0). \end{cases}$$

■

[定理5.1.2]

$$T(3\,;\,n,\ 1) \leqq \begin{cases} 1\ (n=0). & 2\ (n=1). \\ 3\ (n=2). & 4\ (n=3). \\ 6\ (n=4). & 8\ (n=5). \end{cases}$$

$$T(3\,;\,n,\ 1) \leqq n+3\left\lfloor\frac{n-2}{5}\right\rfloor + \left\lfloor\left(n-5\left\lfloor\frac{n-2}{5}\right\rfloor\right)/2\right\rfloor$$

$$= \begin{cases} 8\ell+1 & (n=5\ell+1,\ \ell\geqq 1). \\ 8\ell+3 & (n=5\ell+2,\ \ell\geqq 1). \\ 8\ell+4 & (n=5\ell+3,\ \ell\geqq 1). \\ 8\ell+6 & (n=5\ell+4,\ \ell\geqq 1). \\ 8\ell+7 & (n=5\ell+5,\ \ell\geqq 1). \end{cases}$$

■

5. 2 3個の空位を用いる荷台移動に関する否定

的諸補題

以下の補題の証明は文献（３）を参照.

［補題5.2.1］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを|ｎ－ｎ'|＋|ｍ－ｍ'|－１以下の歩数で(ｎ'，ｍ')へ移動させる事は出来ない.

［補題5.2.2］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを４以下の歩数で(ｎ－４，ｍ)へ移動出来ない.

［補題5.2.3］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを４以下の歩数で位置(ｎ－３，ｍ)へ，同時に２個の空位を領域｛(ｎ'，ｍ')|ｎ'≦ｎ－４，ｍ'＝ｍ又はｎ'≦ｎ－３，ｍ'＝ｍ＋１(mod2)｝内へ移動させる事は出来ない.

［補題5.2.4］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを５以下の歩数で位置(ｎ－４，ｍ＋１(mod2))へ移動させる事は出来ない.

［補題5.2.5］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐが歩数４を費やして位置(ｎ－３，ｍ＋１(mod2))へ移動する時，空位が領域｛(ｎ'，ｍ')|ｎ'≦ｎ－４，０≦ｍ'≦１｝内に存在しない状態か又は状態C_3(ｎ－３，ｍ＋１(mod2))へ遷移する.

［補題5.2.6］状態C_4(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを２以下の歩数で位置(ｎ－２，ｍ)へ移動させる事は出来ない.

［補題5.2.7］状態C_4(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを２以下の歩数で位置(ｎ－１，ｍ)へ，同時に２個の空位を領域Ａ＝｛(ｎ'，ｍ)|ｎ'≦ｎ－２｝内へ移すか，或いは１個を領域Ａ内の(ｎ'，ｍ)の位置へ１個を領域Ｂ＝｛(ｎ"，ｍ')|ｎ"≦ｎ'－１，ｍ'≦ｍ＋１(mod2)｝内へ移す事は出来ない.

［補題5.2.8］状態C_6(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを２以下の歩数で位置(ｎ－２，ｍ)へ移動させる事は出来ない.

［補題5.2.9］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを６以下の歩数で位置(ｎ－５，ｍ)へ移動させる事は出来ない.

［補題5.2.10］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐを８以下の歩数で位置(ｎ－６，ｍ)へ移動させる事は出来ない.

［補題5.2.11］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐは，経路r_1を辿り(ａ)６以下の歩数で位置(ｎ－４，ｍ＋１(mod2))へ到達するする事は出来ない. 又(ｂ)歩数５以下で(ｎ－３，ｍ)へ移動する事は出来ない.

［補題5.2.12］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐは，経路r_2を辿り(ａ)６以下の歩数で位置(ｎ－４，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない.(ｂ)８以下の歩数で位置(ｎ－５，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない. 又(ｃ)７以下の歩数で位置(ｎ－５，ｍ)へ移動する事は出来ない.

［補題5.2.13］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐは，経路r_3を辿り(ａ)６以下の歩数で位置(ｎ－４，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない.(ｂ)８以下の歩数で位置(ｎ－５，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない. 又(ｃ)７以下の歩数で位置(ｎ－５，ｍ)へ移動する事は出来ない.

［補題5.2.14］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐは，経路r_4を辿り(ａ)歩数７以下で位置(ｎ－５，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない.(ｂ)歩数１０以下で位置(ｎ－７，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない.(ｃ)歩数１２以下で位置(ｎ－８，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない. 更に(ｄ)歩数１１以下で位置(ｎ－７，ｍ)へ移動する事は出来ない.

［補題5.2.15］位置(ｎ，ｍ)に在る荷台Ｐは，経路r_5を辿り(ａ)７以下の歩数で位置(ｎ－５，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない.(ｂ)１０以下の歩数で位置(ｎ－７，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない. 又(ｃ)１２以下の歩数で位置(ｎ－８，ｍ＋１(mod2))へ移動する事は出来ない. 更に(ｄ)１１以下の歩数で位置(ｎ－７，ｍ)へ移動する事は出来ない.

５．３　Ｔ(３；ｎ，ｍ)の下界

［定理5.3.1］

$$T(3;n,0)\geq\begin{cases}1\ (n=1),\ 2\ (n=2);\\ 3\ (n=3),\ 5\ (n=4);\\ 7\ (n=5),\ 9\ (n=6);\\ 10\ (n=7).\end{cases}$$

(証明)　(i)ｎ＝１，２，３に対して，補題5.2.1を適用する.

(ii)　ｎ＝４に対しては補題5.2.2を適用する.

(iii)　ｎ＝５に対しては補題5.2.9を適用する.

(iv)　ｎ＝６に対しては補題5.2.10を適用する.

(v)　ｎ＝７に対しては対象となる荷台Ｐが位置(６，０)を経由する場合と(７，１)を経由する場合とに分けて考える.

a)前者の場合.(６，０)に到達するのに少なくとも歩数１を要し，(６，０)から(０，０)へ移動するのに少なくとも歩数９を要する. 従って，歩数１０以上を要する.

b)後者の場合.(７，１)に移るのに少なくとも歩数１を要する. その後位置(３，０)を通過するならば，(７，１)から(３，０)までの移動に補題5.2.4より少なくとも歩数６を要する.(３，０)から(０，０)までは少なくとも歩数３を要するので，全体で少なくとも歩数１０を要する.(３，０)を通過しないならば，(３，１)を通過する.(７，１)から(３，１)までの移動に補題5.2.2より少なくとも歩数５を要する.(３，１)から(０，０)までは少なくとも歩数４を要するので，全体で少なくとも歩数１０を要する. ■

［定理5.3.2］

$$T(3;n,1)\geq\begin{cases}1\ (n=0),\ 2\ (n=1);\\ 3\ (n=2),\ 4\ (n=3);\\ 6\ (n=4),\ 8\ (n=5);\\ 9\ (n=6),\ 11\ (n=7).\end{cases}$$

(証明)　(i)ｎ＝０，１，２，３に対しては，補題5.2.1を適用する.

(ii)　ｎ＝４に対しては，補題5.2.4を適用する.

(iii)　ｎ＝５に対しては，経路によって場合を分ける. 先ず，北上が２回以上含まれる経路は長さ８以上であるから，Ｐがこの様な経路を辿る最小歩数T_{-1}(３；ｎ，１)は，T_{-1}(３；５，１)≧８.

以下は，北上１回のみの経路に限定して考えて良い．

ａ）Ｐが経路r_0を辿る場合．（５，０）から（０，０）までの移動には補題5.2.9により少なくとも歩数７を要する．従って，この時の最小歩数$T_0(3;5,1)$は，$T_0(3;5,1) \geq 7+1=8$．

ｂ）Ｐが経路r_1を辿る場合．補題5.2.11(a)によりＰが（１，０）に到達するまでに少なくとも歩数７を要する．従って，この時の最小歩数$T_1(3;5,1)$は，$T_1(3;5,1) \geq 7+1=8$．

ｃ）Ｐが経路$r_i(2 \leq i \leq 5)$を辿る場合．補題5.2.12(b)，補題5.2.13(b)，補題5.2.14(a)，補題5.2.15(a)によりＰが（０，０）に到達するまでに少なくとも歩数８を要する．従って，この時の最小歩数$T_i(3;5,1)$は，$T_i(3;5,1) \geq 8\ (2 \leq i \leq 5)$．

以上により，

$$T(3;5,1) \geq \min_{-1 \leq i \leq 5} T_i(3;5,1)=8.$$

(iv) $n=6$に対してＰが先ず（６，０）に移る場合とそうではなく（５，１）に移る場合に分ける．

ａ）前者ならば，この時の最小歩数を$T_0(3;6,1)$と書くと，$T_0(3;6,1)=T_0(3;6,0)+1=10$．

ｂ）後者ならば，この時の最小歩数を$T_1(3;6,1)$と書くと，$T_1(3;6,1)=T_1(3;5,1)+1=9$．
従って，

$$T(3;6,1) \geq \min_{0 \leq i \leq 1} T_i(3;6,1)=9.$$

(v) $n=7$に対しては，経路によって場合を分ける．

ａ）Ｐが経路r_0を辿る場合．先ず，（７，１）から（７，０）へ移動するのに歩数１を要する．（７，０）から（０，０）への移動には定理5.3.1により少なくとも歩数１０を要する．従って，この場合の最小歩数を$Ta(3;7,1)$と書くと，$Ta(3;7,1) \geq 11$．

ｂ）Ｐが経路r_1，r_2又はr_3を辿る場合．Ｐが移動の途中（４，０）から次に（３，０）へ移るならば，補題5.2.11(a)，補題5.2.12(a)，補題5.2.13(a)により最初の６操作でＰはせいぜい位置（４，０）までしか到達し得ない．（４，０）から（０，０）へは補題5.2.2により少なくとも歩数５を必要とする．又Ｐの移動の途中（４，０）から（３，０）への移動を含まないならば，（４，１）から（３，１）への移動を含まなければならない．Ｐが位置（７，１）から経路r_1，r_2又r_3を辿って（４，１）へ移動するのにはそこまでの経路の長さ以上の歩数を要する．従って少なくとも歩数５を要する．（４，１）から（０，０）への移動は補題5.2.4により少なくとも歩数６を要する．以上によりこの場合の最小歩数$T_b(3;7,1)$は$T_b(3;7,1) \geq 11$．

ｃ）Ｐが経路r_4又はr_5を辿る場合．補題5.2.14(b)，補題5.2.15(b)により，Ｐが（７，１）から（０，０）へ到達するまでに少なくとも歩数１１を要する．従って，この場合の最小歩数を$Tc(3;7,1)$と書くと，$Tc(3;7,1) \geq 11$．

ｄ）Ｐが位置（１，１）を経由する場合．補題5.2.10により，Ｐが（１，１）に到達までに少なくとも歩数９を要する．（１，１）から（０，０）への移動には少なくとも歩数２を要する．従って，この場合の最小歩数を$T_d(3;7,1)$と書くと，$T_d(3;7,1) \geq 11$．

以上によりＰが辿り得る全ての経路が尽くされている．従って

$$T(3;7,1) \geq \min_{i \in \{a,b,c,d\}} T_i(3;7,1)=11.$$

■

位置(n,m)にある荷台Ｐが西行の後，位置$(n-i,m)$で北上（南下）し，続いて任意の経路を辿って$(n', m+1 \pmod 2)$$(n' \leq n)$へ到達する時，Ｐが辿る経路を$r_i(i \geq 0)$で表す．式

$$T(3;n,0) \geq n+3\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \left(n-1-5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor\right)/3 \right\rfloor + \left\lfloor \left(n-1-5\left\lfloor \frac{n-1}{5} \right\rfloor\right)/4 \right\rfloor \quad \cdots (A)$$

は，実は定理5.3.1により$1 \leq n \leq 7$に対して成立する事が示された．又，式

$$T(3;n,1) \geq n+3\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \left(n-5\left\lfloor \frac{n-2}{5} \right\rfloor\right)/2 \right\rfloor \quad \cdots (B)$$

は，定理5.3.2により$0 \leq n \leq 7$に対して成立する事が示された．

定理5.3.1及び定理5.3.2を帰納法の前段として，式Ａ及びＢが一般に成立する事を以下において証明する．

［定理5.3.3］式Ａは$n \geq 1$に対し成立し，又式Ｂは$n \geq 0$に対し成立する．

（証明）$n \leq n'-1$に対し式Ａ及びＢが成立すると仮定すれば，$n=n'$に対しても両式は成立する事を示す．

Ｉ．先ず，式Ａを証明する．荷台Ｐが辿る経路によって場合を分ける．

（ａ）Ｐは経路r_0を辿って（０，０）へ移動するが，位置$(n'-1,1)$を経由しない場合．この場合Ｐは$(n'-1,0)$を必ず経由し，$(n'-1,0)$に至るまで少なくとも歩数３を要する．この場合の最小歩数を$Ta(3;n',0)$と書くと

$$Ta(3;n',0) \geq T(3;n'-1,0)+3$$
$$= \begin{cases} (8\ell-1)+3=8\ell+2 & (n'=5\ell+1), \\ (8\ell+1)+3=8\ell+4 & (n'=5\ell+2), \\ (8\ell+2)+3=8\ell+5 & (n'=5\ell+3), \\ (8\ell+3)+3=8\ell+6 & (n'=5\ell+4), \\ (8\ell+5)+3=8\ell+8 & (n'=5\ell+5). \end{cases}$$

（ｂ）経路r_0又はr_1を辿るＰが位置$(n'-1,1)$を経由する場合．Ｐが$(n'-1,1)$に到達するためには少なくとも歩数２を要する．従って，この場合の最小歩数$T_b(3;n',0)$は

$$T_b(3;n',0) \geq T(3;n'-1,1)+2$$
$$= \begin{cases} (8\ell-1)+2=8\ell+1 & (n'=5\ell+1), \\ (8\ell+1)+2=8\ell+3 & (n'=5\ell+2), \\ (8\ell+3)+2=8\ell+5 & (n'=5\ell+3), \\ (8\ell+4)+2=8\ell+6 & (n'=5\ell+4), \\ (8\ell+6)+2=8\ell+8 & (n'=5\ell+5). \end{cases}$$

（ｃ）Ｐが経路r_2を辿り位置$(n'-2,1)$を経由する

場合．Pが$(n'-2,1)$に到達するまでに少なくとも歩数3を費やす．従って，この場合の最小歩数$T_c(3;n',0)$は

$$T_c(3;n',0)\geq T(3;n'-2,1)+3$$
$$=\begin{cases}(8\ell-2)+3=8\ell+1 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-1)+3=8\ell+2 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell+1)+3=8\ell+4 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell+3)+3=8\ell+6 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell+4)+3=8\ell+7 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

(d)Pが経路r_3を辿り位置$(n'-3,1)$を経由する場合．その後Pが$(n'-5,0)$を経由するならば，補題5.2.13(c)により$(n'-5,0)$に至るまでに少なくとも歩数8を要するから，この時の最小歩数$T_d'(3;n',0)$は

$$T_d'(3;n',0)\geq T(3;n'-5,0)+8$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-7)+8=8\ell+1 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-6)+8=8\ell+2 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-5)+8=8\ell+3 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell-3)+8=8\ell+5 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell-1)+8=8\ell+7 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

Pが$(n'-5,1)$を経由するならば，補題5.2.13(b)により$(n'-5,1)$に至るまでに少なくとも歩数9を要するから，この時の最小歩数$T_d''(3;n',0)$は

$$T_d''(3;n',0)\geq T(3;n'-5,1)+9$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-7)+9=8\ell+2 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-5)+9=8\ell+4 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-4)+9=8\ell+5 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell-2)+9=8\ell+7 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell-1)+9=8\ell+8 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

従って，この場合の最小歩数$T_d(3;n',0)$は

$$T_d(3;n',0)\geq\min\{T_d'(3;n',0),\ T_d''(3;n',0)\}.$$

(e)Pが経路r_4又はr_5を辿りそれぞれ位置$(n'-4,1)$又は$(n'-5,1)$を経由する場合．その後Pが$(n'-7,0)$を経由するならば，それぞれ補題5.2.14(d)，補題5.2.15(d)により$(n'-7,0)$に到達するまでに少なくとも歩数12を要するから，この時の最小歩数$T_e'(3;n',0)$は

$$T_e'(3;n',0)\geq T(3;n'-7,0)+12$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-11)+12=8\ell+1 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-9)+12=8\ell+3 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-7)+12=8\ell+5 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell-6)+12=8\ell+6 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell-5)+12=8\ell+7 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

Pが$(n'-7,1)$を経由するならば，それぞれ補題5.2.14(b)，補題5.2.15(b)により$(n'-7,1)$に到達するまでに少なくとも歩数11を要するから，この時の最小歩数$T_e''(3;n',0)$は

$$T_e''(3;n',0)\geq T(3;n'-7,1)+11$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-10)+11=8\ell+1 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-9)+11=8\ell+2 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-7)+11=8\ell+4 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell-5)+11=8\ell+6 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell-4)+11=8\ell+7 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

従って，この場合の最小歩数$T_e(3;n',0)$は

$$T_e(3;n',0)\geq\min\{Te'(3;n',0),\ T_e''(3;n',0)\}.$$

(f)Pが位置$(n'-6,0)$まで西行する場合．補題5.2.10によりPは最初の8操作によって$(n'-5,0)$までしか到達し得ない．従って，この場合の最小歩数$T_f(3;n',0)$は

$$T_f(3;n',0)\geq T(3;n'-5,0)+8$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-7)+8=8\ell+1 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-6)+8=8\ell+2 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-5)+8=8\ell+3 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell-3)+8=8\ell+5 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell-1)+8=8\ell+7 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

以上で全ての経路を考慮した事になる．従って，

$$T(3;n',0)$$
$$\geq\min\{T_i(3;n',0)\mid i\in\{a,b,c,d,e,f\}\}$$
$$\geq\begin{cases}8\ell+1 & (n'=5\ell+1),\\8\ell+2 & (n'=5\ell+2),\\8\ell+3 & (n'=5\ell+3),\\8\ell+5 & (n'=5\ell+4),\\8\ell+7 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

即ち式Aは一般に成立する．

II．次に式Bを証明する．Pが辿る経路によって場合を分ける．

(a)Pが位置$(n',0)$を経由して経路r_0を辿る場合．この時の最小歩数を$T_a(3;n',1)$と書くと，

$$T_a(3;n',1)\geq T(3;n',0)+1$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell+1)+1=8\ell+2 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell+2)+1=8\ell+3 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell+3)+1=8\ell+4 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell+5)+1=8\ell+6 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell+7)+1=8\ell+8 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

(b)経路r_1を辿るPが位置$(n'-3,0)$を通過し，続いて$(n'-4,0)$を経由するならば，補題5.2.11(a)により最初の6操作ではせいぜい位置$(n'-3,0)$までしか到達出来ない．従って，この時の最小歩数$T_b'(3;n',1)$は

$$T_b'(3;n',1)\geq T(3;n'-3,0)+6$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-5)+6=8\ell+1 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-3)+6=8\ell+3 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-1)+6=8\ell+5 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell+1)+6=8\ell+7 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell+2)+6=8\ell+8 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

Pが位置$(n'-3,1)$を経由するならば，補題5.2.11(b)により$(n'-3,1)$に到達するまでに少なくとも歩数6を要する．従って，この時の最小歩数$T_b''(3;n',1)$は

$$T_b''(3;n',1)\geq T(3;n'-3,1)+6$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-4)+6=8\ell+2 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-2)+6=8\ell+4 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-1)+6=8\ell+5 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell+1)+6=8\ell+7 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell+3)+6=8\ell+9 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

この場合の最小歩数$T_b(3;n',1)$は

$$T_b(3;n',1)\geq\min\{T_b'(3;n',1),\ T_b''(3;n',1)\}.$$

(c)Pが経路r_2又r_3を辿り位置$(n'-5,0)$を経由するならば，補題5.2.12(b)，補題5.2.13(b)により$(n'-5,0)$へ到達するまでに少なくとも歩数9を要する．従って，この時の最小歩数$T_c'(3;n',1)$は

$$T_c'(3;n',1)\geq T(3;n'-5,0)+9$$
$$\geq\begin{cases}(8\ell-7)+9=8\ell+2 & (n'=5\ell+1),\\(8\ell-6)+9=8\ell+3 & (n'=5\ell+2),\\(8\ell-5)+9=8\ell+4 & (n'=5\ell+3),\\(8\ell-3)+9=8\ell+6 & (n'=5\ell+4),\\(8\ell-1)+9=8\ell+8 & (n'=5\ell+5).\end{cases}$$

Pが$(n'-5,1)$を経由するならば，補題5.2.12(c)，補題5.2.13(c)により$(n'-5,1)$に到達するまでに少なくとも歩数8を要する．従って，この時の最小歩数$T_c''(3;n',1)$は

$$T_c''(3;n',1)\geq T(3;n'-5,1)+8$$

$$\geq \begin{cases} (8\ell-7)+8=8\ell+1 & (n'=5\ell+1), \\ (8\ell-5)+8=8\ell+3 & (n'=5\ell+2), \\ (8\ell-4)+8=8\ell+4 & (n'=5\ell+3), \\ (8\ell-2)+8=8\ell+6 & (n'=5\ell+4), \\ (8\ell-1)+8=8\ell+7 & (n'=5\ell+5). \end{cases}$$

この場合の最小歩数$T_c(3;n',1)$は

$$T_c(3;n',1) \geq \min\{T_c'(3;n',1), T_c''(3;n',1)\}.$$

(d)Pが経路r_4又はr_5を辿り位置$(n'-7,0)$，続いて$(n'-8,0)$を経由するならば，補題5.2.14(c)，補題5.2.15(c)によりPは最初の12操作では$(n'-7,0)$までしか到達出来ない．従って，この時の最小歩数$T_d'(3;n',1)$は

$$T_d'(3;n',1) \geq T(3;n'-7,0)+12$$

$$\geq \begin{cases} (8\ell-11)+12=8\ell+1 & (n'=5\ell+1), \\ (8\ell-9)+12=8\ell+3 & (n'=5\ell+2), \\ (8\ell-7)+12=8\ell+5 & (n'=5\ell+3), \\ (8\ell-6)+12=8\ell+6 & (n'=5\ell+4), \\ (8\ell-5)+12=8\ell+7 & (n'=5\ell+5). \end{cases}$$

Pが位置$(n'-7,1)$を経由するならば，補題5.2.14(d)，補題5.2.15(d)によりPが$(n'-7,1)$へ到達するまでに少なくとも歩数12を要する．従って，この時の最小歩数$T_d''(3;n',1)$は

$$T_d''(3;n',1) \geq T(3;n'-7,1)+12$$

$$\geq \begin{cases} (8\ell-10)+12=8\ell+2 & (n'=5\ell+1), \\ (8\ell-9)+12=8\ell+3 & (n'=5\ell+2), \\ (8\ell-7)+12=8\ell+5 & (n'=5\ell+3), \\ (8\ell-5)+12=8\ell+7 & (n'=5\ell+4), \\ (8\ell-4)+12=8\ell+8 & (n'=5\ell+5). \end{cases}$$

この場合の最小歩数$T_d(3;n',1)$は

$$T_d(3;n',1) \geq \min\{T_d'(3;n',1), T_d''(3;n',1)\}.$$

(e)Pが位置$(n'-6,1)$まで西行する場合．補題5.2.10によりPは最初の8操作によって$(n'-5,1)$までしか到達し得ない．従って，この場合の最小歩数$T_e(3;n',1)$は

$$T_e(3;n',1) \geq T(3;n'-5,1)+8$$

$$\geq \begin{cases} (8\ell-7)+8=8\ell+1 & (n'=5\ell+1), \\ (8\ell-5)+8=8\ell+3 & (n'=5\ell+2), \\ (8\ell-4)+8=8\ell+4 & (n'=5\ell+3), \\ (8\ell-2)+8=8\ell+6 & (n'=5\ell+4), \\ (8\ell-1)+8=8\ell+7 & (n'=5\ell+5). \end{cases}$$

以上(a)，…，(e)の各項により全ての経路が尽くされている．従って，

$$T(3;n',1) \geq \min\{T_i(3;n',1) \mid i \in \{a,b,c,d,e\}\}$$

$$\geq \begin{cases} 8\ell+1 & (n'=5\ell+1) \\ 8\ell+3 & (n'=5\ell+2) \\ 8\ell+4 & (n'=5\ell+3) \\ 8\ell+6 & (n'=5\ell+4) \\ 8\ell+7 & (n'=5\ell+5) \end{cases}$$

即ち式Bは一般に成立する． ■

[定理5] M＝2ならば，

$$T(3;n,0)=n+3\left\lfloor\frac{n-1}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\left(n-1-5\left\lfloor\frac{n-1}{5}\right\rfloor\right)/3\right\rfloor+\left\lfloor\left(n-1-5\left\lfloor\frac{n-1}{5}\right\rfloor\right)/4\right\rfloor$$

$$T(3;n,1)=\begin{cases} 1 & (n=0), \\ 2 & (n=1), \\ 8 & (n=5). \end{cases}$$

$n \notin \{0, 1, 5\}$ ならば

$$T(3;n,1)=n+3\left\lfloor\frac{n-2}{5}\right\rfloor+\left\lfloor\left(n-5\left\lfloor\frac{n-2}{5}\right\rfloor\right)/2\right\rfloor$$

■

文　献

(1) K.Shimizu, A.Sakamoto, S.Tsukiyama, M.Numata and T.Kawabata: "A Consideration on a Sliding Palette Problem in a Two-Dimensional Automatic Warehouse", Trans. IEICE Japan, E74, 4, 644-652 (Apr. 1991)

(2) 川口，呉，和田："3個の空位を持つN×M－平面自動倉庫(M≧3)の最小歩数関数"，名古屋工業大学電気情報工学科川口研究室，研究報告，k9212，(1992).

(3) 川口，呉，和田："空位3，幅2の平面自動倉庫の最小歩数関数"，名古屋工業大学電気情報工学科川口研究室，研究報告，k9211，(1992).

k(≧1)	M(≧2)	n,m(n≧m, n+m≠0)	T(k;n,m)
k=1	M≧2	n=m	6n-2
		n>m	4n+2m-3
k=2	M=2	unknown	
	M≧3	n≧m	2n+m-1
k=3	M=2	unknown	
	M≧3	m+1≧n≧m	n+m
		n>m+1	unknown
k≧4	M=2	unknown	
	M≧3	n≧m	n+m

表1

m \ n	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

表2

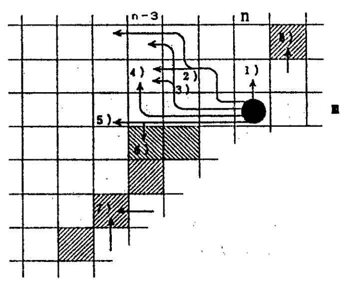

図1