アルゴリズム 35−3
（1993. 10. 1）

論理式充足可能性，整数計画，双線形計画

萩原 斉　　中森 眞理雄

東京農工大学工学部 情報工学大講座

計算量の理論における計算複雑度の定義は，計算機械モデルとその計算機械モデルに対応した記述言語（記述方法）に依存している。本論文では，計算機械モデルを仮定することなく問題の持つ複雑度を表現する記述方法として，各問題を双線形計画問題として記述し，その際に必要となる変数の数を用いて各問題の持つ複雑度を表現する方法を提案する。なお，本論文においては，0-1 整数計画問題における可能解の存在性判定問題，論理式の充足可能性問題，ハミルトン閉路の存在性判定問題などを双線形計画問題として記述した結果を示す。

Satisfiability, Integer Programming and Bilinear Programming

Hitoshi Hagiwara　　Mario Nakamori

Tokyo University of Agriculture and Technology

A new measure of problem complexity is proposed. Problems are described as bilinear programming problems and their complexities are evaluated by the number of variables in the bilinear programming form. Unlike the conventional way of evaluating computational complexity, the proposed complexity is independent of models of computation.

Problems discussed in the present paper are as follows; determining feasibility of 0-1 integer programming problems, determining satisfiability of logical expressions, finding a Hamilton cycle in a graph, finding a complete subgraph with k vertices, and determining isomorphism of two graphs.

1　まえがき

一般に，問題の計算複雑度は，その問題を解くためのアルゴリズムが必要とする計算量によって定義され，さらに，その計算量のオーダーによって，問題群の複雑さに関するクラス分けが定義される。

このような計算量の定義に際しては，チューリング機械やランダム・アクセス・マシンなどの計算機械モデルが仮定され，さらにその計算機械モデルに対応した記述言語（記述方法）が仮定される。これは，各アルゴリズムにおいて，1ステップでどれだけのことができるかを仮定しているということと同じである。すなわち，計算量の定義は，計算機械モデルに依存するのである。

本論文では，計算機械モデルを仮定することなく，各問題の持つ複雑度を表現する記述方法として，「問題を双線形計画問題として記述し，その際に必要となる変数の数を用いて，問題の持つ複雑度を表現する方法」を提案する。したがって，本論文で定義する問題の複雑度は，従来の計算量の理論における計算複雑度とは異なったものとなる。

本論文においては，特に“0-1 整数計画問題として記述することのできる NP 完全問題”などを連続変数に対する双線形計画問題として記述する方法について説明し，各問題の持つ複雑度について考察する。

まず初めに，一般的な 0-1 整数計画問題における可能解の存在判定問題を双線形計画問題として記述する方法について説明し，その後に

- 論理式の充足可能性問題
  - CNF 論理式における充足可能性問題
  - DNF 論理式における充足可能性問題
  - 排他的論理和を含む論理式における充足可能性問題
- ハミルトン閉路の存在判定問題
- 大きさ k の完全部分グラフ存在判定問題
- グラフの同型性判定問題

などの問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

最後に，各問題を双線形計画問題として記述する際に使用される変数の数を用いて，各問題の持つ複雑度について比較・考察する。

なお，双線形計画問題とは，次のような一般形で書き表される問題のことをいう。

maximize

$$z = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}'\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{y},$$

subject to

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1,$$
$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{b}_2,$$
$$\boldsymbol{o} \le \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{o} \le \boldsymbol{y}.$$

ただし，上式において，$\boldsymbol{x}$ 及び $\boldsymbol{y}$ は列ベクトルの変数であり，$\boldsymbol{x}'$ は $\boldsymbol{x}$ の転置（すなわち行ベクトル）である。また，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{D}$ はそれぞれの式に対応する大きさの係数行列である。

2　0-1 整数計画問題と双線形計画問題との関係

ここでは，NP 完全問題を双線形計画問題として記述する際の最も基本的な例として，0-1 整数計画問題における可能解の存在判定問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

なお，ここで考える 0-1 整数計画問題は，すべての制約条件を満たす解が存在するか否かを問う判定問題であるため，目的関数は省略して考えるものとする。

このとき，

<u>問題 I</u>

制約条件

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\xi_j = 0 \text{ or } 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

を満たす解が存在するか否かを判定する問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

<u>問題 I.B</u>

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{n} \{x_j u_j + (1 - x_j)(1 - u_j)\},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$
$$0 \le x_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$
$$0 \le u_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

ここで，目的関数 z は，連続変数 x_j 及び u_j の取り得る値を 0 か 1 に限定するという目的のためだけに使用されている。なぜならば，この目的関数 z を最大化するためには，すべての (x_j, u_j) の組について，

$$(x_j, u_j) = (0, 0) \text{ or } (1, 1) \qquad (1)$$

が成立しなければならないからである。その結果，問題 I.B における連続変数 x_j が，問題 I における 0-1 変数 ξ_j に対応づけられることになる。また，変数 x_j 及び u_j が (1) のに示したような値を取るとき，目的関数 z の値は n となる。

以上より，問題 I.B において，最適解に対する目的関数 z の値が n となれば，問題 I の 0-1 整数計画問題に可能解が存在することになる。

なお，問題 I.B においては，使用される変数が

- $x_j, u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

であるので，合計 $2n$ 個の変数が使用されている。

3 論理式の充足可能性問題について

ここでは，最も典型的な NP 完全問題である，論理式の充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

一般に，ある一つの論理式は，

- 論理積標準形 (*Conjunctive Normal Form*)
- 論理和標準形 (*Disjunctive Normal Form*)

という二つの標準形に変形することができる。したがって，本来ならば，論理積標準形の論理式（以後，CNF 論理式）か論理和標準形の論理式（以後，DNF 論理式）のどちらか一方の標準形の論理式について充足可能性問題を考えればよいことになる。しかし，本論文では，両者の比較をするために，あえて両標準形についての充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明することにする。

一般に，ある変数 ξ の肯定形 ξ 及び否定形 $\neg\xi$ の両者をまとめてリテラルと呼び，いくつかのリテラルを同一の論理演算子で結んだものを節と呼ぶ。そこで，本論文においては，各標準形の論理式における充足可能性問題において共通して用いる定数として，論理式内の節の数を表す m と，論理式内で使用される変数の数を表す n を用いることにする。また，各標準形に変形する前の論理式において使用される変数（論理変数）を

$$\xi_j = 0 \text{ or } 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

とし，さらに，各標準形の論理式における第 i 節内において，変数 ξ_j が肯定形で存在するような変数の添字 j が属する集合を J_i とし，変数 ξ_j が否定形で存在するような変数の添字 j が属する集合を J_i' とする。

3.1 CNF 論理式における充足可能性問題について

ここでは，CNF 論理式における充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

なお，ここで考える CNF 論理式は，

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \left[\Big(\bigvee_{j \in J_i} x_j \Big) \vee \Big(\bigvee_{j \in J_i'} \neg x_j \Big) \right] \tag{2}$$

のように表現することができる。

ここで，(2) の CNF 論理式が充足可能となるための条件について考えると，まず第 i 節においては，各リテラルが論理和で結ばれているので，少なくとも一つのリテラルが真となるとき第 i 節が充足可能になる。さらに，各節は論理積で結ばれているので，すべての節が充足可能となるとき (2) の CNF 論理式も充足可能となる。

したがって，(2) の CNF 論理式における充足可能性問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

<u>**問題 II.B**</u>

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{n} \{x_j u_j + (1 - x_j)(1 - u_j)\},$$

subject to

$$\begin{aligned}
&\sum_{j \in J_i} x_j + \sum_{j \in J_i'} (1 - x_j) \geq 1 \\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \\
&0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \\
&0 \leq u_j \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{3}$$

ここでも，目的関数 z により，連続変数 x_j 及び u_j の取り得る値が 0 か 1 に限定されており，その結果，問題 II.B における連続変数 x_j が，CNF 論理式に変形する前の論理式における論理変数 ξ_j と対応づけられることになる。また，(3) により，すべての節において少なくとも一つのリテラルが真とならなければならないという条件を表している。

以上より，問題 II.B において，最適解に対する目的関数 z の値が n となれば，(2) に示した CNF 論理式は充足可能であることになる。

なお，問題 II.B においては，使用される変数が

- $x_j, u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

であるので，合計 $2n$ 個の変数が使用されている。

3.2 DNF 論理式における充足可能性問題について

ここでは，DNF 論理式における充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

なお，ここで考える DNF 論理式は，

$$\bigvee_{i=1}^{m}\left[\Big(\bigwedge_{j\in J_i} x_j\Big)\bigwedge\Big(\bigwedge_{j\in J_i'} \neg x_j\Big)\right] \tag{4}$$

のように表現することができる。

ここで，(4) の DNF 論理式が充足可能となるための条件について考えると，まず第 i 節においては，各リテラルが論理積で結ばれているので，すべてのリテラルが真となるとき第 i 節が充足可能になる。さらに，各節は論理和で結ばれているので，少なくとも一つの節が充足可能となるとき (4) も充足可能となる。

したがって，(4) の DNF 論理式における充足可能性問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

<u>問題 III.B</u>

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{n}\{x_j u_j + (1-x_j)(1-u_j)\},$$

subject to

$$w_i \le x_j \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ \forall j\in J_i), \tag{5}$$

$$w_i \le 1-x_j \qquad (i=1,2,\ldots,m;\ \forall j\in J_i'), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m} w_i \ge 1, \tag{7}$$

$$0 \le x_j \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n),$$

$$0 \le u_j \le 1 \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

ここでも，目的関数 z により，連続変数 x_j 及び u_j の取り得る値が 0 か 1 に限定されており，その結果，問題 III.B における連続変数 x_j が，DNF 論理式に変形する前の論理式における論理変数 ξ_j と対応づけられることになる。また，(5)〜(7) により，すべてのリテラルが真となる節が少なくとも一つ存在しなければならないという条件を表している。

以上より，問題 III.B において，最適解に対する目的関数 z の値が n となれば，(4) に示した DNF 論理式は充足可能であることになる。

なお，問題 III.B においては，使用される変数が

- $x_j, u_j \quad (j=1,2,\ldots,n)$
- $w_i \quad (i=1,2,\ldots,m)$

であるので，合計 $2n+m$ 個の変数が使用されている。

3.3 排他的論理和を含む論理式における充足可能性問題について

ここでは，排他的論理和を含む論理式における充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

前述したように，CNF 論理式及び DNF 論理式は，ともに論理和及び論理積のみによって構成される論理式であった。そのため，もしも充足可能性を考えたい論理式内に排他的論理和が存在する場合，

$$\begin{aligned} x \oplus y &= (x \wedge \neg y) \vee (\neg x \wedge y) \\ &= (x \vee y) \wedge (\neg(x \wedge y)) \\ &= (x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \end{aligned} \tag{8}$$

などの変形を用いて，排他的論理和を論理和及び論理積に書き換える必要があった。

しかし，(8) からも分かるとおり，排他的論理和を論理和及び論理積で書き換えると，式の長さが 2 倍になってしまい，もしも，n 個の排他的論理和を含む式を (8) を用いて変形すると，式の長さが $O(2^n)$ にもなってしまう。すると，問題 II.B や問題 III.B において使用される変数の数も $O(2^n)$ で増えることになってしまい，多項式オーダーの数の変数で記述することができなくなってしまう。

そこで，ここでは，排他的論理和を論理和及び論理積に書き換えることなく，排他的論理和を含む式における充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

3.3.1 排他的論理和を含む場合 〜その 1 〜

ここでは，いくつかの変数が排他的論理和によって結ばれた m 個の節が，論理積によって結ばれている論理式を考えるものとし，その論理式における充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

なお，ここで考える論理式は，

$$\bigwedge_{i=1}^{m}\left[\Big(\bigoplus_{j\in J_i} x_j\Big)\bigoplus\Big(\bigoplus_{j\in J_i'} \neg x_j\Big)\right] \tag{9}$$

のように表現することができる。

ここで，(9) の論理式が充足可能となるための条件について考えると，まず第 i 節においては，各リテラルが排他的論理和で結ばれているので，奇数個のリテラルが真となるとき第 i 節が充足可能となる。さらに，各節は論理積で結ばれているので，すべての節が充足可能となるとき (9) の論理式も充足可能となる。

したがって，(9) の論理式における充足可能性問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

問題 IV.B

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{n} \{x_j u_j + (1-x_j)(1-u_j)\} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} \{y_{ik}v_{ik} + (1-y_{ik})(1-v_{ik})\},$$

subject to

$$\sum_{j\in J_i} x_j + \sum_{j\in J_i'} (1-x_j) = 1 + \sum_{k=1}^{l} (2^k y_{ik})$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ l=\lfloor\log_2 n\rfloor+1), \qquad (10)$$
$$0 \le x_j \le 1 \quad (j=1,2,\ldots,n),$$
$$0 \le y_{ik} \le 1$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,l),$$
$$0 \le u_j \le 1 \quad (j=1,2,\ldots,n),$$
$$0 \le v_{ik} \le 1$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,l).$$

ここで，(10) の左辺は第 i 節内で真となるリテラルの数を表しており，右辺は左辺の値が奇数であるときに各変数 y_{ik} が 0 か 1 の値を取るようになっている。なお，今までの問題と同様に，ここでも目的関数 z により，連続変数 x_j 及び y_{ik} の取り得る値が 0 か 1 に限定されている。

以上より，問題 IV.B において，最適解に対する目的関数 z の値が $n+ml$ となれば，(9) に示した論理式は充足可能であることになる。ただし，$l=\lfloor\log_2 n\rfloor+1$ である。

なお，問題 IV.B においては，使用される変数が

- $x_j, u_j \quad (j=1,2,\ldots,n)$
- $y_{ik}, v_{ik} \quad (i=1,2,\ldots,m;\ k=1,2,\ldots,l)$

であるので，合計 $2n+2ml=2(n+ml)$ 個の変数が使用されている。

3.3.2 排他的論理和を含む場合 ～その 2～

ここでは，いくつかの変数が排他的論理和によって結ばれた m 個の節が，論理和によって結ばれている論理式を考えるものとし，その論理式における充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

なお，ここで考える論理式は，

$$\bigvee_{i=1}^{m}\left[\left(\bigoplus_{j\in J_i} x_j\right) \oplus \left(\bigoplus_{j\in J_i'} \neg x_j\right)\right] \qquad (11)$$

のように表現することができる。

ここで，(11) の論理式が充足可能となるための条件について考えると，まず第 i 節においては，各リテラルが排他的論理和で結ばれているので，奇数個のリテラルが真となるとき第 i 節が充足可能となる。さらに，各節は論理和で結ばれているので，少なくとも一つの節が充足可能となるとき (11) の論理式も充足可能となる。

したがって，(11) の論理式における充足可能性問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

問題 V.B

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{n} \{x_j u_j + (1-x_j)(1-u_j)\} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=0}^{l} \{y_{ik}v_{ik} + (1-y_{ik})(1-v_{ik})\},$$

subject to

$$\sum_{j\in J_i} x_j + \sum_{j\in J_i'} (1-x_j) = \sum_{k=0}^{l} (2^k y_{ik})$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ l=\lfloor\log_2 n\rfloor+1), \qquad (12)$$
$$\sum_{i=1}^{m} y_{i0} \ge 1, \qquad (13)$$
$$0 \le x_j \le 1 \quad (j=1,2,\ldots,n),$$
$$0 \le y_{ik} \le 1$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=0,1,\ldots,l),$$
$$0 \le u_j \le 1 \quad (j=1,2,\ldots,n),$$
$$0 \le v_{ik} \le 1$$
$$(i=1,2,\ldots,m;\ k=0,1,\ldots,l).$$

ここで，(12) の左辺は，(10) の左辺と同様に，第 i 節内で真となるリテラルの数を表している。しかし，(12) の右辺においては，(10) の右辺と比較して，定数項の 1 がなくなった代わりに変数 y_{j0} が加わったことにより，左辺の値が奇数でも偶数でも，各変数 y_{ik} が 0 か 1 の値を取るようになっている。そして，(13) の制約条件により，(12) の左辺の値が奇数であった節が少なくとも一つは存在しなければならないという条件を表している。

以上より，問題 V.B において，最適解に対する目的関数 z の値が $n+m(l+1)$ となれば，(11) に示した論理式は充足可能であることになる。

なお，問題 V.B においては，使用される変数が

- $x_j, u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$
- $y_{ik}, v_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, l)$

であるので，合計 $2n + 2m(l+1) = 2\{n + m(l+1)\}$ 個の変数が使用されている。

4 ハミルトン閉路の存在判定問題について

ここでは，与えられたグラフ G におけるハミルトン閉路の存在判定問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

ハミルトン閉路の存在判定問題とは，与えられたグラフ G において，すべての節点をただ一度だけ通るような閉路が存在するか否かを判定する問題である。なお，グラフ G は，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{グラフ } G \text{ において節点 } i \text{ から} \\ & \quad \text{節点 } j \text{ への枝が存在するとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases} \tag{14}$$

という隣接行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}\ (i, j = 1, 2, \ldots, v)$ により与えられているものとする。また，グラフ G の節点数を v で表すものとする。

このとき，グラフ G におけるハミルトン閉路の存在判定問題は，問題 VI に示したすべての条件を満たす変数 $\xi_{ijk}\ (i, j, k = 1, 2, \ldots, v;\ i \neq j)$ の値の組を見つける問題として定義できる。ただし，ここでの変数 ξ_{ijk} は，

$$\xi_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } i \text{ から節点 } j \text{ への枝を閉路の} \\ & \quad k \text{ 番目の枝として使用するとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

という値を取るものとする。

<u>問題 VI</u>

$$\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{v} \xi_{ijk} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, v), \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} \xi_{ijk} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, v), \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{v} \xi_{ijk} = \sum_{l=1}^{v} \xi_{jlk+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, v;\ k = 1, 2, \ldots, v-1), \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{v} \xi_{ijv} = \sum_{l=1}^{v} \xi_{jl1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, v), \tag{18}$$

$$\xi_{ijk} \leq a_{ij} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, v). \tag{19}$$

ここで，(15) は "節点 i から出る枝の内，閉路に使用される枝はただ一本だけである" ということを表しており，(16) は "閉路の k 番目の枝として使用される枝はただ一本だけである" ということを表している。また，(17) 及び (18) は "閉路の k 番目に使用される枝と $k+1$ 番目に使用される枝は，連結していなければならない" ということを表しており，(19) は "グラフ G において枝の存在するところでしか閉路を形成することはできない" ということを表している。

このとき，上述のようなハミルトン閉路の存在判定問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

<u>問題 VI.B</u>

maximize

$$z = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{v} \{x_{ijk}u_{ijk} + (1 - x_{ijk})(1 - u_{ijk})\},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{v}\sum_{k=1}^{v} x_{ijk} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, v),$$

$$\sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} x_{ijk} = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, v),$$

$$\sum_{i=1}^{v} x_{ijk} = \sum_{l=1}^{v} x_{jlk+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, v;\ k = 1, 2, \ldots, v-1),$$

$$\sum_{i=1}^{v} x_{ijv} = \sum_{l=1}^{v} x_{jl1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, v),$$

$$x_{ijk} \leq a_{ij} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, v),$$

$$0 \leq x_{ijk} \leq 1 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, v;\ i \neq j),$$

$$0 \leq u_{ijk} \leq 1 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, v;\ i \neq j).$$

以上より，問題 VI.B において，最適解に対する目的関数 z の値が $v^2(v-1)$ となれば，与えられたグラフ G においてハミルトン閉路が存在することになる。

なお，問題 VI.B においては，使用される変数が

- $x_{ijk}, u_{ijk} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, v;\ i \neq j)$

であるので，合計 $2v^2(v-1)$ 個の変数が使用されている。

5 大きさ k の完全部分グラフ存在判定問題について

ここでは，与えられたグラフ G における大きさ k の完全部分グラフ存在判定問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

大きさ k の完全部分グラフ存在判定問題とは，無向グラフ $G = (V, E)$ 及び正の整数 $k\ (k \leq |V|)$ が与えられたときに，無向グラフ $G' = (V', E')$ が完全グ

ラフとなるような節点集合 $V'(V' \subseteq V,\ |V'| = k)$ が存在するか否かを判定する問題である。なお，無向グラフ G は，

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{無向グラフ } G \text{ において} \\ & \quad \text{二節点 } i, j \text{ 間に枝が存在するとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

という隣接行列 $\boldsymbol{B} = \{b_{ij}\}\ (i, j = 1, 2, \ldots, v)$ により与えられているものとする。また，ここでも $v = |V|$ であるものとする。

このとき，無向グラフ G における大きさ k の完全部分グラフ存在判定問題は，問題 VII に示したすべての条件を満たす変数 $\xi_j\ (j = 1, 2, \ldots, v)$ の値の組を見つける問題として定義できる。ただし，ここでの変数 ξ_j は，

$$\xi_j = \begin{cases} 1 & \text{節点 } j \text{ が節点集合 } V' \text{ に含まれるとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

という値を取るものとする。

<u>**問題 VII**</u>

$$\sum_{j=1}^{v} \xi_j = k, \tag{20}$$

$$\xi_i + \xi_j \leq 1$$
$$(b_{ij} = 0 \text{ を満たす各 } (i, j) \text{ について}). \tag{21}$$

ここで，(20) は"節点集合 V' に含める節点は，v 個の節点の内 k 個の節点だけである"ということを表しており，(21) は"二節点 i, j 間に枝が存在しないときは，節点 i 及び j を同時に節点集合 V' に含めることはできない"ということを表している。

このとき，上述のような大きさ k の完全部分グラフ存在判定問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

<u>**問題 VII.B**</u>

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{v} \{x_j u_j + (1 - x_j)(1 - u_j)\},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{v} x_j = k,$$

$$x_i + x_j \leq 1$$
$$(b_{ij} = 0 \text{ を満たす各 } (i, j) \text{ について}),$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, v),$$

$$0 \leq u_j \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, v).$$

以上より，問題 VII.B において，最適解に対する目的関数 z の値が v となれば，与えられた無向グラフ G において $|V'| = k$ を満たす完全部分グラフ G' が存在することになる。

なお，問題 VII.B においては，使用される変数が

- $x_j, u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, v)$

であるので，合計 $2v$ 個の変数が使用されている。

6 グラフの同型性判定問題について

ここでは，与えられた二つのグラフ G 及び G' の同型性判定問題を双線形計画問題として記述する方法について説明する。

グラフの同型性判定問題とは，二つのグラフ G 及び G' が与えられたときに，一方のグラフ G' における節及び枝に付されている番号を変更することにより，他方のグラフ G と同じグラフとみなすことができるか否かを判定する問題である。なお，グラフの同型性を判定する問題であるので，ここでは，グラフ G 及び G' の節点数は同じであるものと仮定し，その数を v で表すものとする。また，グラフ G 及び G' は，それぞれ (14) と同様な定義の隣接行列 $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}$ 及び $\boldsymbol{A}' = \{a'_{ij}\}\ (i, j = 1, 2, \ldots, v)$ により与えられているものとする。

このとき，二つのグラフ G 及び G' の同型性判定問題は，問題 VIII に示したすべての条件を満たす変数 ξ_{ij} の値の組を見つける問題として定義できる。ただし，ここでの変数 ξ_{ij} は，

$$\xi_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{グラフ } G \text{ の節点 } i \text{ がグラフ } G' \text{ の} \\ & \quad \text{節点 } j \text{ に対応づけられるとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

という値を取るものとする。

<u>**問題 VIII**</u>

$$\sum_{j=1}^{v} \xi_{ij} = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, v), \tag{22}$$

$$\sum_{i=1}^{v} \xi_{ij} = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, v), \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{v} \sum_{j=1}^{v} a_{ij} \xi_{jk} \xi_{jl} = a'_{kl}. \tag{24}$$

ここで，(22) は"グラフ G の節点 i に対応するグラフ G' の節点はただ一つである"ということを表しており，(23) は，その逆に"グラフ G' の節点 j に対応するグラフ G の節点はただ一つである"ということを表している。また，(24) は"グラフ G におい

て，節点 i から節点 j への枝が存在し，かつグラフ G の節点 i,j が，それぞれグラフ G' の節点 k,l に対応づけられているとき，しかもそのときに限り，グラフ G' において，節点 k から節点 l への枝が存在する”ということを表している。また，この (24) は二次式の形であるので，

$$\sum_{k=1}^{v} \xi_{ik}\xi_{i'k} = \begin{cases} 1 & (i = i' \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq i' \text{ のとき}) \end{cases}$$

を用いて変形することにより，

$$\sum_{j=1}^{v} a_{ij}\xi_{jl} = \sum_{k=1}^{v} a'_{kl}\xi_{ik} \qquad (i,l = 1,2,\ldots,v)$$

となる。

このとき，上述のようなグラフの同型性判定問題は，次のような連続変数に対する双線形計画問題として記述される。

<u>問題 VIII.B</u>

maximize

$$z = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} \{x_{ij}u_{ij} + (1-x_{ij})(1-u_{ij})\},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{v} x_{ij} = 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,v),$$

$$\sum_{i=1}^{v} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1,2,\ldots,v),$$

$$\sum_{j=1}^{v} a_{ij}x_{jl} = \sum_{k=1}^{v} a'_{kl}x_{ik}$$
$$(i,l = 1,2,\ldots,v),$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \qquad (i,j = 1,2,\ldots,v),$$

$$0 \leq u_{ij} \leq 1 \qquad (i,j = 1,2,\ldots,v).$$

以上より，問題 VIII.B において，最適解に対する目的関数 z の値が v^2 となれば，与えられた二つのグラフ G 及び G' は同型のグラフであることになる。

なお，問題 VIII.B においては，使用される変数が

- $x_{ij}, u_{ij} \quad (i,j = 1,2,\ldots,v)$

であるので，合計 $2v^2$ 個の変数が使用されている。

7 双線形計画問題としての問題複雑度の評価

ここで，各問題を双線形計画問題として記述する際に必要となる変数の数ついてまとめると，表 1 のような結果になる。ただし，表中の m 及び l に関しては，$m \leq n$, $l = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ が成立する。

表 1 使用する変数の数

問題	変数の数	問題	変数の数
I.B	$2n$	V.B	$2\{n + m(l+1)\}$
II.B	$2n$	VI.B	$2v^2(v-1)$
III.B	$2n + m$	VII.B	$2v$
IV.B	$2(n + ml)$	VIII.B	$2v^2$

表 1 から，同じ NP 完全問題でも，双線形計画問題として記述するために必要となる変数の数が，かなり異なっていることが分かる。

8 あとがき

ここまでで述べてきたとおり，本論文では計算機モデルに依存しない記述方法を提案した。したがって，その記述結果において必要となる変数の数により，“NP 完全”に属する問題群をさらに細かな問題群に分けることが可能になると考える。

今後は，さらに多くの NP 完全問題を双線形計画問題として記述することにより，より具体的な NP 完全問題のクラス分けを定義したいと考える。

参考文献

[1] 広中平祐編, “現代数理科学事典,” 大阪書籍, 1991.（V. 数理論理学, [2] 論理体系, 2 命題論理, 2-3 標準形の項 (p.322)）

[2] OR 事典編集委員会編, “OR 事典,” 日科技連出版社, 1975.（特殊な型の数理計画, 双線形計画の項 (p.183)）

[3] 茨木俊秀, “アルゴリズムとデータ構造,” 昭晃堂, 1991.

[4] 小林孝次郎, “計算の複雑さ,” 昭晃堂, 1988.

[5] Y.Yajima and H.Konno, “An outer approximation method for bilinear programming problems,” 日本 OR 学会 1992 年度春季研究発表会アブストラクト集, pp.228-229 (1992).

[6] E.Börger, *Computability, Complexity, Logic*, North-Hollad, 1989.

[7] 中森 眞理雄, “論理式充足可能性，整数計画，および双線形計画について,” 情報処理学会第 45 回全国大会講演論文集 (1), 3X-3 (1992).

[8] 中森 眞理雄, “問題複雑度と線形・双線形計画法,” 統計数理研究所研究集会「最適化：モデリングとアルゴリズム」, 1993 年 3 月.