多重グラフの均等辺彩色アルゴリズム

中野眞一　西関隆夫
東北大学工学部情報工学科

あらまし

グラフの各点の隣接辺をできるだけ均等に彩色する問題をグラフの均等辺彩色問題とよぶ．グラフの均等辺彩色はスケジューリング問題等に応用できる．これまでグラフを k色で均等辺彩色する $O(k|E|^2)$ 時間アルゴリズムが知られていたが，本文では $O(|E|^2/k+|V||E|)$ 時間アルゴリズムを与える．

An Algorithm for Nearly Equitable Edge-coloring of Multigraphs

Shin-ichi Nakano　Takao Nishizeki
Tohoku University

Abstract

A nearly equitable edge-coloring of graphs is a coloring such that edges incident to each vertex are colored equitably in number. The nearly equitable edge-coloring has applications to scheduling problems. This problem was solved in $O(k|E|^2)$ time where k is the number of colors. We present a more efficient algorithm for this problem that run in $O(|E|^2/k+|V||E|)$ time.

1. まえがき

グラフの各点の隣接辺をできるだけ均等に彩色する問題を考えよう．各点に接続する任意の 2 色で塗られている辺の本数の差が高々2 であるようにグラフのすべての辺を彩色することをグラフの均等辺彩色という．均等辺彩色の例を図 1 に示す．

グラフの均等辺彩色はスケジューリング等に応用できる．たとえばコンピュータネットワークにおけるファイル転送のスケジューリングは均等辺彩色に次のように定式化できる [7]．コンピュータはグラフの点に対応させ，二つのコンピュータ u と vの間で送受信したいファイルの本数だけ点 u と vを多重辺で結ぶ．こうして得られるグラフ G でファイル転送要求を表現する．ただし，ファイルはすべて同じ長さであり，回線の伝送速度はすべて同じであるとする．すなわち各ファイルの転送には 1 単位時間かかるとしよう．各コンピュータに常にほぼ一定の通信負荷がかかるように，k単位時間ですべてのファイルの転送を終了するスケジュールがグラフの均等辺彩色に対応する．均等辺彩色において同じ色で塗られた辺の集合が同じ時間に送受信されるファイルの集合に対応する．コンピュータの負荷がある時刻に過度に集中するとオーバーヘッドにより本質的でない負荷がさらに加わってしまうので上記のような負荷をできるだけ分散させるスケジューリングは有効である．

任意のグラフ G, 正整数 kに対して k色を使用した均等辺彩色が存在することが証明されている [4]．この証明から計算時間が $O(k|E|^2)$ であるアルゴリズムが容易に得られる．ここで $|V|$ は G の点数であり，$|E|$ は辺数である．本文では任意のグラフ G, 正整数 kに対して k色を使用した均等辺彩色が存在することの別証明を与える．この証明からグラフを均等辺彩色する高速なアルゴリズムが得られ，その計算時間は $O(|E|^2/k+|V||E|)$ である．本文の証明は基本的には Vizing の定理の別証明 [2] の手法を使用しているが，この手法を均等辺彩色に利用するために多くの新しい手法を使用している．

2. 準備

本章では用語の定義，すでに知られている結果および交互歩道のスイッチという均等辺彩色の手法について説明する．

本文では自己ループはないが多重辺はありうる多重グラフ $G=(V,E)$ を扱い，単にグラフと呼ぶ．ここで Vは G の点集合であり，Eは辺集合である．グラフの辺の彩色に使用する k個の色の集合を Cとする．色 $c\in C$で塗られている辺を c 辺と呼ぶ．点 v に接続する c 辺の数を $d(v,c)$ と書く．任意の 2 色 $c_1,c_2\in C$, 任意の点 $v\in V$において $|d(v,c_1)-d(v,c_2)|\le 2$ が成立するように G のすべての辺を彩色することを G の k個の色を使った均等辺彩色と呼ぶ．

任意のグラフ G, 正整数 kに対して k色を使用した均等辺彩色が存在することが次のように証明できる [4]．最初に G の辺を k個の色で適当に彩色する．点 $v\in V$で色 $c_1,c_2\in C$について $|d(v,c_1)-d(v,c_2)|>2$ であったとしよう．2 個の色 $c_1,c_2\in C$によって誘導される部分グラフを $G(c_1,c_2)$ とする．1 点 $u\notin V$と，u と $G(c_1,c_2)$ 中のすべての奇数次数の点を結ぶ辺を $G(c_1,c_2)$ に加えたグラフを $G^+(c_1,c_2)$ とする．$G^+(c_1,c_2)$ はオイラーグラフであるからサイクルに分割できる．各サイクルの辺を色 c_1と c_2で交互に塗り変え，加えた点と辺を除去すると，任意の点 $x\in V$で $|d(x,c_1)-d(x,c_2)|\le 2$ が成立する．以上の操作を繰り返すことで均等辺彩色が得られる．この証明からグラフを均等辺彩色するアルゴリズムが得られる．

$$Cost=\sum_{v\in V}\sum_{c_1\in C}\sum_{c_2\in C}|d(v,c_1)-d(v,c_2)|$$

と定義すると，

$$
\begin{aligned}
Cost &\le \sum_{v\in V}\sum_{c_1\in C}\sum_{c_2\in C}|d(v,c_1)| \\
&= \sum_{c_2\in C}\{\sum_{v\in V}\sum_{c_1\in C}|d(v,c_1)|\} \\
&= \sum_{c_2\in C} 2|E| \\
&= 2k|E|
\end{aligned}
$$

である．一度の塗り変えで $Cost$ は 2 以上減少し，一回の塗り変えに $O(|E|)$ 時間かかるのでこのアルゴリズムの計算時間は $O(k|E|^2)$ である．

任意の 2 色 $c_1, c_2 \in C$，任意の点 $v \in V$において $|d(v,c_1) - d(v,c_2)| \le 1$ なる辺彩色は存在しないかもしれないことに気をつけよう．$k = 2$ かつ G が奇数長の閉路のときそのような辺彩色は存在しない．$k = 3$ のとき図 2 のグラフにはそのような辺彩色は存在しない．

$E(uv)$ は点 u と vを結ぶ (多重) 辺の集合を表す．G に $|E(uv)| \ge k$なる多重辺 $E(uv)$ が存在するとき G の $E(uv)$ から k本の辺を取り除いて得られるグラフを G_1とする．もし G_1 の k色を使用した均等辺彩色が得られれば，削除した k本の辺にそれぞれ異なる k色を与えることにより G の均等辺彩色が得られる．よって G の任意の 2 点 u, vで $|E(uv)| < k$であるとしても一般性を失わない．よって以下では G の任意の 2 点 u, vで $|E(uv)| < k$であるとする．以上を考えると，本文のアルゴリズムの計算時間は $O(\min\{|E|^2/k + |V||E|, k|V|^4\})$ となる．

点 wの隣接点の集合を$\Gamma(w)$ と書く．点 $v \in V$の次数を $d(w) = \sum_{v\in\Gamma(w)}|E(vw)|$ とする．グラフ $G' = G - w$はグラフ G から点 w及び wに接続するすべての辺を削除したグラフであるとしよう．

$l(v) = \min_{c\in C} d(v,c)$ と定義する．$l(v)$ は vに接続する辺の塗り変えによって変化するかもしれないことに気を付けよう．各点 $v \in V$において Cの部分集合 $C_0(v), C_1(v), C_2(v)$ を以下のように定める．

$$
\begin{aligned}
C_0(v) &= \{c \in C \mid d(v,c) = l(v)\} \\
C_1(v) &= \{c \in C \mid d(v,c) = l(v) + 1\} \\
C_2(v) &= \{c \in C \mid d(v,c) = l(v) + 2\}
\end{aligned}
$$

$|C_0(v)| \ne 0$ である．もし G が均等辺彩色されていれば任意の点 $v \in V$で $C = C_0(v) \cup C_1(v) \cup C_2(v)$ である．

交互道のスイッチは通常の辺彩色によく使用される手法である [5,8,9,10]．均等辺彩色でも同様の手法を用いる．ただし道のかわりに歩道を用いる．G の歩道 Wとは $v_0e_1v_1e_2v_2, \cdots, v_{l-1}e_lv_l$ の形をした辺点列である．ただし各 i について $e_i \in E(v_{i-1}v_i)$ とし，Wに同じ点は 2 度以上現れるかもしれないが，同じ辺は 2 度以上現れないものとする．v_0を Wの始点，v_lを Wの終点という．$v_0 = v_l$なる歩道を閉路と呼ぶ．Wに含まれる辺数を Wの長さといい，$|W|$ で表す．相異なる色$\alpha, \beta \in C$で交互に塗られた歩道 Wのすべてのα辺をβで，すべてのβ辺をαで塗り換えることを Wをスイッチするという．Wをスイッチしても均等辺彩色のままであるように，$\alpha\beta$交互歩道 $W = v_0e_1v_1e_2v_2, \cdots, v_{l-1}e_lv_l$ を次のように定義する．

(1) Wの辺は色αとβで交互に塗られている (i が奇数であるとき辺 e_iはβ辺，i が偶数であるとき辺 e_iはα辺である)

(2) (始点条件) $v_0 \ne v_l$のとき $d(v_0,\beta) > d(v_0,\alpha)$ である．$v_0 = v_l$のとき $d(v_0,\beta) \ge d(v_0,\alpha) + 2$ である．

(3) (終点条件) $|W|$ が偶数ならば $d(v_\ell,\alpha) > d(v_\ell,\beta)$, $|W|$ が奇数ならば $d(v_\ell,\beta) > d(v_\ell,\alpha)$ である．

(2) と (3) より交互歩道は偶数長の閉路でない．

[補題 1]　グラフ G が均等辺彩色されているとき任意の$\alpha\beta$交互歩道 Wをスイッチしても均等辺彩色のままである．すなわち任意の点 $v \in V$, 任意の色 $c_1, c_2 \in C$について $|d(v,c_1) - d(v,c_2)| \le 2$ である．

(証明) Wのスイッチは任意の色 $c \neq \alpha,\beta$について $d(v,c)$ を変えない．Wのスイッチは始点 v_0および終点 v_ℓにおいて $d(v_0,\alpha)$,$d(v_0,\beta)$, $d(v_\ell,\alpha)$,$d(v_\ell,\beta)$ のみを変える．したがって，始点と終点についてのみ均等辺彩色の条件が保存されることを確認すればよい．もし Wが奇数長の閉路ならば，スイッチ前は$\alpha \in C_0(v_0)$ かつ$\beta \in C_2(v_0)$ であり，スイッチ後は$\alpha \in C_2(v_0)$ かつ$\beta \in C_0(v_0)$ である．よって均等辺彩色のままである．これより Wは奇数長の閉路でないとしてよい．定義より Wは偶数長の閉路でないから Wは閉路でないとしてよい．

スイッチ前は始点において (1)-(3) のいずれかが成立する．

(1) $\alpha \in C_0(v_0)$ かつ$\beta \in C_1(v_0)$

(2) $\alpha \in C_0(v_0)$ かつ$\beta \in C_2(v_0)$

(3) $\alpha \in C_1(v_0)$ かつ$\beta \in C_2(v_0)$

(1) のときスイッチ後は$\alpha \in C_1(v_0)$ かつ$\beta \in C_0(v_0)$ が成立する．(2) のときスイッチ後は$\alpha \in C_1(v_0)$ かつ$\beta \in C_1(v_0)$ または$\alpha \in C_0(v_0)$ かつ$\beta \in C_0(v_0)$ が成立する．もし $C_0(v_0) = \{\alpha\}$ だったならば，スイッチ後は$\alpha \in C_0(v_0)$ かつ$\beta \in C_0(v_0)$ となることに注意しよう．(3) のときスイッチ後は$\alpha \in C_2(v_0)$ かつ$\beta \in C_1(v_0)$ が成立する．このように任意の色 $c_1, c_2 \in C$について $|d(v_0,c_1) - d(v_0,c_2)| \le 2$ が成立する．終点 v_ℓにおいて任意の色 $c_1, c_2 \in C$について $|d(v_\ell,c_1) - d(v_\ell,c_2)| \le 2$ が成立することも同様に示すことができる．

(証明終)

v_0を始点とする$\alpha\beta$交互歩道の一つを $W(\alpha,\beta,v_0)$ と書くことにする．$W(\alpha,\beta,v_0)$ をスイッチすると $C_0(v), C_1(v), C_2(v)$ は vが Wの始点もしくは終点のときのみ変化する．次の補題が成立する．

[補題 2]　グラフ $G = (V,E)$ が k色で均等辺彩色されているとする．もし $d(v_0,\beta) > d(v_0,\alpha)$ ならば$\alpha\beta$交互歩道 $W(\alpha,\beta,v_0)$ が存在する．また $W(\alpha,\beta,v_0)$ は $O(|E|/k + |V|)$ 時間で探すことができる．

(証明) 以下の手順で$\alpha\beta$交互歩道 Wを見つけることができる．まず点 v_0に接続するβ辺 $e_1 \in E(v_0v_1)$ を交互歩道の辺として選ぶ．$d(v_0,\beta) > d(v_0,\alpha)$ よりそのようなβ辺はかならず存在する．もし $d(v_1,\alpha) < d(v_1,\beta)$ ならば $v_0e_1v_1$は$\alpha\beta$交互歩道である．もし $d(v_1,\alpha) \ge d(v_1,\beta)$ ならばα辺 $e_2 \in E(v_1v_2)$ が v_1に接続しているので，α辺 e_2を Wの辺として付け加える．以下同様にして同じ辺が 2 度以上現れないようにα辺とβ辺を交互に選び，Wに付け加えることを始点，終点条件が満たされるまで繰り返す．

特に Wが点 v_0に戻ってきた場合には次のようにする．β辺で戻ってきた場合$\alpha \in C_0(v_0)$ かつ$\beta \in C_2(v_0)$ ならば，Wの構成を終了する．この場合は奇数長の$\alpha\beta$交互閉路が発見できたことになる．β辺で戻ってきたが上記でないときは$\alpha \in C_0(v_0)$ かつ$\beta \in C_1(v_0)$，または$\alpha \in C_1(v_0)$ かつ$\beta \in C_2(v_0)$ である．この場合は v_0に接続するα辺でまだ Wに含まれていないものを Wに加え Wの構成を続ける．$d(v_0,\alpha) = d(v_0,\beta) - 1$ であるのでそのようなα辺は必ず存在する．α辺で点 v_0に戻ってきた場合は v_0に接続するβ辺でまだ Wに含まれてい

ないものを W に加え W の構成を続ける. $d(v_0, \beta) > d(v_0, \alpha)$ であるのでそのような β 辺は必ず存在する.
(証明終)

3. アルゴリズム

本章では多重グラフ G を均等辺彩色する効率的なアルゴリズムを与える. $G' = G - w$ の均等辺彩色から G の均等辺彩色が交互歩道のスイッチ等の手法を使って得られることを示そう.

w に接続していない G の辺は G' の均等辺彩色によって彩色されているとしよう. $\Gamma'(w)$ は未彩色辺 $vw \in E(vw)$ が接続する w の隣接点 $v \in \Gamma(w)$ の集合とする. 始めは $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ であり, 彩色終了時には $\Gamma'(w) = \phi$ となる. $E'(vw)$ は多重辺 $E(vw)$ 中の未彩色辺の集合とする. $|E'(vw)| \leq |E(vw)| < k$ であるとしてよい. $v \in \Gamma'(w)$ なる各点 v について色の多重集合 $A(v)$ を次のように定める. $|C_0(v)| = n_0$, $|C_1(v)| = n_1$, $|C_2(v)| = n_2$ とする. $n_0 + n_1 + n_2 = k$ である.

$$\begin{aligned} C &= \{c_1, c_2, \cdots, c_k\} \\ C_0(v) &= \{c_1, c_2, \cdots, c_{n_0}\} \\ C_1(v) &= \{c_{n_0+1}, c_{n_0+2}, \cdots, c_{n_0+n_1}\} \\ C_2(v) &= \{c_{n_0+n_1+1}, c_{n_0+n_1+2}, \cdots, c_{n_0+n_1+n_2}\} \end{aligned}$$

とする. $|E(vw)| = \mu$ と定める.

場合 1: $\mu \leq n_0$ ならば

$A(v) = \{c_1, c_2, \cdots, c_\mu\}$

場合 2: $n_0 < \mu \leq 2n_0 + n_1$ ならば

$A(v) = \{c_1, c_2, \cdots, c_{n_0}, c_1, c_2, \cdots, c_{\mu - n_0}\}$

場合 3: $2n_0 + n_1 < \mu$ ならば

$A(v) = \{c_1, c_2, \cdots, c_{n_0}, c_1, c_2, \cdots, c_{n_0+n_1}, c_1, c_2, \cdots, c_{\mu-2n_0-n_1}\}$

$A(v)$ は未彩色辺 $E'(vw)$ の彩色に使用する候補の色の多重集合である. $|A(v)| = |E'(vw)|$ である. $A(v)$ のすべての色で $E'(vw)$ のすべての辺を彩色すると $C = C_0(v) \cup C_1(v) \cup C_2(v)$ である. ただし, このような彩色は点 w について均等辺彩色の条件を保証しないことに注意しよう. 多重集合 $A(v)$ の例図を図 3 に示す. 図の塗りつぶしてある部分は点 $v \in \Gamma'(w)$ に接続する各色で彩色された辺の本数を示す. 横軸は色 $c_1, c_2, \cdots$ に, 縦軸は辺数 $d(v, c_i)$ に対応する. 図の丸印は色の多重集合 $A(v)$ の要素を示す. 多重集合 $C(A)$ を

$$C(A) = \cup_{v \in \Gamma'(w)} A(v)$$

と定める. C の部分集合 $C'(A)$ を

$$C'(A) = \{c \mid c \in A(v), v \in \Gamma'(w)\}$$

と定義する. $C'(A)$ は多重集合ではなく集合であることに注意しよう.

$r = d(w) \bmod k$, $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$ とする. 色 $c_i \in C$ から正整数への関数 d_w を次のように定義する.

場合 1: $1 \leq i \leq r$ ならば $d_w(c_i) = \lceil d(w)/k \rceil$

場合 2: $r + 1 \leq i \leq k$ ならば $d_w(c_i) = \lfloor d(w)/k \rfloor$

$\sum_{c \in C} d_w(c) = d(w)$ である.

以下の 4 つの条件 S が保存されるようにアルゴリズムは進む.

$S1$ 任意の色 $c \in C'(A)$ について $d(w,c) \leq d_w(c) - 1$ である．
$S2$ 任意の点 $v \in \Gamma'(w)$ について $|A(v)| = |E'(vw)|$ である．かつ $A(v)$ のすべての色で $E'(vw)$ のすべての辺を彩色すると $C = C_0(v) \cup C_1(v) \cup C_2(v)$ である．
$S3$ 任意の点 $v \in V - \Gamma'(w) - \{w\}$ および任意の色 $c_1, c_2 \in C$ について $|d(v,c_1) - d(v,c_2)| \leq 2$ である．
$S4$ 任意の色 $c \in C$ について $d(w,c) \leq d_w(c)$ である．または任意の色 $c \in C$ について $\lfloor d(w)/k \rfloor - 1 \leq d(w,c) \leq \lfloor d(w)/k \rfloor + 1$ である．または任意の色 $c \in C$ について $\lfloor d(w)/k \rfloor \leq d(w,c) \leq \lfloor d(w)/k \rfloor + 2$ である．

初期状態において条件 S は明らかに成立している．また，すべての辺の彩色後は $\Gamma'(w) = \phi$ であり，条件 S が保存されていれば G は均等辺彩色されたことがわかる．

[補題 3]　グラフ $G - w$ が k 色で均等辺彩色されているとき，グラフ G の均等辺彩色は $O((|E|/k + |V|)d(w))$ 計算時間で得られる．
(証明) 条件 S を壊すことなく w に接続する未彩色辺を一本ずつ彩色するアルゴリズムを示す．処理は 4 つの場合からなる．

[場合 1]:　$d(w,c) \leq d_w(c) - 2$ なる色 $c \in C'(A)$ が存在するとき．
$v \in \Gamma'(w)$ で $c \in A(v)$ であったとする．色 c で辺 $e \in E(vw)$ を塗る．$A(v)$ から一個の色 c を取り除く．以上の操作は条件 S を保存する．(場合 1 終)

[場合 2]:　多重集合 $C(A)$ に丁度 1 個だけ含まれる色 c が存在するとき．
$v \in \Gamma'(w)$ で $c \in A(v)$ であったとする．色 c で辺 $e \in E(vw)$ を塗る．$A(v)$ から一個の色 c を取り除く．以上の操作は条件 S を保存する．(場合 2 終)

[場合 3]:　$c_1 \in C'(A)$，$c_2 \notin C'(A)$，$d_w(c_1) < d_w(c_2)$ かつ $d_w(c_2) - d(w,c_2) \geq 1$ なる色 $c_1, c_2 \in C$ が存在するとき．
$d_w(c_1) = \lceil d(w)/k \rceil$，$d_w(c_2) = \lfloor d(w)/k \rfloor$ と定義し直すと場合 1 が生じる．(場合 3 終)

[場合 4]:　場合 1,2,3 でないとき．
任意の点 $u \in \Gamma'(w)$ および任意の色 $\alpha \in A(u)$ を選ぶ．場合 1, 場合 2 でないとき任意の色 $c \in C$ は以下の (1)-(3) のいずれかである．
(1) $c \in C'(A)$ かつ $d(w,c) = d_w(c) - 1$
(2) $c \notin C'(A)$ かつ $d(w,c) \geq d_w(c)$
(3) $c \notin C'(A)$ かつ $d(w,c) \leq d_w(c) - 1$
場合 1,2 でないとき (3) を満足する色 β が存在することを示す．(1) または (2) である色しか存在しないと仮定しよう．w に接続する辺でまだ彩色されていない辺の数は

$$\begin{aligned}
|C(A)| &= \sum_{v \in \Gamma'(w)} |A(v)| \\
&= \sum_{v \in \Gamma'(w)} |E'(vw)| \\
&= d(w) - \sum_{c \in C} d(w,c) \\
&= \sum_{c \in C} d_w(c) - \sum_{c \in C} d(w,c) \\
&= \sum_{c \in C} \{d_w(c) - d(w,c)\}
\end{aligned}$$

である．いま $c \in C'(A)$ ならば $d_w(c) - d(w,c) = 1$，$c \notin C'(A)$ ならば $d_w(c) - d(w,c) \leq 0$ であるので

$$\begin{aligned} |C(A)| &\leq \sum_{c \in C'(A)} \{d_w(c) - d(w,c)\} \\ &= |C'(A)| \end{aligned}$$

である．一方，場合 1,2 でないので，任意の色 $c \in C'(A)$ は $C(A)$ 中に 2 個以上存在し，

$$|C(A)| \geq 2|C'(A)|$$

となり，矛盾が生じる．よって (3) を満足する色βが存在する．(3) を満足する色βが複数個存在するとき wに接続するβ辺の数が最小となるように色βを選ぶ．

場合 4 を 2 つの場合に分けて考える．

[場合 4.1]: $d(u,\beta) \leq d(u,\alpha)$ のとき

$\alpha \in C_0(u)$, $\alpha \in C_1(u)$, $\alpha \in C_2(u)$ のいずれである．さらに 3 つの場合にわけて考えよう．

[場合 4.1.1]: $\alpha \in C_0(u)$ のとき

$d(u,\beta) \leq d(u,\alpha)$, $\beta \notin A(u)$ より$\beta \in C_0(u)$ である．点 u に接続する辺の彩色は図 4(a) のようになっている．1 個の色αを $A(u)$ から削除し，1 個の色βを $A(u)$ に加えても条件 S は成立している．このとき色βについて場合 2 が生じている．

[場合 4.1.2]: $\alpha \in C_1(u)$ のとき

場合 4.1.1 と同様に考察すると$\beta \in C_1(u)$ である．点 u に接続する辺の彩色は図 4(b) のようになっている．1 個の色αを $A(u)$ から削除し，1 個の色βを $A(u)$ に加えても条件 Sは成立している．このとき色βについて場合 2 が生じている．

[場合 4.1.3]: $\alpha \in C_2(u)$ のとき

場合 4.1.1 と同様に考察すると$\beta \in C_2(u)$ である．点 u に接続する辺の彩色は図 4(c) のようになっている．1 個の色αを $A(u)$ から削除し，1 個の色βを $A(u)$ に加えても条件 Sは成立している．このとき色βについて場合 2 が生じている．

[場合 4.2]: $d(u,\beta) > d(u,\alpha)$ のとき

(略) (場合 4 終)

1 本の辺の彩色に高々 1 本の交互歩道のスイッチが必要である．補題 2 より 1 本の交互歩道の探索，およびスイッチは $O(|E|/k + |V|)$ 時間かかる．またこれ以外の部分は 1 本の辺の彩色につき $O(|V|)$ の計算時間しかかからない．よって上記のアルゴリズムの計算時間は $O((|E|^2/k + |V|)d(w))$ である． (証明終)

補題 3 より次の定理が得られる．

[定理 1] 任意の多重グラフ G は任意の k個の色を使用した均等辺彩色をもつ．また任意の多重グラフ G を任意の k個の色を使用して均等辺彩色する $O(|E|^2/k + |V||E|)$ 時間のアルゴリズムが存在する．

(証明略)

4. むすび

任意のグラフ G, 正整数 kに対して k色を使用した G の均等辺彩色が存在することを証明した．また，グラフを均等辺彩色する計算時間が $O(|E|^2/k + |V||E|)$ であるアルゴリズムを与えた．

文献

[1] E. G. Coffman, Jr, M. R. Garey, D. S. Johnson and A. S. LaPaugh: "Scheduling file transfers", SIAM J. Comput., 14, 3, (1985) pp. 744-780.

[2] A. Ehrenfeucht, V. Faber and H.A. Kierstead: "A new method of proving theorems on chromatic index", Discrete Mathematics, 52, (1984) pp. 159-164.

[3] M. K. Goldberg: "Edge-colorings of multigraphs: recoloring techniques", Journal of Graph Theory, 8, 1, (1984) pp. 122-136.

[4] A. J. W. Hilton and D. de Werra: "Sufficient conditions for balanced and for equitable edge-colorings of graphs", O. R. Working paper 82/3, Dépt. of Math., École Polytechnique Fédérate de Lausanne, Switzerland (1982).

[5] D. S. Hochbaum, T. Nishizeki and D. B. Shmoys: "A better than "best possible" algorithm to edge color multigraphs", Journal of Algorithms, 7, 1, (1986) pp. 79-104.

[6] S. Nakano and T. Nishizeki "Scheduling file transfers under port and channel constraints", Proc. Int. Symp. on Algorithms, Lect. Notes in Comp. Sci., 557, Springer-Verlag (1991) pp. 43-51.

[7] S. Nakano and T. Nishizeki "Nearly Uniform Scheduling of File Transfers", Proc. IPCO, to appear (1993)

[8] T. Nishizeki and K. Kashiwagi: "On the 1.1 edge-coloring of multigraphs", SIAM J. Disc. Math., 3, 3, (1990) pp.391-410.

[9] V. G. Vizing: "On an estimate of the chromatic class of a p-graph", Discret Analiz, 3, (1964) pp. 25-30 (in Russian).

[10] V. G. Vizing: "The chromatic class of a multigraph", Kibernetica(Kief), 3, pp.29-39 (1965); Cybernatics, 3, (1965) pp. 32-41.

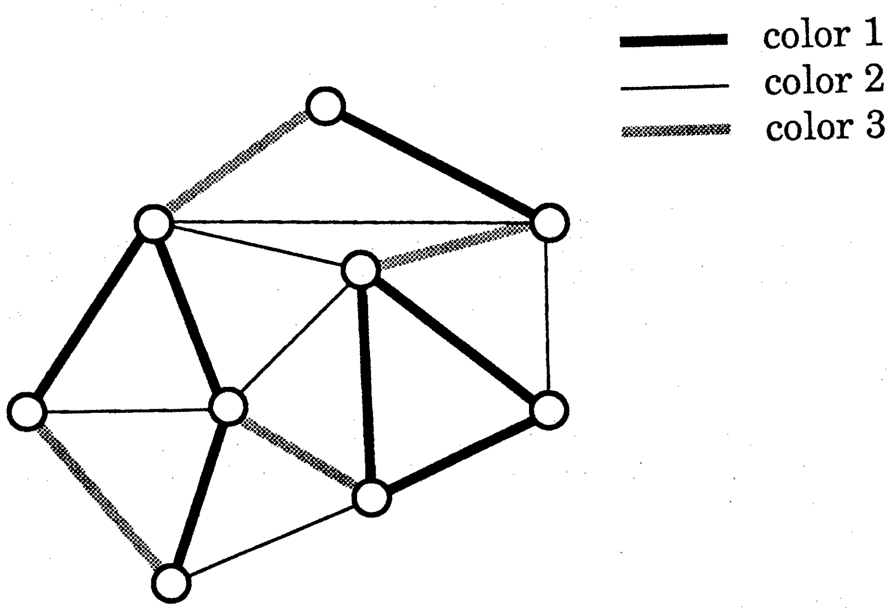

Fig. 1 A nearly equitable coloring using three colors.