アルゴリズム 33−10
(1993. 5. 28)

非交差線分列挙アルゴリズムについて

古堅真彦* 浅野考平**
*岡山県立大学 デザイン学部 **関西学院大学 理学部

Sを平面上のn点集合，Kを端点がSにあるすべての線分の集合とする．この論文で，Kの非交差線分を列挙する$O(n^2)$アルゴリズムを提案する．

An algorithm for reporting crossing free segments

Masahiko Furukata* Kouhei Asano**

*Faculty of Design, Okayama Prefectural University
Soja, Okayama 719-11, Japan
**Faculty of Science, Kwansei Gakuin University
Nishinomiya, Hyogo 662, Japan

Given a set S of n points in the plane, let K be the set of all line segments whose end points are in S. We present an $O(n^2)$ algorithm to report all crossing free segments of K.

1．序論

$S = \{ p_1, \ldots, p_n \}$を平面上の一般の位置にある点集合，KをSの点を端点とするすべての線分の集合とする．このときKは，n(n-1)/2個の元を持つ．

以下のような問題を考える．

非交差線分列挙問題

入力：S，

出力：Kの交差点を持たないすべての元．

Kの元の個数が$O(n^2)$であるので，この問題は$O(n^4)$時間の素朴なアルゴリズムによって解くことができる．本論文では非交差線分列挙問題について，$O(n^2)$の時間計算量のアルゴリズムが存在することを証明する．以下，最初に第2節において，次の問題を$O(n^2)$時間の前処理することによって$O(n)$で解くアルゴリズムが存在することを証明する．

非交差性判定問題

入力：S，およびKの１個の線分e，

出力：eが，非交差すなわち交差点を持たなければtrue，そうでなければfalse.

次に，第3節において，非交差線分列挙問題を$O(n^2)$で解くアルゴリズムが存在することを証明する．

任意の集合Aの元の数を#Aとしてあらわす．平面上の点集合Pのconvex hullをconv(P)とあらわす．ただし，conv($\{p_s, p_t\}$)を単にconv(p_s, p_t)とあらわす．また，任意の2点p_s, p_tに対してp_s, p_tを含むaffine部分空間をaff(p_s, p_t)であらわす．Sの任意の異なる４点p_s, p_t, p_u, p_vが，

$$\mathrm{conv}(p_s,\ p_t) \cap \mathrm{conv}(p_u,\ p_v) \neq \emptyset$$

であるとき，conv(p_s, p_t)とconv(p_u, p_v)は交差しているといい，それ以外のとき，conv(p_s, p_t)とconv(p_u, p_v)は交差していないという．conv(p_s, p_t)とconv(p_u, p_v)が交差しているとき，conv(p_s, p_t) ∩ conv(p_u, p_v)をconv(p_s, p_t)とconv(p_u, p_v)の交差点という．

Sの任意の１点p_sに対して、p_sを中心に、S-$\{p_s\}$の各元を内部に含まない十分小さな円を考える。$I = \{1,\ldots,n\}$，$I' = \{1',\ldots,n'\}$とする．conv(p_s, p_t)と円周との交点にtとラベルし、aff(p_s, p_t)-conv(p_s, p_t)と円周との交わりをt'とラベルする。S-$\{p_s\}$の各点に対して同様に円周上の点にラベルをつけ，円周を反時計回りに一周したときにできる巡回順列を$\rho[p_s]$とする。

Example 1.1

Figure 1.1のような$S = \{ p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \}$の場合，巡回順列$\rho[p_2]$は，以下のようになる．

$$\rho[p_2] = < 1' \ \ 3' \ \ 5 \ \ 4' \ \ 1 \ \ 3 \ \ 5' \ \ 4 >.$$

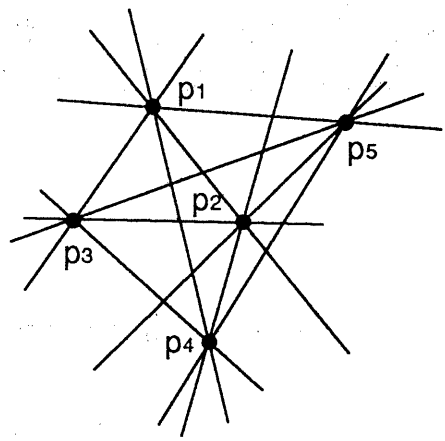

Figure 1.1　Example 1.1に対する図

S，即ちn個の点の座標を入力とし，n個の$\rho[p_s]$, s = 1, ..., n, を出力とする問題を拡張２次元ソート問題ということにする．

[1]より，

Lemma 1.1

拡張２次元ソート問題を$O(n^2)$の時間計算量で解くアルゴリズムが存在する

ことがわかる．

2．非交差性判定問題

前章の拡張２次元ソートを前処理として，以下に，非交差性判定問題に対して$O(n)$の時間計算量で処理するアルゴリズムについて述べる．

まず，Sの任意の2点p_s，p_tについて，写像$\rho'[p_s, p_t] : \{1, 2, \ldots, n-2\} \to I \cup I' - \{s, s', t, t'\}$を次のように定義する． $\rho[p_s] = (a_1, \ldots, a_{2n-2})$とし，$t = a_k$とする．各i，$i = 1, \ldots, n-2$, に対して，

$\rho'[p_s, p_t](i) = a_{k+i}$，但し，添え字は，n-2を法とする．

と定義する．すなわち，列

$$\rho'[p_s, p_t](1), \cdots\cdots, \rho'[p_s, p_t](n-2)$$

は，$\rho[p_s]$の，tの次の成分からt'の手前の成分までの部分列である．さらに，写像$\rho''[p_s, p_t] : \{1, 2, \ldots, n-2\} \to \{0, 1\}$を次のように定義する

$$\rho''[p_s, p_t](i) = \begin{cases} 0, & \text{if } \rho'[p_s, p_t](i) \in I, \\ 1, & \text{if } \rho'[p_s, p_t](i) \in I'. \end{cases}$$

Example 2.1

$\rho'[p_s, p_t]$と$\rho''[p_s, p_t]$の例を示す．

$\rho[p4] = <\ 2\ 7'\ 6\ 1'\ 5'\ 3\ 2'\ 7\ 6'\ 1\ 5\ 3'\ >$,

$(\rho'[p_4, p_6](1), \cdots, \rho'[p_4, p_6](n-2))$
$= (\ 1'\ 5'\ 3\ 2'\ 7\ )$,

$(\rho''[p_4, p_6](1), \cdots, \rho''[p_4, p_6](n-2))$
$= (\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ )$,

次に，一般の位置にある3点p_s，p_t，p_uに対して，

$$\det(\overrightarrow{p_s p_t}, \overrightarrow{p_s p_u}) > 0$$

のとき，$\overrightarrow{p_s p_t}$に対してp_uが左側にあるといい，

$$\det(\overrightarrow{p_s p_t}, \overrightarrow{p_s p_u}) < 0$$

のとき，$\overrightarrow{p_s p_t}$に対してp_uが右側にあるということにする．

Remark 2.1

(i) $I - \{s, t\}$の任意のuに対して，$\rho'[p_s, p_t](i) = u$又はu'であるiが存在する．

(ii) $\rho'[p_s, p_t](i) = u$であるiが存在するための必要十分条件はp_s, p_tとは異なる点p_uに対して，p_uが$\overrightarrow{p_s p_t}$の左側にあることであり，$\rho'[p_s, p_t](i) = u'$であるiが存在するための必要十分条件はp_s, p_tとは異なる点p_uに対して，p_uが$\overrightarrow{p_s p_t}$の右側にあることである．

Lemma 2.1

Sの任意の異なる3点p_s，p_t，p_uに対して，$\rho'[p_s, p_t](i) = u$ であるiが存在するための必要十分条件は，$\rho'[p_t, p_s](j) = u'$ であるjが存在することである．

Lemma 2.2

$\overrightarrow{p_s p_t}$に対してp_uが左側，p_vが右側にあるとする．

$$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(v') < \rho'[p_s, p_t]^{-1}(u)$$

が成り立つための必要条件は，

$$\rho'[p_t, p_s]^{-1}(v) < \rho'[p_t, p_s]^{-1}(u')$$

が成り立つことである．

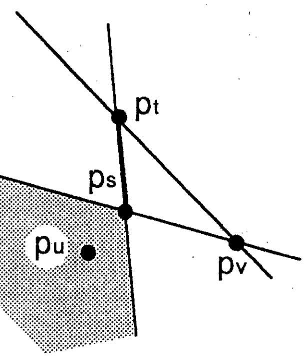

Figure 2.1 Lemma 2.2に対する図

Proof of Lemma 2.2

$$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(v') < \rho'[p_s, p_t]^{-1}(u)$$

であるのは，$\rho'[p_s, p_t]$の定義より$\overrightarrow{p_s p_v}$に対して，p_uが右側にあるときである． (Figure 2.1参照．)

このとき，$\overrightarrow{p_t p_v}$に対して，p_uが右側にある．さらに，$\overrightarrow{p_t p_v}$に対して，p_uが右側にあるための必要十分条件は

$$\rho'[p_t,\ p_s]^{-1}(v) < \rho'[p_t,\ p_s]^{-1}(u')$$

が成り立つことである．■

Kの２個の元の交差に関する命題を示す．

Lemma 2.3

Sの任意の異なる４点をp_s, p_t, p_u, p_vとする．$aff(p_s, p_t)$に対して，p_uとp_vが反対側にあるとき，$conv(p_u,\ p_v)$が，$conv(p_s,\ p_t)$と交差しないための必要十分条件は，$aff(p_s,\ p_u)$に関して，p_tとp_vが反対側にあるか，又は，$aff(p_t,\ p_u)$に関して，p_sとp_vが反対側にあることである．

$aff(p_s, p_t)$に対して，p_uとp_vが反対側にあるとき，$conv(p_u,\ p_v)$が，$conv(p_s,\ p_t)$と交差しないのはFigure 2.2の(i)または(ii)の場合に限るのでLemma2.3が成立するのは明らかである．この補題をいいかえると，以下のようなLemma 2.4が得られる．

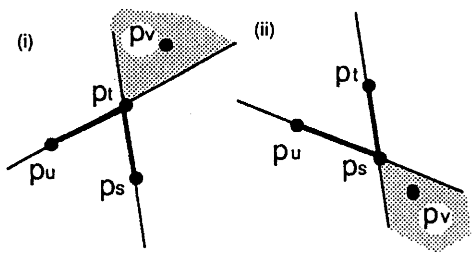

Figure 2.2　Lemma 2.3に対する図

Lemma 2.4

Sの任意の異なる４点をp_s, p_t, p_u, p_vとする．$\overrightarrow{p_s p_t}$に対して，p_uが左側，p_vが右側にあるとき，$conv(p_u,\ p_v)$が，$conv(p_s,\ p_t)$と交差しないための必要十分条件は，

$$\rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(v') < \rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(u),$$

が成り立つか，又は，

$$\rho'[p_t,\ p_s]^{-1}(u') < \rho'[p_t,\ p_s]^{-1}(v)$$

が成り立つことである．

Proof of Lemma 2.4

Remark 2.1の(ii)より，$\overrightarrow{p_s p_t}$に対してp_uが左側にあり，p_vが右側にあるための必要十分条件は$\rho'[p_s,\ p_t](j)=u$であるjと$\rho'[p_s,\ p_t](k)=v'$であるkが存在することである．

必要性を証明する．$conv(p_s,\ p_t)$と$conv(p_u,\ p_v)$が交差しないので，Lemma 2.3より，$aff(p_s,\ p_u)$に関してp_tとp_vが反対側にあるか，又は$aff(p_t,\ p_u)$に関してp_sとp_vが反対側にある場合という２つが考えられる．

$aff(p_s,\ p_u)$に関して，p_tとp_vが反対側にある場合は，$\overrightarrow{p_s p_t}$に対してp_uが左側にあり，p_vが右側にあるので，Figure 2.3の領域 Aにp_vがあることになる．故に，

$$\rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(v') < \rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(u)$$

が成り立つことになる．

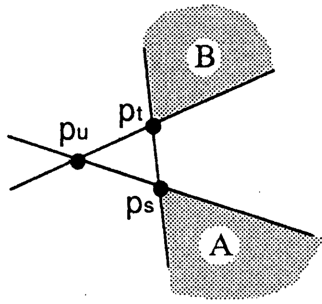

Figure 2.3　Lemma 2.4に対する図

$aff(p_t,\ p_u)$に関して，p_sとp_vが反対側にある場合も同様に，Figure 2.3の領域 Bにp_vがあることになる．故に，$\rho'[p_t,\ p_s]$においてvはu'の後に現われる．つまり，

$$\rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(u') < \rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(v)$$

が成り立つことになる．

次に，十分性を証明する．

$\rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(v') < \rho'[p_s,\ p_t]^{-1}(u)$，が成り立つ場合，$\rho[p_s]$の中で，t, t', v, v', u, u'は以下の順序で現われる．

$$\rho[p_s] = <....t.....v'.....u.....t'.....v.....u'.....>$$

故に，$\rho'[p_s, p_u](j)=t'$と$\rho'[p_s, p_u](k)=v$となるj，kが存在するので，Remark 2.1より，$\mathrm{aff}(p_s, p_u)$に関して，p_tとp_vが反対側にあることになり，Lemma 2.3より，$\mathrm{conv}(p_s, p_t)$と$\mathrm{conv}(p_u, p_v)$は交差しない．

$\rho'[p_t, p_s]^{-1}(u') < \rho'[p_s, p_t]^{-1}(v)$が成り立つ場合，$\rho[p_t]$の中で，s，s'，v，v'，u，u'は以下の順序で現われる．

$$\rho[p_t] = <.....s.....u'.....v.....s'.....u.....v'.....>$$

故に，同様に$\mathrm{aff}(p_t, p_u)$に関して，p_sとp_vが反対側に現われることになり，Lemma 2.3より，$\mathrm{conv}(p_s, p_t)$と$\mathrm{conv}(p_u, p_v)$は交差しない．■

Lemma 2.5

$\rho''[p_s, p_t](i) + \rho''[p_t, p_s](i) \neq 1$ を満たす最小のiをjとする．このとき，

$$\rho''[p_s, p_t](j) = \rho''[p_t, p_s](j) = 0$$

である．

Proof of Lemma 2.5

背理法で証明する．$\rho''[p_s, p_t](j) = \rho''[p_t, p_s](j) = 1$であると仮定する．jの最小性より，$\#\{i:\rho''[p_s, p_t]=1, 1 \leqq i \leqq j\}=\#\{i:\rho''[p_t, p_s]=0, 1 \leqq i \leqq j\}+1$ である．従って，$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(v') \leqq j$ かつ $\rho'[p_t, p_s]^{-1}(v)>j$ であるvが存在する．また，$\#\{i:\rho''[p_s, p_t]=0, 1 \leqq i \leqq j\}=\#\{i:\rho''[p_t, p_s]=1, 1 \leqq i \leqq j\}-1$ であるから，$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(u)>j$ かつ$\rho'[p_t, p_s]^{-1}(u') \leqq j$ であるuが存在する．このとき，

$$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(v')<\rho'[p_s, p_t]^{-1}(u),\ かつ,$$
$$\rho'[p_t, p_s]^{-1}(v) >\rho'[p_t, p_s]^{-1}(u')$$

である．これは，Lemma 2.2に矛盾する．■

また，Figure 2.4より次のLemmaが成立することがわかる．

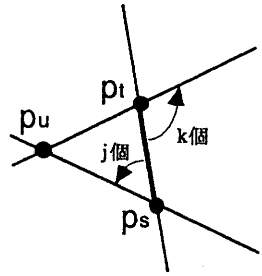

Figure 2.4 Lemma 2.6に対する図

Lemma 2.6

p_uはp_sp_tの左側にあり，$\rho''[p_s, p_t]^{-1}(u)=j$，$\rho''[p_t, p_s]^{-1}(u')=k$とする．端点を$p_u$とし，$\mathrm{conv}(p_s, p_t)$と交わらない線分の個数は$\#\{i : \rho''[p_s, p_t](i)=1,\ 1 \leqq i<j\}+\#\{i : \rho''[p_t, p_s](i)=0,\ k<i \leqq n-2\}$である．

以上よりLemma 2.7が得られる．

Lemma 2.7

Sの任意の異なる２点p_s，p_tに対して，$\mathrm{conv}(p_s, p_t)$ がKのどの元とも交差しないための必要十分条件は，

$$\rho''[p_s, p_t](i) + \rho''[p_t, p_s](i) = 1,\quad \mathrm{mod}\ 2,\ i = 1, ..., n-2,$$

が成り立つことである．

Proof of Lemma 2.7

必要性を背理法によって証明する．$\rho''[p_s, p_t](i) + \rho''[p_t, p_s](i) = 0$を満たすような最小のiをjとする．Lemma 2.5より，$\rho''[p_s, p_t](j) = \rho''[p_t, p_s](j) = 0$である．$\#\{ i : \rho''[p_s, p_t]=0, 1 \leqq i \leqq j\} = \#\{ i : \rho''[p_t, p_s] = 1, 1 \leqq i \leqq j\}+1$であるから，$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(u) \leqq j$ かつ$\rho'[p_t, p_s]^{-1}(u')>j$であるuが存在する．また同様にして，$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(v') \leqq j$ かつ$\rho'[p_t, p_s]^{-1}(v)>j$であるvが存在する．
故に，

$$\rho'[p_s, p_t]^{-1}(u) < \rho'[p_s, p_t]^{-1}(v'),\ かつ,\ \rho'[p_t, p_s]^{-1}(v) < \rho'[p_t, p_s]^{-1}(u')$$

が成り立ち，Lemma 2.4の対偶より，$\mathrm{conv}(p_s, p_t)$と$\mathrm{conv}(p_u, p_v)$は交差することになる．これは，

$conv(p_s, p_t)$ は，Kのどの元とも交差しない，という条件に反することになる．

次に十分性を証明する．

(1)$\overline{p_s p_t}$に対して左側にある点の集合をS_lとする．このとき，

$\#S_l=\#\{u : \rho''[p_s, p_t](u)=1\}=\#\{u : \rho''[p_t, p_s](u)=0\}$である．$\#S_l$を$n_l$とおく．

(2)$\overline{p_s p_t}$に対して右側にある点の集合をS_rとする．このとき，

$\#S_r=\#\{u : \rho''[p_s, p_t](u)=0\}=\#\{u : \rho''[p_t, p_s](u)=1\}$である．$\#S_r$を$n_r$とおく．

$conv(p_s, p_t)$と交わらない線分の個数を数える．S_lの点どうしを結ぶ線分，S_rの点どうしを結ぶ線分は$conv(p_s, p_t)$と交わらず，これらの線分の個数は，$\binom{n_l}{2}+\binom{n_r}{2}$である．

次に，S_lの点と，S_rの点を結び，$conv(p_s, p_t)$と交わらない線分の個数が$n_l n_r$であることを示す．Lemma 2.6より，S_lの点p_uに対して，$\rho''[p_s, p_t]^{-1}(u)=j$，$\rho''[p_t, p_s]^{-1}(u')=k$とするとき，$\#\{i : \rho''[p_s, p_t](i)=1,\ 1\leq i<j\}+\#\{i : \rho''[p_t, p_s](i)=0,\ k<i\leq n-2\}$を求め，これらの$S_l$のすべての点についての総和が，求めるべき線分の個数である．

このLemmaの仮定より，

$\#\{i : \rho''[p_t, p_s](i)=0,\ k<i\leq n-2\}=\#\{i : \rho''[p_s, p_t](i)=1,\ k<i\leq n-2\}$

である．$n_l=\#\{u : \rho''[p_s, p_t](u)=1\}$ かつ $n_r=\#\{u : \rho''[p_s, p_t](u)=0\}$であるから，

上記の総和は$n_l n_r$である．

故に，$conv(p_s, p_t)$と交わらない線分の個数は

$$n_l n_r+\binom{n_l}{2}+\binom{n_r}{2}=\binom{n}{2}$$

である．従って，$conv(p_s, p_t)$は他のどの線分とも交差しない．■

Algorithm 2.1

入力：S，$\rho[p_s]$，$\rho[p_t]$

出力：Kの他の元に対して，$conv(p_s, p_t)$が非交差であるならばtrue，そうでなければfalse.

```
begin
    ρ[p_s], ρ[p_t]からρ'[p_s, p_t], ρ'[p_t, p_s]を決定する;
    ρ'[p_s, p_t], ρ'[p_t, p_s]からρ"[p_s, p_t], ρ"[p_t, p_s]を決定する;
    for i := 1 to n-2 do
        if ρ"[p_s, p_t](i) + ρ"[p_t, p_s](i) <> 1 then
            return false;
    return true;
end.
```

Lemma 2.8

Algorithm 2.1は，非交差性判定問題を$O(n)$の時間計算量で解く．

Proof of Lemma 2.8

$\rho'[p_s, p_t]$と$\rho'[p_t, p_s]$は，共に長さがn-2で，それぞれの各成分は，一定時間内で$\rho[p_s]$と$\rho[p_t]$から決定できるので，$\rho'[p_s, p_t]$と$\rho'[p_t, p_s]$は，$O(n)$の時間計算量で決定できる．また，$\rho'[p_s, p_t]$と$\rho'[p_t, p_s]$から$\rho''[p_s, p_t]$と$\rho''[p_t, p_s]$を$O(n)$の時間計算量で決定できることは明白である．for文は，n-2回のループを行ない，その中のif文は一定時間内に処理できるので，$O(n)$の時間計算量で終了する．Lemma 2.7より，このfor文によって$conv(p_s, p_t)$が非交差であるか否かを判定できることは明らかである．故に，Lemma 2.8が成り立つ．■

Theorem 2.1

平面上の点集合Sに対して適当な$O(n^2)$の時間計算量の前処理を施せば，Sの点を端点とする任意の線分に対する非交差性判定問題を$O(n)$の時間計算量で解くアルゴリズムが存在する．

Proof of Theorem 2.1

Lemma 1.1とLemma 2.8より，拡張２次元ソートをSに対する前処理と考えると，非交差性判定問題を$O(n)$の時間計算量で解くアルゴリズムが存在する．■

３．非交差線分列挙問題

Sの任意の部分集合Pに関して，Pのconvex hull，conv(P)の境界である多角形の頂点集合を反時計回りの順にならべて，その列を巡回リストにする．すなわち，境界のpに対して，反時計回りに次の頂点をsucc(p)とし，時計回りに次の頂点ををpred(p)とする．

以下，Sを入力し，Sを端点に持つ線分の集合Kの非交差線分を列挙するアルゴリズム

を構成する．

Algorithm 3.1 ｛候補となる線分の集合K_0を求める．｝

```
begin
   Sの各点をx座標の昇順にソートし，その列を(q_1,q_2,…,q_n)とする;

    succ(q_1) := q_2; pred(q_1) := q_2;
    succ(q_2) := q_1; pred(q_2) := q_1;
    K_0 := {conv(q_1,q_2)};

    for i := 3 to n do begin
      s := q_{i-1};
      K_0 := K_0 ∪ {conv(q_i,s)};
      while   succ(s)がq_isに対して右にあるdo
      begin
        s := succ(s);
        K_0 := K_0 ∪ {conv(q_i,s)};
      end;
      t := q_{i-1};
      while   pred(t)がq_itに対して左にあるdo
      begin
        t := pred(t);
        K_0 := K_0 ∪ {conv(q_i,t)};
      end;
      pred(s) := q_i;    succ(q_i) := s;
      succ(t) := q_i;    pred(q_i) := t;
    end;
end.
```

ここで，for文のi=kのときにたどられた点の集合をL_kとする．L_kは，$\mathrm{conv}\{q_i : 1 \leq i \leq k\}$の点から$\mathrm{conv}\{q_i : 1 \leq i < k\}$の点を除いてできた集合である．

Lemma 3.1

K - K_0の各線分は他の線分と交差する．

Proof of Lemma 3.1

$\mathrm{conv}(q_j, q_k)$, $j<k$ が K - K_0の線分であるとする．

s，t を，上のアルゴリズムの i = k について実行されたときの最後のs，tの値とすると，$\mathrm{conv}\{q_i : 1 \leq i < k\}$は，$\overrightarrow{q_k s}$の左側，$\overrightarrow{q_k t}$の右側にある．$q_j$は$L_k$に属さず，$\overrightarrow{q_k q_j}$の左側および右側に$L_k$の点が存在するので，$\mathrm{conv}(q_k, q_j)$と交差する線分が存在する．■

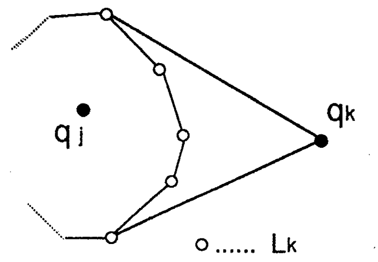

Figure 3.1　Lemma 3.1に対する図

Lemma 3.2

$\#K_0 = O(n)$が成り立つ．

Proof of Lemma 3.2

$\#K_0 = \Sigma$ $\{\#L_k : 3 \leq k \leq n\}$ である．また，$i \neq j$ ならば# $(L_j \cap L_k) \leq 2$である．従って，$\cup$ $\{L_k : 3 \leq k \leq n\} \subseteq S$であることより，$\#K_0 \leq$ 3n-6である．■

Algorithm 3.1を用い，非交差線分である可能性のある線分の集合K_0を求め，前処理の後，K_0に属する各線分についてAlgorithm2.1を用いて非交差性を判定すれば，非交差線分を列挙できる．この方法の時間計算量は，$O(n^2)$である．

Bibliography

[1] Gunther Rote, Gerhard Woeginger, Counting convex k-gons in planar point sets, Inform. Process. Lett. 41 (1992), 191-194.